

Explicitation d'une analogie formelle entre la théorie einsteinienne de la gravitation pour des champs stationnaires et la théorie unitaire de Kaluza-Klein

S. BERGIA

Département de Physique - Université de Bologne
I.N.F.N. - Section de Bologne

1. Introduction

Je n'ai pas trouvé, dans la littérature, de discussion détaillée ¹ sur l'analogie formelle évidente qui existe entre la théorie einsteinienne ordinaire de la gravitation dans le cas de champs stationnaires et la théorie unitaire à cinq dimensions de Kaluza [2] et Klein [3].

L'analogie concerne le fait que la condition relative à la stationnarité du champ gravitationnel (indépendance de la métrique par rapport à la coordonnée temporelle) correspond à la condition (liaison de Kaluza) que les composantes de la métrique de la variété à cinq dimensions ne dépendent pas de la cinquième coordonnée.

Expliciter cette analogie point par point nous conduit à voir d'un autre oeil les aspects de l'une et de l'autre théorie ; cela invite, par exemple, tout naturellement, à considérer une décomposition du champ gravitationnel stationnaire en tenseurs irréductibles (scalaire, vecteur et tenseur de deuxième ordre) sous transformations générales de coordonnées tridimensionnelles et à considérer la partie vectorielle comme un champ de jauge. Le rotationnel de ce champ détermine l'action sur les points matériels d'une force "de Coriolis" qui est, dans l'analogie, l'équivalent exact de la force de Lorentz.

Ces développements formels plutôt évidents sont exposés, avec quelques détails de complément, au paragraphe 2.

¹C'est seulement après avoir effectué la première rédaction de cette note que j'ai appris l'existence d'un article de J. Samuel et B.R. Iyer [1] dans lequel sont examinés quelques aspects intéressants de cette analogie. La version finale de cet exposé tient compte de la discussion de Samuel et Iyer.

Du point de vue historique, on indique (paragraphe 3) que O. Klein eut la possibilité d'utiliser l'analogie pour corriger une erreur de Kaluza et obtenir la projection correcte de la métrique spatio-temporelle à partir de celle pentadi-mensionnelle.

Par la suite je m'occuperai de variétés spatio-temporelles respectivement à 3 (purement spatiales), 4 et 5 dimensions.

J'admettrai qu'il s'agit, dans tous les cas, de variétés différentiables munies d'atlas de cartes avec coordonnées locales respectivement désignées par x^m , x^μ et x^M ($m = 1, 2, 3; \mu = 1, 2, 3, 4; M = 1, 2, 3, 4, 5$). Bien entendu la 4^{ème} coordonnée est celle temporelle et la 5^{ème} est celle qui correspond à la dimension ultérieure, de caractère spatial. La signature de la métrique spatio-temporelle est $(1, 1, 1, -1)$.

J'appellerai respectivement $\mathbf{g}$, γ et $\mathbf{G}$ les tenseurs métriques des variétés à 3, 4 et 5 dimensions.

2. Développement de l'analogie

Dans la théorie einsteinienne de la gravitation, on définit comme stationnaire un champ pour lequel les composantes de la métrique ne dépendent pas de la coordonnée temporelle. ²

D'autre part, la théorie unitaire à cinq dimensions de Kaluza- Klein, dans sa formulation originale, considère que les composantes de la métrique de la variété spatio-temporelle à cinq dimensions ne dépendent pas de la 5^{ème} coordonnée (liaison de Kaluza).

Ainsi donc est établie une analogie formelle entre la théorie des champs gravitationnels stationnaires et la théorie unitaire, dans le sens de Kaluza-Klein, du champ gravitationnel et électromagnétique, dans le cas où aucune réalité n'est attribuée à la 5^{ème} dimension au point de faire dépendre les composantes de la métrique de cette dernière dimension.

La liaison de Kaluza détruit la covariance générale de la théorie en 5 dimensions, de même que celle de stationnarité détruit la covariance générale de la théorie en 4.

La transformation la plus générale de coordonnées, pour laquelle les composantes de la métrique demeurent indépendantes du temps est la suivante :

$$x^k \rightarrow x'^k = x'^k(x^i) \quad (1,a)$$

²Pour une discussion physique plus approfondie, voir Rindler [4], page 119 et suivantes. Landau et Lifchitz [5] préfèrent appeler ces champs des champs *con-*
stants.

$$x^4 \rightarrow x'^4 = ax^4 + \phi(x^k) \quad (1,b)$$

dans laquelle a est une constante positive, si l'on admet un changement d'échelle du paramètre temporel.

De façon analogue la transformation plus générale (K -transformation) pour laquelle la liaison de Kaluza demeure valable est la suivante :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x^\nu) \quad (2,a)$$

$$x^5 \rightarrow x'^5 = bx^5 + \psi(x^\nu) \quad (2,b)$$

Puisqu'un changement d'échelle global de la 4ème et 5ème coordonnées dans les deux cas n'a aucune influence physique, on posera, dans la discussion suivante, $a = b = 1$.

Les carrés de l'intervalle dans les variétés à 4 et 5 dimensions, respectivement:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3)$$

et

$$dS^2 = G_{MN} dx^M dx^N, \quad (4)$$

peuvent être reportés respectivement comme suit :

$$d\sigma^2 = g_{mn} dx^m dx^n + \frac{(dx^4 + \gamma_{4l} dx^l)^2}{\gamma_{44}} \quad (5)$$

avec

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - \frac{\gamma_{4m} \gamma_{4n}}{\gamma_{44}} \quad (6)$$

et

$$dS^2 = \gamma^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{(dx^5 + G_{5\lambda} dx^\lambda)^2}{G_{55}} \quad (7)$$

avec

$$\gamma_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{G_{5\mu} G_{5\nu}}{G_{55}} \quad (8)$$

Bien entendu nous avons déjà admis que le second membre de la (8) correspond à la métrique de la variété spatio-temporelle et que le second membre de la (6) correspond à la métrique purement spatiale.

Cette deuxième affirmation peut être justifiée de façon élémentaire comme suit (L.D. Landau et E.M. Lifchitz [5], page 308).

On suppose qu'un signal lumineux est émis d'un point B (de coordonnées $x^\mu + dx^\mu$) vers un point infiniment voisin A (de coordonnées x^μ) et réfléchi

immédiatement en sens inverse. La distance spatiale dl entre A et B est déterminée alors comme

$$dl = \frac{cd\tau}{2} \quad (9)$$

en termes du laps de temps propre employé pour le processus tout entier. L'expression pour l'intervalle peut être résolue en fonction de la variation dx^4 de la coordonnée temporelle, ce qui donne les deux racines :

$$dx^{4(1,2)} = \frac{1}{\gamma_{44}} \left[-\gamma_{4m} dx^m \mp \sqrt{(\gamma_{4m}\gamma_{4n} - \gamma_{mn}\gamma_{44})dx^m dx^n} \right] \quad (10)$$

Elles correspondent à la propagation du signal dans les deux directions : si x^4 est l'instant de l'arrivée du signal en A , les instants de son départ de B et de son retour en B seront respectivement $x^4 + dx^{4(1)}$ et $x^4 + dx^{4(2)}$. La variation totale de la coordonnée temporelle est alors :

$$dx^4 = dx^{4(2)} - dx^{4(1)} = \frac{2}{\gamma_{44}} \cdot \sqrt{(\gamma_{4m}\gamma_{4n} - \gamma_{mn}\gamma_{44})dx^m dx^n} \quad (11)$$

et le laps de temps propre :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{\gamma_{44}} dx^4 \quad (12)$$

De (9), (11) et (12) il s'ensuit :

$$dl^2 = \left(\gamma_{mn} - \frac{\gamma_{4m}\gamma_{4n}}{\gamma_{44}} \right) dx^m dx^n \quad (13)$$

ce qui implique l'identification (6).

Le procédé habituel qui conduit à identifier la métrique spatio-temporelle dans la théorie de Kaluza-Klein avec le deuxième membre de la (8), que nous reportons pour information, est, au contraire, le suivant*³ La liaison de Kaluza est considérée comme l'affirmation de l'existence d'un champ de vecteurs de Killing, régulier et globalement défini, $\bar{K}$, c'est-à-dire un champ tel que :

$$\mathcal{L}_{\bar{K}} \mathbf{G} = 0 \quad (14)$$

sur la variété toute entière. Le champ est, en outre, considéré du genre espace ($\mathbf{G}(\bar{K}, \bar{K}) > 0$) et complet. Les courbes intégrales de $\bar{K}$ sont appelées

³Celle qui suit reproduit l'exposition de C. Orzalesi [6].

$\overline{K}$ -lignes. On suppose qu'elles sont fermées (condition cylindrique). La variété spatio-temporelle M_4 est définie comme l'ensemble des $\overline{K}$ -lignes. M_4 est, par conséquent, le quotient de M_5 (la variété à 5 dimensions) pour la relation d'équivalence : $p \sim q$ si p et q appartiennent à la même $\overline{K}$ -ligne ; et on peut définir l'application (projection) :

$$\pi : M_5 \rightarrow M_4 \quad (15)$$

pour laquelle :

$$\pi(p) \text{ est la } K\text{-ligne par } p.$$

On peut démontrer que, sous les hypothèses avancées, π est une application différentiable de rang 4. Un vecteur de l'espace tangent en p à M_5 , $T|_p$, est dit vertical s'il est tangent à la $\overline{K}$ -ligne par p , tandis qu'il est dit horizontal s'il est orthogonal à $\overline{K}$ selon la métrique $\mathbf{G}$. Le fait que $\mathbf{G}$ est non dégénéré garantit une décomposition unique de chaque vecteur en p dans ses composantes horizontale et verticale. Du fait que π est de rang 4, il s'en suit qu'un vecteur non nul en p a une projection nulle (selon π_*) si et seulement si est vertical ; donc, deux vecteurs en p ont la même projection si et seulement si leur différence est verticale. Il y a une infinité de vecteurs en p qui projectent sur un vecteur donné $\overline{X}$ en $x = \pi(p)$, mais un seul parmi eux, $\widehat{X}$, est horizontal ; il est appelé soulèvement horizontal de $\overline{X}$ de x à p . La notion de soulèvement horizontal s'étend aux champs de vecteurs. Un champ de vecteurs horizontaux $\widehat{X}$ sur M_5 est le soulèvement horizontal d'un champ de vecteurs $\overline{X}$ sur M_4 si et seulement si $[\widehat{X}, \overline{K}] = 0$.

Un champ de vecteurs $\overline{Y}$ sur M_5 , non nécessairement horizontal, mais tel que $\mathcal{L}_{\overline{K}}\overline{Y} = 0$, est appelé projectable car, dans ce cas, il possède une projection univoque sur M_4 .

Si $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont des soulèvements horizontaux, la composante de métrique $\mathbf{G}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ est invariante sous les translations verticales générées par $\overline{K}$; on a, en effet :

$$\overline{K}[\mathbf{G}(\widehat{X}, \widehat{Y})] = \mathbf{G}(\mathcal{L}_{\overline{K}}\widehat{X}, \widehat{Y}) + \mathbf{G}(\widehat{X}, \mathcal{L}_{\overline{K}}\widehat{Y}) \quad (16)$$

et le deuxième membre s'annule parce que $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont projectables. C'est cela, en définitive, qui permet de définir une métrique sur M_4 , moyennant la

$$\gamma(\overline{X}, \overline{Y}) = \mathbf{G}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad (17)$$

En particulier, pour les champs ∂_μ et $\hat{\partial}_\mu$, nous avons : la différence $\hat{\partial}_{\mu|p} - \partial_{\mu|p}$ est verticale, c'est-à-dire :

$$\hat{\partial}_\mu = \partial_\mu - a_\mu \overline{K} \quad (18)$$

Par définition, $\hat{\partial}_\mu$ est horizontal ; donc :

$$0 = \mathbf{G}(\hat{\partial}_\mu, \bar{K}) = \mathbf{G}(\partial_\mu, \partial_5) - a_\mu \mathbf{G}(\partial_5, \partial_5)$$

c'est-à-dire :

$$G_{\mu 5} = a_\mu G_{55} \quad (19)$$

Donc :

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \mathbf{G}(\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu) = G_{\mu\nu} - \frac{G_{5\mu} G_{5\nu}}{G_{55}}$$

c'est-à-dire la (8).

Une exposition similaire est possible dans le cas des métriques stationnaires dans la théorie de la gravitation à 4 dimensions. Dans les textes plus modernes en effet (voir, par exemple, Wald [7]), un espace-temps est dit stationnaire s'il existe un groupe à un paramètre d'isométries, ϕ_t , dont les orbites sont des courbes du genre temps. Ce groupe d'isométries exprime l'invariance de la théorie stationnaire pour les translations dans le temps. De façon équivalente, un espace-temps stationnaire est un espace-temps qui possède un vecteur de Killing ξ du genre temps (dans le cas de la théorie de Kaluza-Klein, il est, nous le rappelons, du genre espace), tel que $\mathcal{L}_\xi \gamma = 0$. Cela donne lieu à une structure de fibré (voir, par exemple, Samuel et Iyer [1]) dans laquelle la projection de la métrique spatiale selon la (6) peut être discutée selon les lignes tracées ci-dessus pour le cas pentadimensionnel.

D'autre part, au contraire, pour le cas à cinq dimensions, il ne subsiste aucune extension immédiate de la méthode de raisonnement plus physique utilisée pour trouver la métrique spatiale dans le cas à 4 dimensions.

La rupture de la covariance générale de la théorie à 4 et à 5 dimensions produite par les liaisons de stationnarité et de Kaluza laisse toutefois les symétries résiduelles sous les transformations (1) et (2). Dans le cas à 4 dimensions, le tenseur métrique se décompose de façon naturelle en tenseurs irréductibles sous la (1, a). Plus précisément les composantes purement spatiales, g_{mn} (Eq. (6)), forment un tenseur de deuxième ordre, les quantités γ_{4l}/γ_{44} forment un vecteur, tandis que γ_{44} est un scalaire.

De façon analogue, dans le cas à cinq dimensions, les composantes spatio-temporelles $\gamma_{\mu\nu}$ (Eq. (8)), les quantités mixtes $G_{5\lambda}/G_{55}$, et la composante G_{55} se transforment comme un tenseur de deuxième ordre, un vecteur et un scalaire sous la (2, a).

Les parties tensorielle et scalaire de la métrique dans les deux cas résultent invariantes respectivement sous les (1, b) et (2, b).

Comme on sait, dans la théorie de Kaluza-Klein, on prend (liaison de Klein) comme constante la composante G_{55} et on identifie, à part une constante de proportionnalité, les composantes $G_{5\lambda}$ avec celles du quadripotential électromagnétique :

$$G_{5\mu} = \beta A_\mu \quad (20)$$

Avec $G_{55} = 1$, les composantes spatiales de la métrique, (Eq. (18)), peuvent être à nouveau écrites de la façon suivante :

$$\gamma_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \beta^2 A_\mu A_\nu \quad (21)$$

(A noter que a_μ résulte immédiatement réinterprété dans la (18)).

On contrôle immédiatement que A_μ -qui est un quadrivecteur covariant sous les transformations générales de coordonnées spatio-temporelles (2, a)-, se transforme, sous la (2, b), selon

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi(x^\nu) \quad (22)$$

La (22) est lue comme une transformation de jauge. Le tenseur hémisymétrique jauge-invariante

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad (23)$$

représente le champ électromagnétique. Il satisfait automatiquement aux équations de Maxwell homogènes (identité de Bianchi).

L'analogie recherchée suggère d'analyser séparément, dans le cas de la théorie gravitationnelle pour champs stationnaires, le rôle des quantités :

$$\frac{\gamma_{4l}}{\gamma_{44}} = \alpha_l \quad (24)$$

Les α_l sont les composantes covariantes d'un trivecteur $\vec{\alpha}$ sous les transformations générales de l'espace tridimensionnel en soi-même (1, a), tandis que, sous les (1, b), elles se transforment selon :

$$\alpha_l \rightarrow \alpha'_l = \alpha_l + \partial_l \phi(x^k) \quad (25)$$

Les (25) ont la forme de transformation de jauge pour le potentiel vecteur $\vec{\alpha}$ ⁴

⁴Samuel et Iyer [1] suggèrent de se référer à elles comme à des "transformations de jauge" entre guillemets.

En analogie avec le cas électromagnétique, on peut introduire un tenseur de champ (cette fois-ci dans l'espace tridimensionnel), moyennant

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \quad (26)$$

(Les indices tridimensionnels sont abaissés et élevés moyennant la métrique $\mathbf{g}$ et son inverse) ; $\mathcal{F}$ est "jauge invariante" et satisfait automatiquement les équations "de Maxwell" homogènes :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathcal{F}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{F}_{ki}}{\partial x^j} = 0 \quad (27)$$

On peut ensuite construire le vecteur dual $\vec{\beta}$ (réf. [5], p. 31) de $\mathcal{F}_{ij}$, de composantes :

$$\beta^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{kij} \mathcal{F}_{ij} \quad (28)$$

Nous pouvons identifier :

$$\vec{\beta} = \text{rot } \vec{\alpha} \quad (29)$$

(dans le sens généralement covariante).

$\vec{\beta}$ est donc une sorte de champ gravimagnétique.⁵ Un champ gravimagnétique proprement dit se présente de façon naturelle, bien entendu, dans une tentative de formulation d'une théorie de la gravitation en analogie avec celle de Maxwell de l'électromagnétisme. Une telle théorie fut d'abord proposée par Heaviside [8], et elle a suscité ensuite une certaine attention. Elle peut être considérée parmi les tentatives de formuler une théorie de champ de la gravitation (voir le livre de Rosevaere [9]). Une analyse critique récente a été faite par Cattani [10]. Il s'agit évidemment de quelque chose de bien différent de ce qui est discuté ici : ici, en effet, ce n'est pas la nature de la théorie de la gravitation comme théorie exprimée en termes d'un tenseur symétrique de deuxième ordre dans l'espace-temps à quatre dimensions qui est en jeu, mais simplement sa réduction formelle à théorie tensorielle + vectorielle + scalaire dans l'espace tridimensionnel dans le cas stationnaire. La théorie de Heaviside est exprimée en termes d'un tenseur hémisymétrique du deuxième ordre et elle n'est pas, bien entendu, limitée au cas stationnaire. Elle conduit, comme discuté par Cattani, à des résultats numériquement différents de ceux de la relativité générale pour l'irradiation des ondes de gravitation et pour l'effet Lense-Thirring.

⁵L'analogie entre le champ $\vec{\beta}$ et le champ magnétique est exploitée par Samuel et Iyer [1] pour discuter l'existence et les propriétés d'un analogue gravitationnel du monopole magnétique. Se reporter à leur article pour l'analyse de ce point.

Si $\mathcal{F}$, ou son vecteur dual $\vec{\beta}$ s'annulent, le potentiel vecteur $\vec{\alpha}$ peut être annulé par une "transformation de jauge" (25). Cela correspond, selon la (24), à l'annulation des termes "rectangulaires" spatio-temporels (en d'autres termes, le vecteur de Killing est orthogonal à la surface space-like $t = \text{const.}$). Nous sommes donc dans le cas d'une métrique statique.

Il est curieux de remarquer, dans l'analogie que nous sommes en train d'illustrer, que la staticité, dans le cas de la théorie de la gravitation, correspond à l'absence de champ électromagnétique dans le cas de la théorie de Kaluza-Klein. C'est celle-ci, en effet, qui permet l'annulation du quadripotential moyennant une transformation de jauge (22), ce qui, à son tour, correspond à l'annulation, selon la (20), des composantes de métrique entre espace-temps et cinquième dimension.

Pour conclure, nous voudrions maintenant démontrer, comment, dans notre analogie, la force de Lorentz et la "force de Coriolis" déterminées par $\vec{\beta}$ se correspondent entre elles.

Dans la théorie de Kaluza-Klein avec liaison de Klein ($G_{55} = \text{constante}$), une classe d'équivalence de géodésiques de la variété à cinq dimensions se projette dans les lignes d'univers des particules chargées en 4 dimensions si la cinquième composante de l'impulsion est identifiée (à part la constante $\sqrt{2k}$ de la théorie de la gravitation) avec la charge électrique. Plus précisément, dans un système localement inertiel et en coordonnées localement géodésiques, si l'on indique par m_0 et q la masse et la charge d'une particule, et par U^μ les composantes de quadrivitesse, on obtient à nouveau, comme équation qui détermine la ligne d'univers de la particule :

$$m_0 \frac{dU_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} U^\nu \quad (30)$$

Comme équivalent de cette équation, nous devons chercher la forme des équations paramétriques du mouvement (pour les composantes spatiales) dans le cas gravitationnel stationnaire. Mieux encore, nous devons trouver à quelles équations paramétriques du mouvement conduisent les équations des géodésiques dans ce cas. Ce problème est traité, par exemple, en réf. [5], page 333). Pour les composantes f_i de la force (deuxième membre de l'équation qui correspond à la (30)), pour $\gamma_{44} = \text{constante}$ (condition qui correspond à $G_{55} = \text{constante}$ —), on trouve l'expression :

$$f_i = \frac{m_0 c \sqrt{\gamma_{44}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathcal{F}_{ij} v^j \quad (31)$$

c'est-à dire avec notation vectorielle:

$$\vec{f} = \frac{m_0 c^2 \sqrt{\gamma_{44}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\beta} \quad (32)$$

En effet, pour la (28), nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\beta} \right]_i &= \epsilon_{ijk} \frac{v^j}{c} \beta^k = \epsilon_{ijk} \frac{v^j}{c} \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{kmn} \mathcal{F}_{mn} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jm} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{v^j}{c} \mathcal{F}_{mn} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{ij} - \mathcal{F}_{ji}) \frac{v^j}{c} = \mathcal{F}_{ij} \frac{v^j}{c} \end{aligned}$$

Le terme de force (32) est analogue à la force de Coriolis qui serait engendrée (en l'absence de champ) dans un système de coordonnées tournant avec la vitesse angulaire.

$$\vec{\Omega} = \frac{c}{2} \sqrt{\gamma_{44}} \vec{\beta} \quad (33)$$

Il ne s'agit donc pas d'une force de Coriolis dans le sens étroit. Le calcul de la "force de Coriolis" due au champ gravimagnétique de Heaviside rapportée à la vraie force de Coriolis due à la rotation terrestre a été fait, par exemple, par Cattani [10] : l'accélération est 10^{11} fois plus petite (le résultat diffère seulement pour un facteur 4 par rapport au calcul effectué dans la théorie einsteinienne).

3. Histoire : l'identification de la métrique spatio-temporelle correcte dans la théorie à cinq dimensions

La tentative de réunification de la gravitation et de l'électromagnétisme dans le cadre d'une théorie à cinq dimensions a été effectuée pour la première fois par Kaluza, dans un article publié en 1921. Cet article contient presque tous les points essentiels de ce que nous sommes habitués à appeler une théorie de Kaluza-Klein (abstraction faite des aspects quantiques), c'est-à-dire les équations de champ de la théorie de Einstein-Maxwell (plus une équation scalaire pour la 15ème composante de la métrique), les lignes d'univers des particules chargées qui dérivent de géodésiques en cinq dimensions, l'interprétation de la charge électrique comme la cinquième composante de l'impulsion ("...une unification ultérieure d'idées fondamentales qui, autrement seraient hétérogènes..."), et la conservation de la charge le long des lignes d'univers comme théorème.

Du point de vue formel, toutefois, la formulation de Kaluza n'était pas encore ce qu'est pour nous la formulation standard.

D'une part il n'introduisit pas ce que nous avons appelé la liaison de Klein ($\partial_M G_{55} = 0$, dans le langage des coordonnées), mais simplement la condition $\partial_5 G_{MN} = 0$ (liaison de Kaluza), qu'il appelle la "condition cylindrique". La raison du terme est suffisamment claire et il ne doit pas faire penser à $\bar{K}$ -lignes fermées homéomorphes à S^1 ; cette condition fut introduite par Klein cinq ans après dans une brève note sur *Nature* (3b), publiée après son premier article sur l'argument (3a). L'absence de la liaison de Klein cause quelques problèmes dans la projection des géodésiques dans les lignes d'univers correctes.

D'autre part -et ce point n'a pas suscité une attention particulière jusqu'à présent- Kaluza n'avait pas la métrique quadridimensionnelle correcte (voir Eq. (8), §2). Son point de départ, en effet, ne fut pas au niveau de métrique, mais de connexions et, plus précisément, il se basa sur l'observation que le tenseur du champ électromagnétique pouvait être un symbole de Christoffel tronqué. Et ce fut justement parce que, dans un univers quadridimensionnel, ces symboles sont saturés par les composantes du champ de la gravitation qu'il fut amené -ce sont ses propres mots- "à l'étrange décision de recourir à une cinquième dimension de l'univers". Kaluza n'avait donc pas une recette pour la projection d'une métrique spatio-temporelle ; dans l'expression de sa pensée, simplement, "le tenseur métrique du $\mathbf{R}^5$ devient essentiellement le potentiel tenseur de la gravitation ourlé avec le quadripotential électromagnétique". La métrique spatio-temporelle de Kaluza est donc $G_{\mu\nu}$ et non $G_{\mu\nu} - G_{5\mu} G_{5\nu} / G_{55}$. Kaluza en effet, dut recourir à une approximation de champ faible pour pouvoir dériver ses équations de champ.

Lorsque, cinq ans après, O. Klein écrivit son premier article sur l'argument, dans lequel, entre autres, l'équation que nous connaissons comme équation de Klein-Gordon est obtenue comme projection d'une équation de d'Alembert, rendue covariante, dans le sens général, en 5 dimensions, ⁶ il ne connaissait pas, selon son propre témoignage, l'existence de l'article de Kaluza. Ce fut Pauli qui mit Klein au courant de l'existence de cet article et de la thèse de de Broglie, et Klein "cita les deux dans l'article qu'il écrivit avec un esprit de résignation". [14]

Dans le premier paragraphe de son article, Klein observe que, comme conséquence de l'indépendance des composantes de la métrique pentadimensionnelle de la cinquième coordonnée, les transformations de coordonnées permises

⁶Pour une analyse du contexte dans lequel cette étude de Klein fut conçue et de la signification de sa dérivation de l'équation d'onde relativiste, voir réf. [11], [12], [13].

se réduisent aux (2). Ayant noté que l'on peut facilement contrôler que G_{55} (dans ma notation) demeure inchangé sous les (2), il considère G_{55} constante. Puis il observe que les quantités (dans mes notations) :

$$d\theta = dx^5 + \frac{G_{5\nu}}{G_{55}} dx^\nu$$

et

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{G_{5\mu} G_{5\nu}}{G_{55}} \right) dx^\mu dx^\nu \quad (34)$$

sont invariantes sous les (2) et qu'elles sont liées avec l'intervalle selon les (7) et les (8). De l'invariance de $d\theta$ et G_{55} , note Klein, il s'ensuit que les quantités $G_{5\nu}$ se transforment comme les composantes covariantes d'un quadrivecteur ordinaire. Les préliminaires pour l'identification (20) sont alors posés et, par conséquent, les bases pour une lecture physique de la théorie. Ces bases sont complétées par la considération successive que la deuxième des (34) s'identifie avec le carré de l'intervalle d'espace-temps.

Il est intéressant d'observer que, à propos de l'invariance des (34), Klein renvoie, avec une note, à un article de H.A. Kramers de 1922, "dans lequel on donne un développement réminiscent des considérations qui suivent (c'est-à-dire: qui dérivent immédiatement de l'invariance des (34)) avec une simple preuve de l'invariance ..."

A commencer par le titre, le travail de Kramers révèle que le fil idéal qui le relie à celui de Klein est justement celui de l'analogie formelle que j'ai discutée ici. Le travail est, en effet, "On the application of Einstein's theory of gravitation to a stationary field of gravitation to a stationary field of gravitation". Et commence en observant que la transformation plus générale des coordonnées pour laquelle les composantes de la métrique demeurent indépendantes du temps est donnée par les (1). Viennent ensuite, justement, les considérations relatives à l'invariance des expressions (dans ma notation) :

$$\frac{(\gamma_{4l} dx^l)^2}{\gamma_{44}}$$

et

$$\left(\gamma_{mn} - \frac{\gamma_{4m} \gamma_{4n}}{\gamma_{44}} \right) dx^m dx^n$$

et l'observation que les quantités γ_{4l}/γ_{44} possèdent le caractère d'un vecteur. La discussion des propriétés de ce champ chez Kramers contient déjà les éléments que j'ai développés, comme complément, dans ma notation, au paragraphe 2.

Devons-nous donc conclure que la détermination de la métrique spatio-temporelle correcte dans les théories à cinq dimensions eut lieu, du point de vue historique, parce que Klein sut cueillir l'analogie formelle entre théorie ordinaire de la gravitation pour champs stationnaires et théorie à cinq dimensions avec la liaison de Kaluza et exploiter l'analyse de Kramers ? On serait tentés de le croire sur la base de ce qui a été discuté jusqu'ici et compte tenu du fait que la détermination des invariants (34) ne se présente pas, après tout, de façon aussi spontanée, et que le choix de la deuxième des (34) comme élément de ligne dans l'espace-temps est arbitraire.

Mais les choses sont probablement un peu plus compliquées. Nous observons d'abord que, d'un point de vue purement logique, la détermination des (2) et des invariants ne requiert pas le recours au cas analogue stationnaire, même s'il le reproduit.

Du point de vue historique, un compte-rendu sur la relation existant entre l'exposé de Klein et celui de Kramers est reporté par Kragh [12] dans les termes suivants : "Hendrik Kramers ... had written a paper about static gravitational fields back in 1922. He gave a copy to Klein who at that time hardly knew anything about general relativity and accordingly did not understand it. Later, when Klein prepared his paper for publication, Kramers pointed out that his old paper contained ideas which had some similarity to those developed by Klein. Although Klein had made no use at all of Kramers's paper, he was persuaded by Bohr and Kramers to quote it in his article ...".

Ce compte-rendu complique assez le cadre et, même s'il n'est peut-être pas conclusif sur ce point spécifique, il semble exclure une influence directe du travail de Kramers, même à propos du thème que nous sommes en train de discuter.

C'est pour cette raison que, tout d'abord, nous nous sommes limités à parler de "fil idéal" qui relie le travail de Kramers à celui de Klein.

Mais, peut-être, le physicien qui s'adresse à l'histoire de la physique est-il plus intéressé par ces fils idéaux que par la documentation d'influences spécifiques.

Références

- [1] J. Samuel and B.R. Iyer, *A gravitational analog of the Dirac monopole*, Roman Research Institute, Bangalore (1986), preprint.
- [2] T. Kaluza, *Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss.*, p. 966, 1921.
- [3] a) O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926) b) O. Klein, *Nature* **118**, 516 (1926)
- [4] W. Rindler, *Essential Relativity*, Springer, 1969.

- [5] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Editions MIR, 1970.
- [6] C. Orzalesi, *Multidimensional Unified Theories*, Lecture Notes, a.a. 1983-84, Università di Bologna, unpublished.
- [7] R.M. Wald, *General Relativity*, Univ. Of Chicago Press, 1984.
- [8] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, London, 1893.
- [9] N.T. Rosevaere, *Mercury's perihelion from Le Verrier to Einstein*, Clarendon Press, 1982
- [10] D. Cattani, N.C. **60B**, 67, 1980.
- [11] B. Carazza, G.P. Guidetti, Arch. for History of Exact Sciences, **22**, 373 (1980).
- [12] H. Kragh, Am. J. Phys. **52**, 1024 (1984).
- [13] S. Bergia, G. D'Angelo, V. Monzoni, *Waves in five dimensions and quantum physics in O. Klein's paper of 1926*, in : Proceedings of the "Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity", R. Ruffini ed., Elsevier Science Publishers, 1986.
- [14] O. Klein, *From My Life of Physics*, in : "From a life of physics", Evening lectures at the Int. Centre for Theor. Phys. IAEA, Vienne, 1969.
- [15] H.A. Kramers, Proc. Amsterdam **223**, 1052, 1922.

(Manuscrit reçu le 21 juillet 1986)