Sur la Mécanique stochastique de Schrödinger

A. Blaquière, A. Benchettah, A. Ramdani, M. Slim

Laboratoire d'automatique théorique, Tour 14,
Université de Paris VII,
2, place Jussieu
75005, Paris

Dédié à Francis Fer

RESUME. L'objet de cet article est d'approfondir l'étude d'une classe de problèmes, dans le cadre de la théorie de la commande stochastique, qui fournit un modèle non-classique pour rendre compte du mouvement d'une particule quantique non relativiste sans spin. La méthode suivie, présentée dans une publication antérieure [2], se rattache à celle exposée par Schrödinger en 1932 dans un article cité en référence [3]. On obtient par cette voie les équations (J) et (C) de Louis de Broglie, sans hypothèse sur la forme du potentiel quantique.

1. Introduction

La théorie mathématique de la commande des systèmes dynamiques stochastiques a conduit à réexaminer sous un jour nouveau, à partir des années 60, les concepts de base de la Mécanique quantique [1]. Cette méthode s'est montrée féconde par la variété des points de vue sous lesquels elle a permis d'aborder les problèmes et par la clarté qu'elle a introduite dans la compréhension de mécanismes présentés auparavant sous une forme assez désordonnée et empirique. Dans cet article nous nous intéresserons à un type de problèmes rentrant dans ce cadre, présenté et partiellement étudié dans une publication antérieure [2] qui parait avoir eu peu d'échos. Nous en complèterons la discussion en nous limitant encore à des hypothèses simples qu'il est facile de généraliser. La question a été reprise récemment par J.C. Zambrini [6] qui n'a pas eu connaissance de nos travaux mais s'appuie sur une publication de Schrödinger de 1932 [3], apparemment tombée dans l'oubli, où ce type de problème était abordé. Ces différents travaux ouvrent la voie à l'étude d'une classe de problèmes qui parait très riche. Nous conviendrons de les rassembler sous le nom de Mécanique stochastique de Schrödinger. L'originalité de la présente étude est de montrer comment on peut retrouver par cette voie les équations (J) et (C) de Louis de Broglie et, par conséquent, donner une description du mouvement d'une particule quantique sans introduire une fonction d'onde dont la signification reste très obscure après environ 60 ans de Mécanique quantique.

2. Trois problèmes de commande optimale stochastique

2.1. Problème 1.

Dans l'espace euclidien E de dimension 3, un point se déplace aléatoirement au cours du temps, sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$. Pour une *fonction de commande* donnée $v(.) : E \times [t_0, t_1] \to R^3$, dans une classe convenable, et une position initiale donnée $\xi_i \in E$ au temps $t_i \in [t_0, t_1)$, sa *trajectoire* est

$$\{\xi(t) : t \in [t_i, t_1]\}$$

où $\xi(.) : [t_i, t_1] \to E$ est le processus stochastique tel que pour tout $t \in [t_i, t_1]$

$$\xi(t) = \xi^i + \int_{t_i}^{t} v(\xi(s), s)\, ds + z(t) - z(t_i) \tag{1}$$

où $z(.) : [t_0, t_1] \to E$ est un processus de Wiener de générateur infinitésimal

$$\sum_{k=1}^{3} D \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \quad , \quad D = \text{constante} > 0.$$

L'énoncé du problème de commande optimale stochastique que nous avons en vue nous conduit à introduire l'*index de performance* ou *coût*

$$E\left[\int_{t_i}^{t_1} (1/2)m\big(v(\xi, (t), t)\big)^2\, dt + V_1(\xi(t_1))\right] \tag{2}$$

où m est une constante positive , où $V_1(.) : E \to R^1$ est une fonction donnée, et où l'espérance mathématique $E(.)$ est définie sur l'ensemble des trajectoires aléatoires issues de ξ_i au temps t_i.

On veut trouver une fonction de commande $v^*(.)$ pour laquelle le coût est minimum.

Moyennant des hypothèses convenables que le lecteur peut trouver dans les traités classiques [4], une condition nécessaire d'optimalité de la commande est fournie par *l'équation de la programmation dynamique stochastique*

$$(3)\ \min_v\big[(1/2)mv^2+(\partial V_f^*/\partial t)+\sum_k(\partial V_f^*/\partial \xi_k)v_k+D\sum_k(\partial^2 V_f^*/\partial \xi_k^2)\big]=$$
$$(1/2)mv^{*2}+(\partial V_f^*/\partial t)+\sum_k(\partial V_f^*/\partial \xi_k)v_k^*+D\sum_k(\partial^2 V_f^*/\partial \xi_k^2)=0 \quad .$$

$V_f^* \triangleq V_f^*(\xi,t)$ est la valeur minimale du coût pour une condition initiale arbitraire $(\xi,t)\in E\times[t_0,t_1]$. La fonction $V_f^*(.)$ doit satisfaire à la condition terminale

$$V_f^*(\xi,t_1)=V_1(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi\in E \quad .$$

Nous déduisons de (3)

$$mv^* = -\operatorname{grad} V_f^*(\xi,t) \quad ; \quad \text{et} \tag{4}$$

$$(\partial V_f^*/\partial t)-\frac{1}{2m}(\operatorname{grad} V_f^*)^2+D\nabla^2 V_f^*=0 \quad . \tag{5}$$

L'équation (5) est une *équation d'Hamilton-Jacobi* généralisée.

Posons maintenant

$$\rho_f(\xi,t)\triangleq K'\exp(-V_f^*(\xi,t)/2mD) \quad , \quad K'=\text{constante}>0 \quad . \tag{6}$$

L'équation (5) est réécrite

$$\frac{\partial\rho_f(\xi,t)}{\partial t}=-D\sum_k\frac{\partial^2\rho_f(\xi,t)}{\partial\xi_k^2}. \tag{7}$$

Nous reconnaissons l'adjointe de l'équation de la chaleur. Elle a une solution unique satisfaisant à la condition terminale

$$\rho_f(\xi,t_1)=K'\exp(-V_1(\xi)/2mD) \quad \text{pour tout} \quad \xi\in E$$

De l'équation (4) on déduit d'ailleurs

$$v_k^*(\xi,t)=\frac{2D}{\rho_f(\xi,t)}\,\frac{\partial\rho_f(\xi,t)}{\partial\xi_k} \quad , \quad k=1,2,3. \tag{8}$$

Pour $(\xi, t) \in E \times [t_0, t_1)$, $v^*(\xi, t)$ est le "*drift forward*" de notre processus stochastique.

2.2 Problème 2.

En second lieu considérons le mouvement aléatoire d'un point commandé, pour ainsi dire, en temps inversé. Plus précisément, pour une fonction de commande donnée $\bar{v}(.) : E \times (t_0, t_1] \to R^3$, dans une classe convenable, et une position terminale donnée $\eta_f \in E$ au temps $t_f \in (t_0, t_1]$, sa trajectoire est

$$\{\eta(t) : t \in [t_0, t_f]\}$$

où $\eta(.) : [t_0, t_f] \to E$ est le processus stochastique tel que pour tout $t \in [t_0, t_f]$

$$\eta(t) = \eta^f - \int_t^{t_f} \bar{v}(\eta(s), s)\, ds + z(t) - z(t_f). \tag{9}$$

En d'autres termes, $\bar{v}(\eta, t)$ est le drift backward du processus en (η, t) . Le coût est

$$E\left[\int_{t_0}^{t_f} (1/2)m(\bar{v}(\eta, (t), t))^2\, dt + V_0(\eta(t_0))\right] \tag{10}$$

où $V_0(.) : E \to R^1$ est une fonction donnée, et où l'espérance mathématique $E(.)$ est définie sur l'ensemble des trajectoires aléatoires se terminant en η_f au temps t_f.

On veut trouver une fonction de commande $\bar{v}^*(.)$ pour laquelle le coût est minimum.

Moyennant des hypothèses convenables, l'équation de la programmation dynamique stochastique pour ce nouveau problème est

$$\begin{aligned}(11)\min_{\bar{v}}\Big[(1/2)m\bar{v}^2 - (\partial V_b^*/\partial t) - \sum_k(\partial V_b^*/\partial \eta_k)\bar{v}_k + D\sum_k(\partial^2 V_b^*/\partial \eta_k^2)\Big] = \\ (1/2)m\bar{v}^{*2} - (\partial V_b^*/\partial t) - \sum_k(\partial V_b^*/\partial \eta_k)\bar{v}_k^* + D\sum_k(\partial^2 V_b^*/\partial \eta_k^2) = 0.\end{aligned}$$

$V_b^* \stackrel{\Delta}{=} V_b^*(\eta, t)$ est la valeur minimale du coût pour une condition terminale arbitraire $(\eta, t) \in E \times [t_0, t_1]$. La fonction $V_b^*(.)$ doit satisfaire à la condition initiale

$$V_b^*(\eta, t_0) = V_0(\eta) \quad \text{pour tout} \quad \eta \in E$$

Nous déduisons de (11)

$$m\bar{v}^* = \mathrm{grad}\, V_b^*(\eta, t) \quad ; \quad \text{et} \tag{12}$$

$$(\partial V_b^*/\partial t) + \frac{1}{2m}(\mathrm{grad}\, V_b^*)^2 - D\nabla^2 V_b^* = 0 \quad . \tag{13}$$

Posant

$$\rho_b(\eta, t) \stackrel{\Delta}{=} K'' \exp(-V_b^*(\eta, t)/2mD) \quad , \quad K'' = \text{constante} > 0 \tag{14}$$

l'équation (13) s'écrit

$$\frac{\partial \rho_b(\eta, t)}{\partial t} = D \sum_k \frac{\partial^2 \rho_b(\eta, t)}{\partial \eta_k^2}. \tag{15}$$

C'est l'équation de la chaleur. Elle a une solution unique satisfaisant à la *condition initiale* donnée au temps t_0 :

$$\rho_b(\eta, t_0) = K'' \exp(-V_0(\eta)/2mD) \quad \text{pour tout} \quad \eta \in E$$

De (12) et (14) on déduit d'ailleurs

$$\bar{v}_k^*(\eta, t) = -\frac{2D}{\rho_b(\eta, t)} \frac{\partial \rho_b(\eta, t)}{\partial \eta_k} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad . \tag{16}$$

2.3. Problème 3.

Dans les problèmes 1 et 2 nous avons défini deux classes de trajectoires aléatoires. Nous nous intéresserons ici à leur intersection, c'est-à-dire à la classe dont les membres appartiennent à la fois aux deux classes précédentes.

Une trajectoire de la classe considérée ici

$$\{\zeta(t) : t \in [t_0, t_1]\}$$

doit être telle que la fonction $\zeta(.) : [t_0, t_1] \to E$ soit solution à la fois des deux équations différentielles stochastiques

$$d\zeta(t) = v^*(\zeta(t), t)\, dt + dz(t) \quad ; \text{et} \tag{17}$$

$$d_*\zeta(t) = \bar{v}^*(\zeta(t), t)\, d_*t + d_*z(t) \tag{18}$$

avec la condition que, pour ce qui concerne l'équation (17) l'intégration est effectuée pour t croissant de t_0 à t_1, alors que pour ce qui concerne l'équation (18) l'intégration est effectuée pour t décroissant de t_1 à t_0. En d'autres termes, $v^*(.) : E \times [t_0, t_1) \to R^3$ et $\bar{v}^*(.) : E \times (t_0, t_1] \to R^3$ sont les fonctions (c'est-à-dire les champs de vecteurs) drift forward et drift backward, respectivement, du processus considéré.

Posant
$$\frac{1}{2}(V_b^* - V_f^*) = V \quad , \quad \frac{1}{2}(V_b^* + V_f^*) = W \quad ,$$
$$\frac{1}{2}(\bar{v} + v) = u \quad , \quad \frac{1}{2}(\bar{v} - v) = w \quad ,$$

nous déduisons des équations (5) et (13), par addition et par soustraction, la paire d'équations suivantes

$$(\partial V/\partial t) + \frac{1}{2m}(\operatorname{grad} V)^2 + \frac{1}{2m}(\operatorname{grad} W)^2 - D\nabla^2 W = 0\,, \tag{19}$$

$$(\partial W/\partial t) + \frac{1}{m}\operatorname{grad} V \operatorname{grad} W - D\nabla^2 V = 0\,, \tag{20}$$

avec $V \triangleq V(\eta, t)$ et $W \triangleq W(\eta, t)$; et d'autre part nous déduisons de (4) et (12)

$$mu^* = \operatorname{grad} V \quad , \quad mw^* = \operatorname{grad} W\,. \tag{21}$$

De plus posons

$$\rho^c(\zeta, t) \triangleq \rho_b(\zeta, t)\rho_f(\zeta, t) = K'K'' \exp(-W(\zeta, t)/mD) \tag{22}$$

pour tout $(\zeta, t) \in E \times [t_0, t_1]$. Il est aisé de vérifier que la fonction $\rho^c(.) : E \times [t_0, t_1] \to R_+$ satisfait à l'équation de continuité hydrodynamique

$$\frac{\partial \rho^c}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho^c u^*) \quad , \quad u^* \triangleq u^*(\zeta, t) \quad ; \tag{23}$$

qu'elle satisfait d'autre part à l'équation de Fokker-Planck forward

$$\frac{\partial \rho^c}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho^c v^*) + D\nabla^2 \rho^c \quad , \quad v^* \triangleq v^*(\zeta, t) \quad , \tag{24}$$

ainsi qu'à l'équation de Fokker-Planck backward

$$\frac{\partial \rho^c}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho^c \bar{v}^*) - D\nabla^2 \rho^c \quad , \quad \bar{v}^* \triangleq \bar{v}^*(\zeta, t) \quad , \tag{25}$$

avec $\rho^c \stackrel{\Delta}{=} \rho^c(\zeta, t)$, $(\zeta, t) \in E \times [t_0, t_1]$.

Evidemment, la fonction $\rho^c(.)$ satisfait à la fois aux conditions initiale et terminale

$$\rho^c(\zeta, t_0) = \rho_b(\zeta, t_0)\rho_f(\zeta, t_0) = K'K'' \exp[-(V_0(\zeta) + V_f^*(\zeta, t_0))/2mD]$$

$$\rho^c(\zeta, t_1) = \rho_b(\zeta, t_1)\rho_f(\zeta, t_1) = K'K'' \exp[-(V_b^*(\zeta, t_1) + V_1(\zeta))/2mD]$$

pour tout $\zeta \in E$.

3. Mécanique stochastique de Schrödinger.

Le lecteur aura sans doute été frappé par la similitude [1] entre le couple d'équations (19) (20) que nous venons d'obtenir et le couple d'équations de la Mécanique ondulatoire connues sous le nom d'*équations* (J) et (C) de Louis de Broglie [5]. Nous avons quelque peu discuté ce point dans une publication antérieure [2] qui parait avoir eu peu d'échos. Il nous a néanmoins paru digne d'être approfondi. La question a été reprise récemment par J.C. Zambrini [6] qui n'a pas eu connaissance de nos travaux mais s'appuie sur une publication de Schrödinger de 1932, apparemment tombée dans l'oubli, où ce type de problème était abordé. Ces différents travaux ouvrent la voie à l'étude d'une classe de problèmes qui parait très riche. Nous conviendrons avec Zambrini de les rassembler sous le nom de Mécanique stochastique de Schrödinger.

4. Autre approche du Problème 3.

Au lieu de traiter séparément les problèmes 1 et 2 pour aboutir au problème 3, nous partirons d'un autre point de vue en considérant deux points ξ et η se déplaçant aléatoirement dans E au cours du temps, sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$. Cela revient à augmenter la dimension de l'espace, c'est à dire à considérer le mouvement aléatoire du point (ξ, η) dans $E \times E$. Nous supposerons que la fonction densité de probabilité de position

$$\sigma(.) : \begin{cases} E \times E \times [t_0, t_1] \to R_+ \\ (\xi, \eta, t) \to \sigma(\xi, \eta, t) \end{cases}$$

est définie et de classe $C^{2,2,1}$, et que le mouvement aléatoire du couple $(\xi, \eta) \in E \times E$ est commandé par un couple de fonctions de commande

$$(v^1(.), v^2(.)) : \begin{cases} E \times E \times [t_0, t_1] \to R^3 \times R^3 \\ (\xi, \eta, t) \to (v^1(\xi, \eta, t), v^2(\xi, \eta, t)) \end{cases}$$

[1] Notons qu'à ce stade il ne s'agit que d'une similitude et non d'une identité. Nous verrons plus loin sous quelles hypothèses on peut obtenir les équations (J) et (C) de Louis de Broglie.

de classe $C^{1,1,0}$, les équations d'évolution étant les équations différentielles stochastiques

$$d\xi(t) = v^1(\xi(t),\eta(t),t)dt + dz^1(t) \quad d\eta(t) = v^2(\xi(t),\eta(t),t)dt + dz^2(t)$$

où $z^1(.) : [t_0, t_1] \to E$ et $z^2(.) : [t_0, t_1] \to E$ sont des processus de Wiener de générateurs infinitésimaux

$$\sum_{k=1}^{3} D \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \mathrm{D} \frac{\partial^2}{\partial \eta_{\mathrm{k}}^2}$$

respectivement.

Conformément à une relation bien connue entre le drift forward $(v^1(\xi,\eta,t), v^2(\xi,\eta,t))$, le drift backward $(\bar{v}^1(\xi,\eta,t), \bar{v}^2(\xi,\eta,t))$, et la densité de probabilité de position $\sigma(\xi,\eta,t)$, en $(\xi,\eta,t) \in E \times E \times (t_0,t_1)$, nous avons

$$\bar{v}_k^1(\xi,\eta,t) - v_k^1(\xi,\eta,t) = -\frac{2D}{\sigma(\xi,\eta,t)} \cdot \frac{\partial \sigma(\xi,\eta,t)}{\partial \xi_k} \quad , \tag{26}$$

$$\bar{v}_k^2(\xi,\eta,t) - v_k^2(\xi,\eta,t) = -\frac{2D}{\sigma(\xi,\eta,t)} \cdot \frac{\partial \sigma(\xi,\eta,t)}{\partial \eta_k} \quad , \quad k = 1,2,3 \tag{27}$$

Maintenant définissons $v^2(.)$ par la condition

$$v_k^2(\xi,\eta,t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad (\xi,\eta,t) \in E \times E \times [t_0,t_1], \tag{28}$$

et choisissons $v^1(.)$ de telle sorte que

$$\bar{v}_k^1(\xi,\eta,t) = 0 \quad \text{pout tout} \quad (\xi,\eta,t) \in E \times E \times [t_0,t_1], \quad k = 1,2,3 \tag{29}$$

Ce sont les conditions que nous avons rencontrées dans les problèmes 2 et 1, respectivement.

Dans la suite nous remplacerons les notations $v^1(.)$ et $\bar{v}^2(.)$ par $v(.)$ et $\bar{v}(.)$, respectivement.

Compte tenu de (28) et (29), les relations (26) et (27) deviennent

$$v_k(\xi,\eta,t) \equiv \frac{2D}{\sigma(\xi,\eta,t)} \cdot \frac{\partial \sigma(\xi,\eta,t)}{\partial \xi_k} \quad ; \text{et} \tag{30}$$

$$\bar{v}_k(\xi,\eta,t) \equiv -\frac{2D}{\sigma(\xi,\eta,t)} \cdot \frac{\partial \sigma(\xi,\eta,t)}{\partial \eta_k} \quad , \quad k = 1,2,3 \quad . \tag{31}$$

De plus, supposons que l'équation de continuité de l'hydrodynamique est satisfaite. Avec nos hypothèses cette équation s'écrit

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\sum_k \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma v_k)}{\partial\xi_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma\bar{v}_k)}{\partial\eta_k}\right] \tag{32}$$

de telle sorte que, compte tenu de (30) et (31), nous avons

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -D\sum_k \frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_k^2} + D\sum_k \frac{\partial^2\sigma}{\partial\eta_k^2} \tag{33}$$

Il sera intéressant, aussi, de traduire les formules précédentes en termes des nouvelles variables

$$x \stackrel{\Delta}{\equiv} \frac{\xi+\eta}{2} \quad , \quad y \stackrel{\Delta}{\equiv} \frac{\xi-\eta}{2} \quad .$$

Pour $\xi = \xi(x,y) = x+y$ et $\eta = \eta(x,y) = x-y$, posons

$$\rho(x,y,t) \stackrel{\Delta}{\equiv} \sigma(\xi,\eta,t),$$

$$u(x,y,t) \stackrel{\Delta}{\equiv} \frac{1}{2}[\bar{v}(\xi,\eta,t) + v(\xi,\eta,t)]$$

$$w(x,y,t) \stackrel{\Delta}{\equiv} \frac{1}{2}[\bar{v}(\xi,\eta,t) - v(\xi,\eta,t)]$$

Nous déduisons alors de (30)-(33)

$$u_k(x,y,t) \equiv \frac{D}{\rho(x,y,t)}\frac{\partial\rho(x,y,t)}{\partial y_k}, \tag{34}$$

$$w_k(x,y,t) \equiv -\frac{D}{\rho(x,y,t)}\frac{\partial\rho(x,y,t)}{\partial x_k}, k=1,2,3 \tag{35}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sum_k \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho w_k)}{\partial y_k}\right]; \tag{36}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -D\sum_k \frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial y_k} \tag{37}$$

Notons que, compte tenu de (34) et (35), (36) s'écrit aussi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sum_k \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial y_k} \tag{38}$$

Maintenant, si nous posons

$$\rho(x,y,t) = K\exp(-\mathcal{W}(x,y,t)/mD), \quad K = \text{constante} > 0$$

les formules (34), (35) et (37) sont transformées en

$$mu_k(x,y,t) \equiv -\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k}; \tag{40}$$

$$mw_k(x,y,t) \equiv \frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}; \quad k=1,2,3 \tag{41}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial t} - \frac{1}{m}\sum_k \frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k} + D\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k \partial y_k} = 0 \tag{42}$$

respectivement.

On vérifie facilement que, en termes des variables ξ et η, les relations (40)-(42) s'écrivent

$$\frac{1}{2}mv_k(\xi,\eta,t) \equiv -\frac{\partial \tilde{W}(\xi,\eta,t)}{\partial \xi_k}; \tag{40'}$$

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_k(\xi,\eta,t) \equiv \frac{\partial \tilde{W}(\xi,\eta,t)}{\partial \eta_k}; \quad k=1,2,3 \quad ; \tag{41'}$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} - \frac{1}{m}\sum_k\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi_k}\right)^2 + \frac{1}{m}\sum_k\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta_k}\right)^2 + D\sum_k \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi_k^2} - D\sum_k \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \eta_k^2} = 0, \tag{42}$$

avec

$$\tilde{W} = \tilde{W}(\xi,\eta,t) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{W}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),t) \quad .$$

Si les trajectoires aléatoires des points ξ et η sont celles des problèmes 1 et 2, commandées par $v^*(.)$ et $\bar{v}^*.)$, avec les fonctions densité de probabilité de position correspondantes $\rho_f(.)$ et $\rho_b(.)$, respectivement, alors

$$\rho(x,y,t) = \rho_f(x+y,t)\rho_b(x-y,t),$$

car de telles trajectoires sont statistiquement indépendantes. Il s'ensuit que

$$\mathcal{W}(x,y,t) = \frac{1}{2}[V_f^*(x+y,t) + V_b^*(x-y,t)],$$

de sorte que la fonction $\mathcal{W}(.)$ est *anti-harmonique*, c'est à dire que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k^2} = 0, \quad k = 1,2,3$$

Si d'autre part, nous posons

$$\mathcal{V}(x,y,t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}[V_b^*(x-y,t) - V_f^*(x+y,t)],$$

nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k}; \quad et \tag{43}$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial y_k} = -\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}; \quad , \quad k = 1,2,3 \quad . \tag{44}$$

La fonction $\mathcal{V}(.)$ est aussi anti-harmonique.

La relation (42) devient donc

$$\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_k \frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k} - D\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k^2} = 0. \tag{45}$$

En dérivant la relation (45) par rapport à y_j, puis par rapport à x_j, pour j=1,2,3, et en tenant compte de (43) et (44), on obtient

$$\begin{aligned}(46) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2m}\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}\right)^2 \\ - D\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k^2} = \phi(t)\end{aligned}$$

où $\phi(t)$, qui dépend seulement de t, peut être posé identique à zéro à condition de modifier légèrement la définition de la fonction $\mathcal{V}(.)$, c'est à dire de lui ajouter une fonction du temps convenable. On notera en effet que les conditions (43) et (44) restent inchangées si on ajoute à $V(.)$ une fonction du temps.

En fait, la méthode adoptée dans ce paragraphe a consisté à traiter simultanément les trajectoires du problème 1 et du problème 2 en considérant les couples formés par une trajectoire de chaque type. Les trajectoires du problème 3 sont caractérisées par la condition $y \equiv 0$. Les relations (45) et (46) se réduisent alors à (20) et (19), respectivement, avec

$$\mathcal{V}(x,0,t) = V(x,t) \quad ; \quad \text{et} \tag{47}$$

$$\mathcal{W}(x,0,t) = W(x,t) \tag{48}$$

Cette dernière méthode, comme nous allons le voir, présente sur celle des précédents paragraphes l'avantage de s'appliquer sans difficulté au cas de la Mécanique ondulatoire. Elle permet en particulier de retrouver les équations (J) et (C) de Louis de Broglie.

5. Cas de la mécanique quantique.

Nous nous appuierons encore sur la relation (42) en supposant valables les hypothèses qui y ont conduit, mais, à la différence du cas précédent, nous supposerons que ξ et η ne sont pas statistiquement indépendants.

Notre nouvelle hypothèse sera celle de l'existence d'une fonction $\mathcal{V}(.) : E \times E \times [t_0, t_1] \to R^1$ associée à $\mathcal{W}(.)$ de telle sorte que les conditions de Cauchy soient satisfaites, c'est à dire

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k}; \quad \text{et} \tag{49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial y_k} = \frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}; \quad , \quad k = 1,2,3 \quad . \tag{50}$$

En d'autres termes, la relation (43) reste inchangée, la relation (44) est remplacée par (50) et, de ce fait, la fonction $\mathcal{W}(.)$ (ainsi que la fonction $\mathcal{V}(.)$) est *harmonique*; c'est à dire que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial y_k^2} = 0, \quad k = 1,2,3 \quad .$$

Comme la relation (43) est encore valable, la relation (45) se déduit de (42) comme au paragraphe 4. Maintenant, en dérivant la relation (45) par rapport à y_j, puis par rapport à x_j, pour j=1,2,3, et en tenant compte de (49) et (50), on obtient

$$\text{(51)} \qquad \frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{V}(x,y,t)}{\partial x_k}\right)^2 - \frac{1}{2m}\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k}\right)^2$$
$$+D\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x,y,t)}{\partial x_k^2} = g(t)$$

à la place de la relation (46), où comme dans (46) nous poserons $g(t) \equiv 0$ en adoptant pour $\mathcal{V}(.)$ une définition convenable.

Comme au paragraphe 4, notre étude a porté sur une classe de couples de trajectoires aléatoires, chaque couple étant associé au mouvement aléatoire d'un couple (ξ, η) au cours du temps sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$. Cependant, à la différence de l'étude du paragraphe 4, cette classe ne peut pas être séparée en deux classes indépendantes de trajectoires aléatoires.

Dans notre classe de couples de trajectoires aléatoires, les couples de trajectoires "dégénérées", c'est à dire ceux pour lesquels $y \equiv 0$, présentent un intérêt particulier. Dans ce cas, les relations (45) et (51) se réduisent à (20) et

$$(\frac{\partial V}{\partial t}) + \frac{1}{2m}(\mathrm{grad}\, V)^2 - \frac{1}{2m}(\mathrm{grad}\, W)^2 + D\nabla^2 W = 0, \tag{52}$$

respectivement, où $V = V(x,t)$ et $W = W(x,t)$ sont définis par (47) et (48), respectivement.

Le point le plus important de notre étude est que les relations (20) et (52) sont maintenant les équations de la Mécanique ondulatoire que Louis de Broglie a introduites sous les noms d'équations (C) et (J), respectivement [5].

Il est bien connu que cette paire d'équations est équivalente à l'équation de Schrödinger, pour ce qui concerne le mouvement d'une particule quantique, à l'approximation non-relativiste. Ici nous avons traité le cas où la fonction potentiel est identiquement nulle (ou égale à une constante arbitraire). Il est facile d'introduire dans notre théorie une fonction potentiel quelconque.

Le fait que notre modèle conduit à l'équation de Schrödinger est une condition nécessaire pour sa validité en Physique; cependant ce n'est pas le point le plus essentiel. Ce qui est essentiel est que nous avons donné une description du mouvement d'une particule quantique sans introduire une fonction d'onde dont la signification reste très obscure après environ 60 ans de Mécanique quantique. La recherche d'un modèle plus proche de la Mécanique classique que les modèles quantiques habituels, qui a motivé notre recherche, semble aussi avoir été l'un des objectifs du papier de Schrödinger cité en référence [3].

On peut résumer notre discussion en disant que *au mouvement observable d'une particule physique dans notre espace classique à 3 dimensions est associé un ensemble de paires de trajectoires "variées"* . C'est de leur étude que nous avons déduit la loi qui régit l'évolution de la particule. Ce point de vue est très proche de celui de la Mécanique classique dans laquelle la trajectoire observable d'un point matériel est comparée à des trajectoires "variées", dans le cadre théorique des principes de stationnarité. Dans le cas classique, comme dans celui de la Mécanique quantique, les trajectoires variées ne sont pas observables (représentent-elles un artifice de calcul ?). Le fait que l'on doive introduire des *paires* de trajectoires variées, dans le cas de la Mécanique quantique, parait traduire une sorte de *polarisation* des particules physiques, ce qui introduit un degré de liberté que n'ont pas les points matériels classiques.

Références

[1] A. Blaquiere ; *System Theory : A New Approach to Wave Mechanics* Journal of Optimization Theory and Applications **32** 4 (1980).

[2] A. Blaquiere, A. Marzollo ; *Introduction à la théorie moderne de l'optimisation et à certains de ses aspects fondamentaux en physique* dans "La pensée physique contemporaine", Ed. S. Diner, D. Fargue, Editions Augustin Fresnel (1982).

[3] E. Schrödinger ; *Une analogie entre la mécanique ondulatoire et quelques problèmes de probabilités en physique classique* Annales de l'Institut Henri Poincaré (1932).

[4] S.E. Dreyfus ; *Dynamic Programming and the Calculus of Variations* Academic Press, New York, (1965).

[5] L. de Broglie ; *Une tentative d'interprétation causale et non-linéaire de la mécanique ondulatoire* Gauthier-Villars, Paris, (1956).

[6] J.C. Zambrini ; *Schrödinger's Stochastic Variational Dynamics* dans "Proceedings of the 4th International Seminar on Mathematical Theory of Dynamical Systems ans Microphysics, C.I.S.M. – Udine, Italy. Edts A. Blaquiere, S. Diner, G. Lochak, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.

[7] A. Blaquiere, A. Marzollo ; *An alternative Approach to Wave Mechanics of a particle at the Non-relativistic Approximation* dans "Proceedings of the 4^{th} International Seminar on Mathematical Theory of Dynamical Systems and Microphysics, C.I.S.M. - Udine, Italy. Edts A. Blaquiere, S. Diner, G. Lochak, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1986)