La mécanique quantique à une dimension est une optique sur un cylindre de révolution

René MALCOR

2bis square Henry Paté
75016 Paris

RESUME. Une onde penta-dimensionnelle (à quatre dimensions d'espace, l'intervalle s de la relativité restreinte étant ajouté aux trois dimensions spatiales de l'espace-temps ordinaire) est considérée. La vitesse de propagation de cette onde est c, sa longueur d'onde est la longueur d'onde de Compton de la particule libre duale de cette onde. L'onde de matière correspondante n'est rien d'autre que la manifestation dans l'espace-temps ordinaire de cette onde. La longueur d'onde de L. de Broglie se déduit de la longueur d'onde de Compton par une opération d'intersection. La vitesse de phase dérive de c par la même opération. La vitesse de la particule dérive de la vitesse c par une opération de projection. Une étude détaillée du cas où il n'y a qu'une seule coordonnée de l'espace ordinaire est accomplie. La plupart des résultats sont valables dans le cas de 3 dimensions.

Dans le cas de la mécanique quantique à une dimension d'espace, l'optique correspondante est une optique sur un cylindre de révolution, car l'intervalle s est égal à la phase de l'onde multipliée par la longueur d'onde de Compton (relation E.P.B.).

De nombreux résultats donnés par L. de Broglie dans sa thèse sont réinterprétés dans le cadre de ce nouveau formalisme.

Le cas de la particule non libre peut être traité en considérant un indice de réfraction variable.

Nous reprenons ici deux des principaux résultats contenus dans une Lettere al Nuovo Cimento récente [1] et qui avaient déjà été présentés lors de notre exposé du 15 mars 1982 à la Fondation Louis de Broglie et dans des références antérieures. Nous les ferons suivre d'applications particulièrement suggestives au cas particulier d'une variable d'espace unique, que nous avions abordées au cours du même exposé.

1. Equations de Monge de la Relativité restreinte et de la mécanique quantique

Rappelons comment nous avons établi dans la référence [1], la relation ($E.P.B.$) qui lie l'intervalle s de la relativité restreinte à la phase au repos α_0 dans le cas de la particule libre.

Du rapprochement de la formule (1) due à Planck,

$$-a = m_0 c s \tag{1}$$

a : action, s : intervalle, m_0 : masse au repos et de la formule (2) due à L. de Broglie.

$$-a = \hbar\,\alpha_0 \tag{2}$$

$\hbar$ constante de Planck divisée par 2π, α_0 phase au repos, nous avons tiré

$$s = \frac{\hbar}{m_0 c}\alpha_0 = R_0\,\alpha_0; \tag{E.P.B.}$$

nous donnons à R_0 le nom de rayon de Compton (au repos).

Dans le travail déjà cité [1], nous avons énoncé le principe de Vessiot suivant lequel la relativité restreinte est une optique dans un espace à 4 dimensions, la dimension spatiale s s'ajoutant aux trois dimensions de l'espace ordinaire (s étant comme plus haut l'intervalle de la relativité restreinte). Ceci apparaît clairement en rapprochant le carré du Lagrangien [1] de l'optique classique

$$dx^2 - c^2\,dt^2 = 0 \tag{3}$$

du carré du Lagrangien nul de la relativité restreinte

$$dx^2 + ds^2 - c^2\,dt^2 = 0 \tag{4}$$

Cartan [2] appelle l'équation (3) l'équation de Monge de l'optique. L'équation (4) peut être appelée l'équation de Monge-Cartan-Vessiot de la relativité restreinte. x représente soit les trois coordonnées d'espace, soit et ce sera le cas le plus souvent dans la suite, une seule d'entre elles, les deux autres étant nulles.

Dans notre précédent travail, grâce à la formule ($E.P.B.$) qui est le lien opérationnel que nous avons établi entre la relativité restreinte et la mécanique

[1] Pour être correct, il faudrait dire “le carré du Lagrangien multiplié par dt^2”

quantique, nous avons déduit l'équation de Monge de la mécanique quantique de la particule libre.

$$dx^2 + R_0^2\, d\alpha_0^2 - c^2 dt^2 = 0 \tag{5}$$

avec $R_0 = \hbar/(m_0 c)$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un espace ordinaire à une dimension x et portons notre attention sur le plan xs, développement du cylindre de révolution xs. L'équation (5) est l'équation de Monge de l'optique sur le cylindre de révolution de rayon R_0. La somme des deux premiers termes du premier membre de l'équation (5) est "l'élément linéaire" de ce cylindre.

A la suite de Darboux, Hadamard, les frères Cosserat et Levi Civitta notamment, donnent à cette expression le nom d'élément linéaire de la surface considérée. Nous avons adopté cette dénomination dans le présent texte au lieu du terme "metric form" que nous avons utilisé dans la réf. [1].

L'équation de la surface d'onde correspondant à (4) dans le plan xs est :

$$x^2 + s^2 = c^2\, t^2 \tag{6}$$

c'est un cercle et la célérité de l'onde est c. De l'équation (6) écrite sous la forme

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = c^2$$

et de la figure 1 on déduit que $v = \frac{x}{t}$, (v vitesse de la particule) est la projection de c sur l'axe des x.

Si pour un instant nous revenons à l'espace $x_1\, x_2\, x_3\, s$, le cercle est remplacé par une surface d'onde hypersphérique. La célérité de l'onde dans cet espace est c ; la projection de c sur la trajectoire dans l'espace ordinaire est encore v vitesse de la particule dans cet espace. On peut dire aussi que c est la célérité d'une onde pentadimensionnelle de l'espace-temps $x_1\, x_2\, x_3\, s\, t$ à 5 dimensions [2].

L'onde considérée a la particularité que les rayons correspondent à des vitesses $v = dx/dt$ différentes de la même particule. Considérons sur la figure (1) le rayon correspondant à une valeur déterminée de l'angle θ et posons $v/c = \sin\theta$. La forme bilinéaire égale à 0 (cf. réf. 1, tableau p. 431)

$$px + m_0 s - Et = 0 \tag{7}$$

[2]Les présentes recherches peuvent être étendues à la particule non libre en considérant un indice de réfraction fonction des coordonnées de l'espace ordinaire.

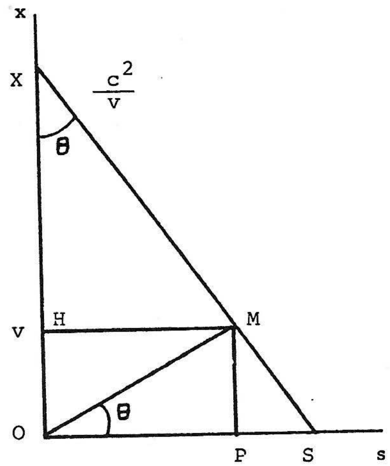

Figure 1. Vitesses ($t = 1$).

s'écrit m_0/m étant égal à $\cos\theta$, $x\,\sin\theta + s\,\cos\theta = ct$ droite tangente à la surface d'onde circulaire au point M donc perpendiculaire au rayon OM.

Si on considère le temps comme un paramètre, l'équation (7) écrite sous la forme

$$px + m_0 c\, s = Et$$

est l'équation du front d'une onde plane, (on devrait dire onde linéaire mais ce terme n'est pas en usage) ; pour le cylindre on a un front d'onde hélicoïdal, solution de la même équation d'Hamilton Jacobi que l'onde circulaire. Mais alors que dans l'onde circulaire chaque rayon correspond à des particules de même masse au repos mais d'énergie-impulsion différente, l'onde "plane" (hélicoïdale) correspond à des particules de même masse et de même impulsion-énergie mais de phases différentes.

Les relations suivantes traduisent en formules ce qui vient d'être dit dans le paragraphe précédent :

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{p}{m_0 c} \quad , \quad \cos\theta = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{m}{m_0}$$

Soient X et S les intersections de la "surface d'onde" avec les axes x et s. Soit H la projection de M sur le côté OX.

2. Vitesse de phase de L. de Broglie

Supposons $t = 1$. Dans le triangle OMX, on a (cf. fig. 1) $OM^2 = OH.OX$, $OM = c$

$$OX = c^2/v \quad \text{vitesse de phase de L. de Broglie.}$$

Celle-ci est donc la vitesse de l'intersection de l'onde MS avec OX alors que la vitesse de la particule est la projection de la vitesse c de M sur l'axe des x.

3. Longueur d'onde de Compton et longueur d'onde de L. de Broglie (fig. 2).

Supposons maintenant que OS soit égal à la circonférence du cylindre $2\pi\, R_0 = \frac{h}{m_0 c}$; alors $OM = OS\ \cos\theta$ (longueur d'onde de Compton au repos) et comme $\cos\theta = m_0/m$

$$OM = \frac{h}{mc} \quad \text{longueur d'onde de Compton,}$$

$$OS = \frac{h}{m_0 c} \quad \text{longueur d'onde de Compton au repos.}$$

Le OX correspondant a pour expression : $OX = \frac{OM}{\sin\theta} = \frac{h}{mv}$, longueur d'onde de L. de Broglie.

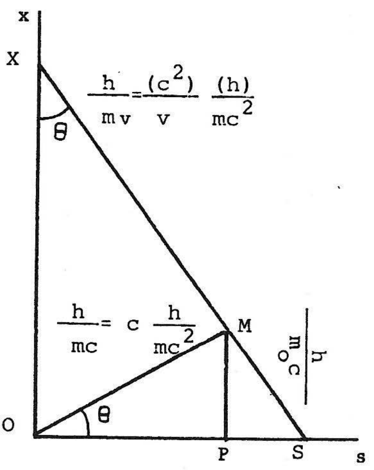

Figure 2. Longueurs d'onde.

Comme précédemment pour la vitesse de phase, on voit que la longueur d'onde de Louis de Broglie est une manifestation de la trace sur l'axe des x de la surface d'onde SM de l'espace de dimension supérieure, xs.

4. Périodes et fréquences.

Divisons par c les 3 longueurs d'onde précédentes. Nous obtenons les périodes

$$\frac{h}{m_0c^2} \quad , \quad \frac{h}{mc^2} \quad , \quad \frac{h}{mvc}$$

période $\frac{h}{mvc} = \frac{L_b}{c}$. En prenant les inverses on obtient les fréquences. La hauteur OM du triangle rectangle OSX est donnée par l'expression

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OX^2} \quad , \quad \frac{1}{L^2} = \frac{1}{L_0^2} + \frac{1}{L_b^2}$$

L_0 et L longueur d'onde de Compton au repos et en mouvement, L_b longueur d'onde de L. de Broglie. En multipliant par c^2 on obtient une relation analogue entre les périodes

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_0^2} + \frac{c^2}{L_b^2} \qquad \text{(réf. 3, p. 62).}$$

Les figures 1, 2 auraient pu être rassemblées en une seule puisque les triangles rectangles qui y sont dessinés sont semblables. Elles ont été séparées pour plus de clarté. Les relations métriques écrites ci-dessus sont valables aussi bien dans le plan que sur le cylindre.

5. Retour à la thèse de L. de Broglie [4].

On écrit d'habitude l'équation (4)

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx_i^2 \tag{8}$$

en regard de laquelle nous écrivons

$$m_0^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \tag{9}$$

équation d'Einstein duale ou corrélative de la précédente et alors les coordonnées $t\,x_i$ correspondent à un espace pseudo euclidien.

Nous avons écrit (4) sous la forme :

$$c^2dt^2 = dx_i^2 + ds^2$$

où les coordonnées x_i, s, correspondent à un espace euclidien à 4 dimensions, t étant un paramètre. Les avantages de la première représentation sont bien connus. L'avantage de la deuxième représentation est qu'elle donne lieu à des représentations géométriques concrètes et plus intelligibles. Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer les figures qui précèdent à celles qui figurent dans la thèse de L. de Broglie [4] pages 27 et 29. Dans la représentation Euclidienne, la simple inspection de l'équation (4) montre que la célérité de l'onde de l'optique à 4 dimensions (espace temps à 5 dimensions) est c. La simple inspection de la figure 2 montre que la longueur d'onde de cette onde est h/mc longueur d'onde de Compton.

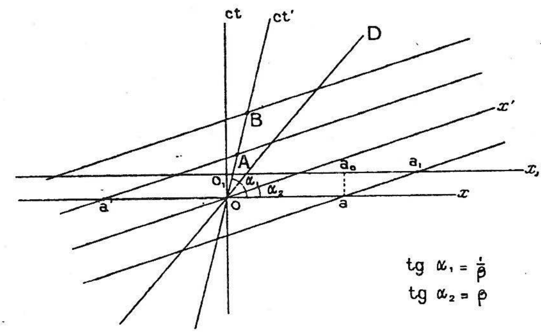

Figure 3. (Thèse de L. de Broglie [4], p. 27).

Dans les figures pages 27 et 29 de sa thèse, (la première est reproduite ci-dessus) et le texte les accompagnant, L. de Broglie introduit un cinquième axe de coordonnées ct', t' temps propre. Il raisonne donc implicitement sur un espace à 5 dimensions. Il considère 3 coordonnées d'espace et deux axes de temps t et t'. Mais en posant $ct' = s$ cette dernière coordonnée peut être considérée comme une coordonnée d'espace et l'espace de la figure page 27 peut être considéré comme un espace à 4 coordonnées d'espace et une de temps isomorphe de celui que nous considérons nous-même. Les points a, a_0, a_1 de la figure de L. de Broglie correspondent aux points $M\,O\,X$ de notre figure 1, a_0a correspond à la vitesse c, a_0a_1 à la vitesse c^2/v.

La longueur AB de L. de Broglie n'est autre que la longueur d'onde de Compton. Mais L. de Broglie n'explicite pas le fait que cette longueur d'onde à trait à une onde se propageant, non dans l'espace ordinaire x_i, mais dans l'espace $x_i\, s$ à 4 dimensions (espace-temps à 5 dimensions $x_i\, s, t$) où la vitesse de propagation est c, et la longueur d'onde $\frac{h}{mc}$ qui n'a pas sa place dans l'espace ordinaire x_i. Ceci est cohérent avec le fait que c est le quotient de la longueur d'onde de Compton $\frac{h}{mc}$ par la période de l'onde $T = \frac{h}{mc^2}$.

La forme vecteur d'onde d'univers figurant page 41 de la référence [4] s'écrit avec des notations plus usuelles :

$$d\alpha_0 = k_i\, dx_i - \omega\, dt,$$

k_i nombre d'onde, ω fréquence circulaire. La 1-forme vecteur impulsion énergie figurant à la page 38 de la même référence s'écrit avec les notations de la présente note $p_i\, dx_i - Edt$. Le point culminant de la thèse de L. de Broglie se trouve page 43, lorsqu'il écrit la relation de proportionnalité qui avec nos notations s'écrit : (facteur de proportionnalité $1/h$)

$$d\alpha_0 = 2\pi(\frac{dx_i}{\lambda_i} - \nu dt) = \frac{1}{\hbar}(p_i dx_i - Edt)$$

(L. de Broglie emploie des notations plus condensées faisant intervenir les 2 quadri-vecteurs).

Il aurait suffi que L. de Broglie écrivit $p_i\, dx_i - Edt = m_0 c\, ds$ pour trouver $d\alpha_0 = \frac{m_0 c ds}{\hbar}$ équivalente à la relation E.P.B.

Ainsi deux des principaux résultats de notre Lettere [1] se trouvaient déjà mais voilés dans la thèse de L. de Broglie :

a - Intervention de la longueur d'onde de Compton dans un espace de dimension supérieure. Vitesse de la particule et vitesse de phase de L. de Broglie expliquées comme projection de la vitesse c dans cet espace et vitesse de l'intersection X de l'hypersurface d'onde de cet espace avec la trajectoire de la particule dans l'espace ordinaire.

b - Formule E.P.B. conséquence immédiate de la proportionnalité des deux 1-formes de L. de Broglie écrites plus haut.

L. de Broglie ne paraît pas être revenu sur ces sujets dans la suite de sa carrière. Les auteurs de manuels non plus. Ils se sont par contre largement étendus sur l'explication des résultats du §a par les notions de vitesses de phase et de vitesse de groupe, beaucoup moins satisfaisantes quand il s'agit de particules isolées.

Démonstration du fait que l'onde sur le cylindre développé est une onde "plane"

Pour établir que l'onde recherchée est une onde p plane, nous adopterons la méthode suivante qui est calquée sur celle qu'on emploie dans la théorie des guides d'onde.

La séparation des variables t, x, s dans l'équation des ondes dans le plan ou le cylindre xs donne une solution correspondant à une onde plane de la forme

$$\Phi = C\, e^{i(\omega t - k_1 x - k' s)}$$

avec $k' = \frac{2\pi}{2\pi\, R_0} = \frac{1}{R_0}$.

Nous avons écrit dans l'exposant $k's$ au lieu de α_0 pour faire apparaître une notation rappelant celle des guides d'ondes (avec s périodique, période $2\pi\, R_0 = \frac{h}{m_0 c}$).

$e^{i\alpha_0} = e^{iK's}$ doit figurer obligatoirement dans cette expression afin que l'expression de ϕ ne soit pas altérée par le changement de α_0 en $\alpha_0 + 2\pi$ ce qui est nécessaire si on veut que la fonction ϕ soit uniforme sur le cylindre.

Rappelons que

$$(a) \quad \omega t - k_1 x - k' s = \frac{Et - px - m_0 cs}{\hbar} \quad (b).$$

En substituant (a) puis (b) dans l'équation des ondes, on obtient successivement

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + {k'}^2$$

$$\frac{-E^2}{c^2} + p^2 + \frac{\hbar^2}{R_0^2} = 0$$

relations équivalentes, la première étant analogue à celle qui apparait dans la théorie des guides d'ondes, la deuxième étant si on fait :

$$R_0 = \frac{\hbar}{m_0 c}$$

la forme que nous avons donnée à l'équation d'Einstein dans la colonne b) du tableau page 431 réf. [1] ...

Références

[1] R. Malcor, Lettere al Nuovo Cimento, 16 Avril 1985, p. 430.

[2] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux,* (1971) réimpression.

[3] O. Costa de Beauregard, *Relativité et Quanta,* Masson 1968.

[4] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des Quanta,* Thèse réimprimée, Masson, Paris 1963.

Manuscrit reçu le 18 avril 1986