

## Quasi-particules browniennes et quasi-particules quantiques

J. FRONTEAU\* ET P. COMBIS\*\*

\*Département de Physique, Université d'Orléans,  
B.P. 6759, 45067 Orléans Cedex 2

\*\*C.E.A., Centre d'études de Limeil,  
B.P. 27 94190 Villeneuve-Saint-Georges

RESUME. Le concept de quasi-particule est utilisé, tant en Mécanique statistique qu'en Mécanique quantique, pour associer aux équations d'évolution des trajectoires différentiables sur lesquelles on concentre un maximum d'informations concernant les phénomènes étudiés. Deux cas sont traités, numériquement, celui de l'équation de Fokker-Planck avec un champ en  $x - x^3$ , et celui de l'équation de Schrödinger à potentiel nul, dans une situation d'interférence.

Ceux des physiciens qui ressentent le besoin de visualiser l'évolution du monde physique sous la forme de trajectoires de particules sont amenés à privilégier les descriptions en termes d'équations différentielles, au détriment des descriptions en termes d'équations aux dérivées partielles. Aux équations de Fokker-Planck, de Boltzmann et de Schrödinger, ils cherchent à associer des descriptions de type particulière. Ce point de vue s'oppose aussi bien à l'interprétation de Copenhague de la Mécanique Quantique qu'aux habitudes de pensée des spécialistes de la Mécanique Statistique. Il n'est pas d'usage, par exemple, d'aborder la Mécanique Statistique sous l'angle que définit la phrase suivante [1] : "Si même c'est la collectivité qui est responsable de l'évolution non conservative, cette évolution mérite d'être décrite pour chaque élément de l'ensemble".

Pour éviter d'engager une polémique philosophique concernant l'essence des choses, nous ferons ici une nette distinction entre les objets physiques proprement dits, qui seront les "particules", et les modèles particuliers que nous leur associerons, lesquels ne seront que des "quasi-particules". Notre but, dans cet article, est de présenter quelques résultats numériques récents qui mettent en évidence la parenté existant entre "quasi-particules browniennes" et "quasi-particules quantiques". Indiquons dès maintenant qu'en dehors d'une éventuelle utilité d'ordre interprétatif pour les physiciens, la notion de quasi-particule semble avoir, pour les numériciens, un certain intérêt technique d'ordre calculatoire.

Nous ne présenterons ici nos modèles que dans le cas d'une seule variable d'espace ( $x \in \mathbf{R}$ ) et pas de variable de vitesse.

## 1. Dynamique associée à une équation de diffusion

Soit  $\rho$  une densité qui est définie à l'instant  $t$  en tout point de l'axe des  $x$ , et qui satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre en  $t$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = A \left[ x, t; \rho(x, t); \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t); \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x, t) \right]. \quad (1)$$

$A$  n'est pas nécessairement linéaire, ni en  $x$ , ni en  $\rho$ . On peut aussi considérer le cas où  $A$  contient des termes intégraux (Nous pensons à l'équation de Boltzmann). Nous utiliserons ci-dessous la notation condensée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = A \quad (2)$$

Considérons alors le système suivant,

$$V = -\frac{1}{\rho} \int_x A dx \quad (3-a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (3-b)$$

$\int_x A dx$  représente une primitive de  $A$  par rapport à  $x$ . Cette étape intermédiaire nous conduit alors à associer à (1) le système ci-dessous :

$$\frac{dx}{dt} = V = -\frac{1}{\rho} \int_x A dx \quad (4-a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (4-b)$$

Il n'y a pas équivalence entre (1) et (4) puisque, pour parvenir à (3), on s'est imposé la condition de continuité (3-b), et qu'ensuite on a ajouté à (3) la relation différentielle  $dx/dt = V$ . Cette adjonction n'est pas un détail ; c'est elle qui confère au modèle son caractère particulière. En effet, intégrée pas à pas, de front avec (4-b), la relation (4-a) engendre des trajectoires différentiables. Les particules virtuelles qui suivent ces trajectoires sont ce que nous avons appelé des quasi-particules. "Quasi"-particules en ce sens que, dans le cas où (1) est l'équation de Fokker-Planck par exemple, il n'est pas question de les confondre

avec les particules browniennes elles-mêmes, dont les trajectoires sont presque partout non différentiables.

Le modèle (4), introduit en 1975 pour une équation de type Fokker-Planck [2], a été repris et développé dans divers articles de nature théorique [3],..., [9], <sup>1</sup> puis, récemment, nous l'avons utilisé en tant que nouvelle méthode d'intégration numérique des équations de Fokker-Planck [11][12]. Il entre en effet dans le cadre général [13] des méthodes numériques dites particulières, dont il constitue une variante apparemment intéressante. Des comparaisons sont en cours. Il faut en effet envisager des comparaisons avec la méthode particulière plus traditionnelle [14][15][16], et d'autres entre les diverses manières de mettre en oeuvre le présent modèle [11][12][17][18][19].

Mais revenons à notre propos initial. Nous voulons tracer des trajectoires dont le comportement -elles se rapprocheront ou s'éloigneront les unes des autres au cours du temps- constituera une justification visuelle de la variation de la densité  $\rho$ . Il n'est pas question pour nous de faire ici de l'analyse numérique. Disons seulement quelques mots pour faire comprendre comment l'intégration de (4) est possible, pas à pas, de  $t$  à  $t + \Delta t$ , quel que soit  $t$ . Supposons la fonction  $\rho$  connue à l'instant  $t$ , et supposons aussi que la quasi-particule choisie soit arrivée, à cet instant, au point  $x(t)$ . On connaît donc la valeur  $\rho(x(t), t)$  ; de même pour des trajectoires voisines. On peut alors en déduire une approximation numérique de la valeur des dérivées partielles et, du même coup, une approximation de la valeur du second membre  $V$  de (4-a). Un pas d'intégration de l'équation différentielle  $dx/dt = V$  donne alors la nouvelle position  $x(t + \Delta t)$  atteinte par la quasi-particule. Reste à calculer la valeur de la densité en cette nouvelle position, au nouvel instant  $t + \Delta t$ , à savoir  $\rho(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ . La relation (4-b) est l'équation de continuité, c'est-à-dire l'équation de conservation de la probabilité. En suivant le flot, cette loi de conservation s'écrit

$$\rho(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = \frac{\rho(x(t), t)}{J_{t, t+\Delta t}}, \tag{5}$$

où

$$J_{t, t+\Delta t} = \frac{D(x(t + \Delta t))}{D(x(t))}$$

est le Jacobien qui commande la variation temporelle de l'élément de volume, c'est-à-dire, ici, de l'élément de longueur, puisqu'on est dans  $\mathbf{R}$ . Or la valeur de ce Jacobien peut être déterminée à chaque pas (Pour plus de détails, le lecteur

---

<sup>1</sup>Notre liste de références n'est pas exhaustive. Le lecteur trouvera dans [10] des re-productions d'articles d'inspiration voisine.

pourra se reporter à deux de nos précédents articles [11][12]). Ainsi, de chaque couple  $x(t), \rho(x(t), t)$ , on est passé au couple  $x(t + \Delta t), \rho(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ . La méthode permet donc, pour une densité initiale  $\rho_0$  donnée, de déterminer de front les courbes de densité  $\rho$  à différents instants, et les trajectoires des quasi-particules associées.

Il nous reste à présenter l'exemple que nous avons choisi. Soit donc l'équation de Fokker-Planck de la Mécanique stochastique, dite encore "équation de Kolmogorov vers l'avant" [20] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho D) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho \sigma^2) \quad (6)$$

Le champ  $D(x, t)$  est de signe quelconque, mais l'on a évidemment  $\sigma^2(x, t) > 0$ . Pour faciliter la comparaison avec l'équation de Schrödinger, que nous traiterons dans la seconde partie de cet article, nous nous restreindrons au cas

$$\sigma^2 = \text{constante},$$

d'où l'équation de Fokker-Planck considérée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho D) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (7)$$

En lui appliquant la méthode (2)-(3)-(4), et en introduisant la notation

$$\bar{\omega} = \log \rho, \quad (8)$$

on obtient le modèle :

$$\frac{dx}{dt} = V = D - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \quad (9-a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (9-b)$$

Afin de permettre au lecteur de comparer nos résultats à ceux qui ont été obtenus par d'autres méthodes, qui ne sont pas de type particulière, nous avons repris, avec les mêmes valeurs numériques, un exemple qui a été publié il y a trois ans par d'autres auteurs [21], soit :

$$D(x, t) = x - x^3 \quad \sigma^2 = 10^{-6} \quad (10)$$

la densité initiale  $\rho_0$  étant une Gaussienne normalisée, centrée, de variance  $10^{-6}$ . Nos résultats sont résumés par les figures 1 et 2. Nous n'avons tracé que quatre états de la densité, l'état initial étant exclu, afin que notre figure 1 soit

immédiatement comparable à la Fig. 4 de [21]. Quant à notre figure 2, elle montre comment les trajectoires des quasi-particules engendrent <sup>2</sup> la densité  $\rho$  (en partant de  $t = 0$ ). Les spécialistes des processus stochastiques s'étonneront peut-être de voir des trajectoires aussi régulières associées à un processus de diffusion. Nous nous permettons de souligner que ces trajectoires, par construction, réalisent à tout instant  $t$ , en tout point  $x$ , la même densité  $\rho$  que le processus stochastique lui-même. Dernière remarque : il existe, en théorie des processus, une démonstration [22] de la relation

$$V = D - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \tag{11}$$

qui figure dans (9-a). Il est cependant beaucoup plus rapide, et bien suffisant ici, de s'en tenir à notre démonstration par identification, du type (2)-(3).

## 2. Cinématique et dynamique associées à l'équation de Schrödinger

Quoique, à notre connaissance, Louis de Broglie n'ait pas utilisé le terme, le concept de quasi-particule quantique est à la base de sa théorie du guidage [23]...[26]. Puisque le résultat explicite est connu depuis longtemps, nous ne reproduirons pas ici le détail du calcul qui conduit au modèle particulaire associé à l'équation de Schrödinger [27][28][25]. Nous nous contenterons de fixer nos notations et d'indiquer le résultat .  $\psi$  est la fonction d'onde. De même que nous avons posé (8), posons

$$\frac{\bar{\omega}}{2} = \Re(\log \psi) \quad , \quad \frac{\phi}{\hbar} = \Im(\log \psi), \tag{12}$$

log étant la détermination principale du logarithme. Puisque la densité de probabilité sur  $\mathbf{R}$  est  $\rho = |\psi|^2$ , la relation (8) reste valable, c'est-à-dire que :

$$\bar{\omega} = \log \rho. \tag{13}$$

Lorsqu'on la décompose en partie réelle et partie imaginaire, l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mathcal{V}\psi \quad (m \neq 0) \tag{14}$$

---

<sup>2</sup>Sur la figure 2, nous n'avons tracé que 17 trajectoires, mais, pour calculer les courbes de densité  $\rho$  de la figure 1, nous avons en fait utilisé 81 trajectoires  $x(t)$ , les conditions initiales  $x(0)$  étant réparties uniformément de -0.004 à 0.004.

s'écrit comme suit, de façon équivalente :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = -\mathcal{V} + \frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (15-a)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (15-b)$$

Il est bien connu [27][28][25] que (15-a) est une équation d'Hamilton-Jacobi et que, dès qu'on introduit le champ de vitesses  $V = \frac{1}{m} \partial \phi / \partial x$ , (15-b) devient l'équation de continuité dans  $\mathbf{R}$ , (4-b). Le modèle de quasi-particules consiste alors, comme pour l'équation de Fokker-Planck, à introduire la relation différentielle  $dx/dt = V$ , et, de plus, à traduire la dynamique (15-a) en termes d'accélération  $d^2x/dt^2$ . En résumé, nous associons à (14) le modèle suivant :

$$\frac{dx}{dt} = V = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (16-a)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (16-b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = 0 \quad (16-c)$$

Le système (16) n'est pas équivalent à (14), puisque nous avons surajouté à (15) la "formule de guidage" [25]  $V = \frac{1}{m} \partial \phi / \partial x$ , puis la relation différentielle  $dx/dt = V$ . Comme dans le cas de l'équation de Fokker-Planck, c'est cette relation différentielle qui confère au modèle son caractère particulière. Les notations que nous avons choisies donnent du "potentiel quantique",

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right]$$

qui figure dans (16-b), une expression plus compliquée que celle finalement retenue par Bohm [27][28][25], mais l'utilisation de la même fonction  $\bar{\omega}$  pour les deux équations de Schrödinger et de Fokker-Planck permet de mieux saisir les similitudes et les différences existant entre (9) et (16) :  $\bar{\omega}$  intervient dans les deux cas, mais de façon différente ; c'est  $\phi$  qui joue pour l'équation de Schrödinger le rôle que joue  $\bar{\omega}$  pour l'équation de Fokker-Planck (7). Encore un point qu'il nous paraît important de souligner : dans le cadre du modèle (16), l'équation de Schrödinger contient à la fois la cinématique (16-a) et la dynamique (16-b). Le fait qu'elle satisfasse à la contrainte de compatibilité de cette dynamique et

de cette cinématique est sans doute ce qui rend l'équation de Schrödinger aussi remarquable.

Bien que le problème se pose, nous ne chercherons pas à déduire de (16) une méthode d'intégration numérique de l'équation de Schrödinger. En effet, notre but, ici, n'est que d'illustrer par des trajectoires l'évolution temporelle de la densité  $\rho$  associée à (14). Nous choisirons une situation d'interférence. Soit l'équation de Schrödinger sans champ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{17}$$

et sa solution fondamentale [29] :

$$G(x, t, x_0) = \sqrt{\mu/i\pi} e^{i\mu(x-x_0)^2} \quad \mu = \mu(t) = \frac{m}{2\hbar t}. \tag{18}$$

On peut en déduire par intégration la solution analytique correspondant à une condition initiale gaussienne

$$\psi_{\lambda,\beta}^0(x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda(x-\beta)^2} \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad \|\psi_{\lambda,\beta}^0\|_{L^2(\mathbf{R})} = 1. \tag{19}$$

On trouve :

$$\psi_{\lambda,\beta}(x, t) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{(\mu - i\lambda)\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda\mu(\mu - i\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}(x - \beta)^2\right), \tag{20}$$

ce qui s'écrit encore :

$$(21) \quad \psi_{\lambda,\beta}(x, t) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{\mu}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{\lambda\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}(x - \beta)^2 + i\left[\frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2 + \mu^2}(x - \beta)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu}\right]\right\}.$$

Les résultats numériques présentés sur les figures 3 et 4 correspondent à la situation d'interférence définie par

$$\psi^0 = \psi_{\lambda,\beta}^0 + \psi_{\lambda,-\beta}^0 \quad ,$$

les valeurs choisies pour les paramètres étant les suivantes

$$\hbar = m = \beta = 1 \quad , \quad \lambda = 9.$$

Le calcul numérique est élémentaire : il s'agit d'intégrer pas à pas l'équation différentielle (16-a) appliquée à la fonction d'onde

$$\psi = \psi_{\lambda,\beta} + \psi_{\lambda,-\beta} \quad ,$$

laquelle est connue explicitement du fait de (21). Notons que des résultats numériques du même type ont déjà été publiés [32][33].

Il nous semble que, s'ils étaient moins empreints de l'interprétation de Copenhague, les physiciens devraient trouver agréable de constater que la figure d'interférence présentée en Fig. 3 est réalisée par les trajectoires de la Figure 4<sup>3</sup>. Quoiqu'il en soit, des résultats expérimentaux ont été récemment obtenus avec un interféromètre à neutrons [30], qui paraissent susceptibles de relancer le débat sur l'interprétation de la Mécanique quantique [31][33], et il est vraisemblable que la notion de trajectoire de quasi-particule constituera un outil utile à la discussion. Si nous avons tenu à présenter de front des exemples de quasi-particules quantiques et de quasi-particules browniennes, c'est que l'interprétation stochastique de la Mécanique quantique [22], reprise par exemple sous la forme d'une géométrie stochastique [34], a de fortes chances de servir, elle aussi, à la discussion.

Nous remercions le *Centre Interuniversitaire de Calcul de la Région Centre*, et en particulier M. M. BLANCHARD, l'un de ses membres, d'avoir mis à la disposition des utilisateurs un logiciel de traçage de courbes particulièrement maniable, ainsi que le *Centre d'Etudes de Limeil* qui, en la personne de MM. M. DECROISSETTE et M. LOUIS-JACQUET, a permis à l'un d'entre nous de consacrer une partie de son temps à l'étude du problème traité dans le présent article.

## Références

- [1] J. Fronteau ; *Vers une description non conservative de l'Evolution en physique a*) rapport interne, Université d'Orléans, (1974) b) *Hadronic J.* **2**, 727 (1979).
- [2] J. Fronteau ; *Une dynamique associée à l'équation cinétique Frey-Salmon*, C.R. Acad. Sc. Paris **A 280**, 1405 (1975).
- [3] J. Salmon ; *Une nouvelle hypothèse d'irréversibilité*, C.R. Acad. Sc. Paris **A 280**, 1559 (1975).

---

<sup>3</sup>Hormis les deux trajectoires extrêmes qui cadrent la figure, nous n'avons tracé que celles qui sortent des "fentes" représentées par les deux gaussiennes initiales, mais, pour calculer les courbes de densité  $\rho$  de la Fig. 3, nous avons en fait utilisé 121 trajectoires  $x(t)$ , les conditions initiales  $x(0)$  étant réparties uniformément de -1.5 à 1.5.

- [4] P. Combis ; *Etude d'un modèle de quasi-particule brownienne*, Thèse de 3ème Cycle, Orléans (1979).
- [5] P. Combis, J. Fronteau, A. Tellez-Arenas ; *Introduction to a Brownian quasiparticle model*, J. Stat. Phys. **21**, 439 (1979).
- [6] A. Tellez-Arenas, J. Fronteau, P. Combis ; *Brownian quasi-particles in Statistical physics*, Hadronic J. **2**, 1053 (1979).
- [7] J. Fronteau, A. Tellez-Arenas, R.M. Santilli ; *Lie-admissible structure of Statistical mechanics*, Hadronic J. **3**, 130 (1979).
- [8] M. Grmela, J. Fronteau, A. Tellez-Arenas ; *Inverse Liouville problem*, Hadronic J. **3**, 1209 (1980).
- [9] J. Salmon ; *Irreversibility and environmental forces* ; dans *Dynamical systems and Microphysics*, CISM courses and lectures no. 261, Springer-Verlag, (1980).
- [10] A. Schober Ed. ; *Irreversibility and nonpotentiality in Statistical mechanics*, Hadronic Press, Nonantum (Mass., USA) (1984).
- [11] J. Fronteau, P. Combis ; *A Lie-admissible method of integration of Fokker-Planck equations with non-linear coefficients (exact and numerical solutions)*, Hadronic J. **7**, 911 (1984).
- [12] P. Combis, J. Fronteau ; *A purely Lagrangian method for the numerical integration of Fokker-Planck equations.*, Europhys. Lett. **2**, 227 (1986).
- [13] P.A. Raviart ; *An analysis of particle methods* ; dans *Numerical methods in fluid dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1127, Springer-Verlag (1985).
- [14] G.-H. Cottet, S. Gallic ; *Une méthode de décomposition pour une équation de type convection-diffusion combinant résolution explicite et méthode particulière*, C.R. Acad. Sc. Paris **I 297**, 133 (1983).
- [15] S. Mas-Gallic, P.A. Raviart ; *A particle method for first-order symmetric systems*. Publications du Laboratoire d'Analyse numérique de Paris VI, no. 85032 (1985).
- [16] F. Hermeline ; *Méthodes particulières pour l'équation de Boltzmann*. CEA-N-2441 (1985).
- [17] P. Degond ; *Simulations d'équations de diffusion par convection déterministe de particules*. Congrès national d'analyse numérique, Port-Barcarès, mai 1986.
- [18] F. Hermeline ; *Approximation de l'équation de Fokker-Planck par une méthode particulière déterministe*, Congrès national d'analyse numérique, Port-Barcarès, mai 1986.

- [19] F. Hermeline ; *Traitement des termes de diffusion par des méthodes particulières déterministes*, , CEA-N-2491 (1986).
- [20] J.L. Doob ; *Stochastic processes*, Wiley, New-York (1953).
- [21] R. Indira, M.C. Valsakumar, K.P.N. Murthy, G. Ananthakrishna ; *Diffusion in a bistable potential : a comparative study of different methods of solution*, J. Stat. Phys. **33**, 181 (1983).
- [22] E. Nelson ; *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press (1967).
- [23] L. de Broglie ; *La Mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, J. Physique **VI 8**, 225 (1927).
- [24] L. de Broglie ; *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, Paris (1956).
- [25] L. de Broglie, J.L. Andrade e Silva ; *La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1971).
- [26] F. Fer ; *Guidage des particules, ondes singulières* ; dans *Louis de Broglie ; sa conception du monde physique*, Gauthier-Villars, Paris (1973).
- [27] D. Bohm ; *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [28] D. Bohm, J.P. Vigié ; *Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations*, Phys. Rev. **96**, 208 (1954).
- [29] R.P. Feynman, A.R. Hibbs ; *Quantum mechanics and path integrals*, Mac Graw-Hill, New-York (1965).
- [30] G. Badurek, H. Rauch, D. Tuppinger ; *Polarized neutron interferometry. Contribution à la Conférence internationale : New techniques and ideas in quantum measurement theory*, New-York, janvier 1986.
- [31] C. Dewdney, Ph. Guéret, A. Kyprianidis, J.P. Vigié ; *Testing wave-particle dualism with time dependent neutron interferometry*, Phys. Lett. **102 A**, 291 (1984).
- [32] D.J. Bohm, B.J. Hiley ; *The de Broglie pilot wave theory and the further development of new insights arising out of it*. In *Quantum, space and time - The quest continues*, A.O. Barut, A. van der Merwe, J.P. Vigié Editors, Cambridge University Press (1982-1983).
- [33] C. Dewdney ; *Particle trajectories and interference in a time dependent model of neutron single cristal interferometry*, Phys. Lett. **109 A**, 377 (1985).

- [34] S. Roy ; *Stochastic geometry and origin of quantum potential*. Phys. Lett. **115A**, 256 (1986).

*Manuscrit reçu le 20 juin 1986*

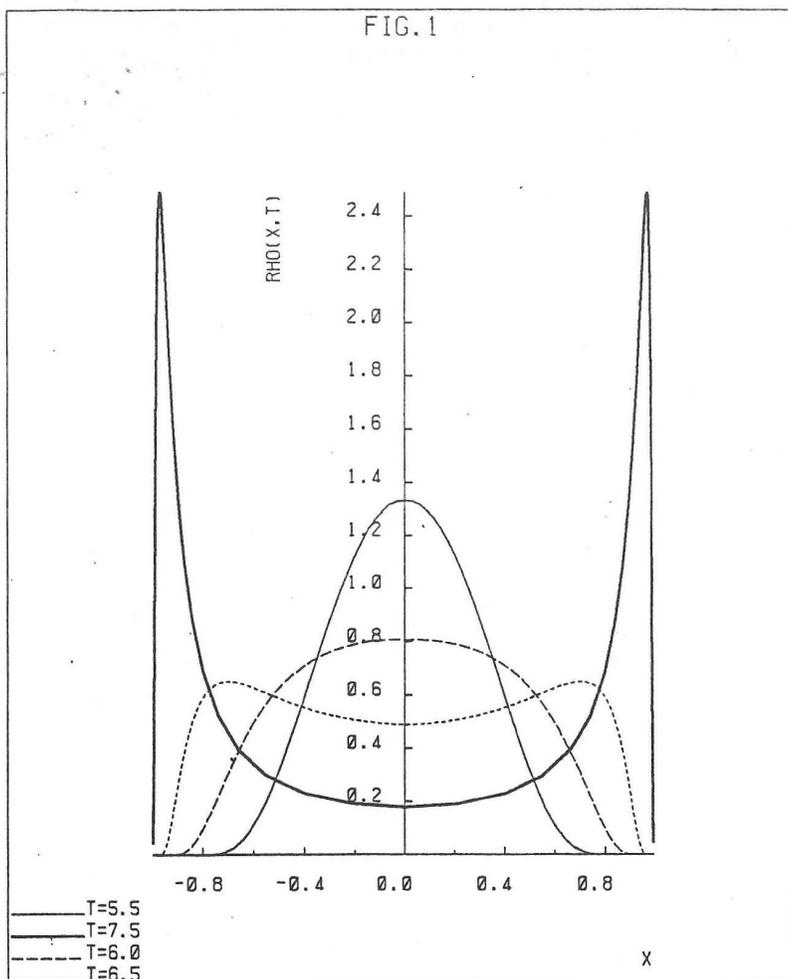


Figure 1.

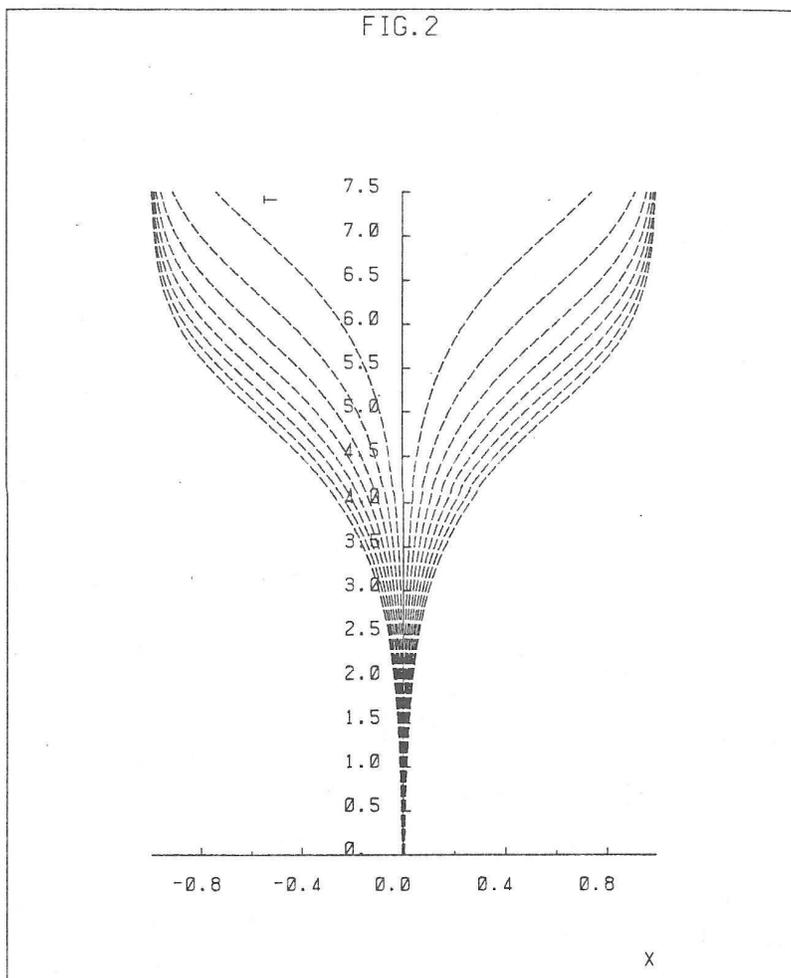


Figure 2.

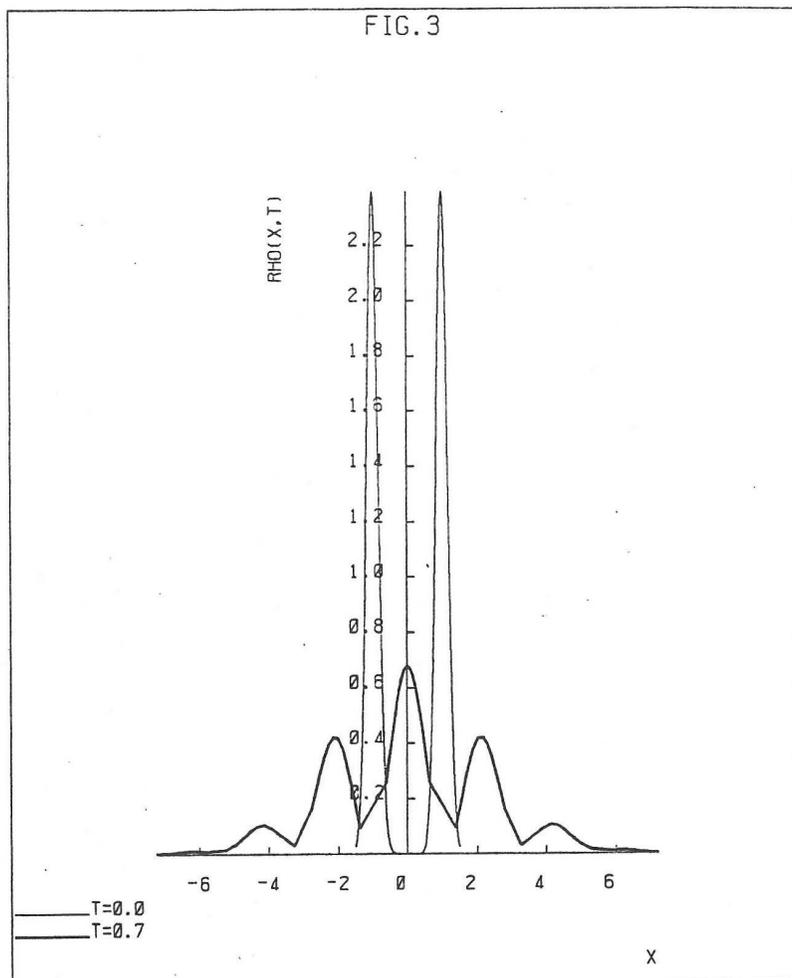


Figure 3.

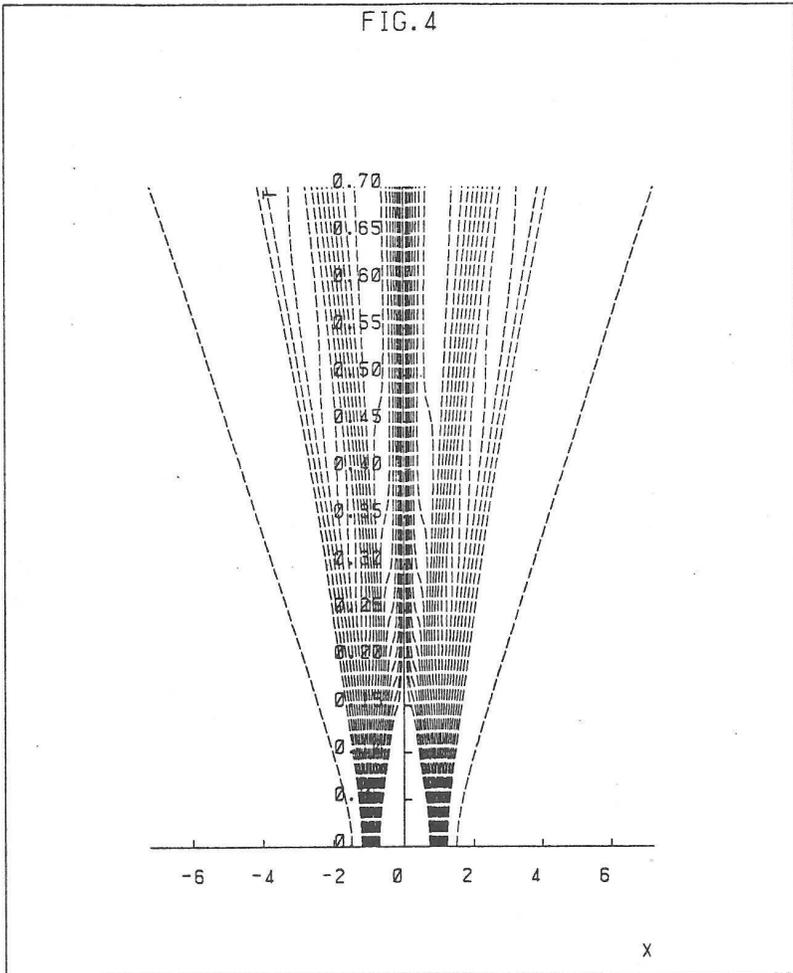


Figure 4.