Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale (Première partie)

Nikias STAVROULAKIS

Faculté des Sciences de Limoges
123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

"There is no experimental check to support the very heavy mathematical structure of Einstein. All we find is another heavy structure of purely mathematical extensions, complements, or modifications without any more experimental evidence. To put it candidly, science fiction about cosmology -very interesting but hypothetical. Altogether, we have no proof of the need for a curved universe (space plus time) and the physical meaning of this theory is very confusing".
L. Brillouin (1969)

"Most of the known exact solutions of Einstein's equations describe situations which are frankly unphysical ... We toss in null currents, macroscopic neutrino fields and tachyons for the sake of greater "generality" ; we seem to take delight at the invention of confusing anti-intuitive notation ; and when all is done we leave our newborn metric wobbling on its vierbein without any visible means of interpretation".
W. Kinnersley (1975).

RESUME. Le problème relatif à la propagation de la gravitation donne lieu à deux énoncés contradictoires en Relativité Générale : D'une part on affirme que tout changement dans une distribution quelconque de matière engendre un effet gravitationnel qui se propage dans l'espace à la vitesse de la lumière. D'autre part on affirme que, curieusement, si la distribution de matière est à symétrie sphérique, les changements entraînés par les déformations radiales n'engendrent aucun effet gravitationnel. La première affirmation est simplement la formulation d'un principe admis sans vérification, car les méthodes utilisées

couramment pour résoudre les équations d'Einstein ne donnent aucun moyen d'associer des effets gravitationnels aux déformations des sources. La deuxième affirmation est appuyée par la solution statique de Schwarzschild [22] -la première "frankly unphysical" solution des équations d'Einstein- et le "théorème de Birkhoff" [3] qui prétend démontrer l'unicité de cette solution. En fait la démonstration du théorème de Birkhoff est un cercle vicieux : d'abord on tronque la métrique spatio-temporelle pour la réduire à une forme qui exclut les déformations de la source, donc aussi les états non stationnaires du champ gravitationnel, et ensuite on établit les équations d'Einstein pour "démontrer", moyennant de longs calculs, que le champ est statique ! Cette pratique, qui consiste à mutiler la métrique spatio-temporelle avant d'établir les équations d'Einstein, remonte à un article de Levi-Civita [18] qui introduit la métrique spatiale à symétrie sphérique sans coordonnée radiale, c'est-à-dire sous une forme par rapport à laquelle il est impossible de concevoir les sphères centrées à l'origine. C'est cette erreur qui se trouve à la base de la solution de Schwarzschild, du théorème de Birkhoff et de diverses distorsions mathématiques qui ont conduit à la théorie des trous noirs.

Dans cette première partie on procède d'abord à une esquisse de problèmes généraux en vue d'en dégager les principes qui permettent d'associer des effets gravitationnels aux déformations de la matière. Ensuite on insiste sur les sources sphériques, stationnaires ou en déformation, dont les champs sont définis par des métriques $\Theta(4)$-invariantes. Ces métriques sont rigoureusement définies et établies sur la variété du problème, à savoir sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, de façon à exclure toute mutilation et tout changement de coordonnées intempestif dépourvu de signification physique. Pour bien illustrer la nécessité de fonder le problème sur une base nouvelle, on soumet à une critique serrée la solution de Schwarzschild et les idées qui s'en sont découlées. On est guidé par les solutions statiques établies dans [26], qui dépendent de nouveaux paramètres et mettent ainsi en évidence l'existence de solutions non stationnaires. Celles-ci seront établies dans la deuxième partie du présent travail après l'introduction de la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels. On arrivera ainsi à concevoir et à déterminer le soliton gravitationnel : le corpuscule pulsant au sein du champ non stationnaire engendré par ses propres pulsations. Il s'agit là d'une notion qui, de certains points de vue, se rapproche de l'onde à bosse proposée par Louis de Broglie [8] dans un contexte différent.

1. Introduction

Beaucoup d'esprits sont fascinés par l'idée d'un espace non euclidien ou, plus généralement, d'un espace-temps non pseudo-euclidien préconisé par la Relativité Générale, mais, vu le manque d'expériences décisives, on peut se demander dans quelle mesure il s'agit là d'un point de vue réaliste. Pour ce qui concerne la géométrie de l'espace physique, Gauss et Lobatschefsky avaient déjà constaté qu'aucune mesure ne peut contredire la propriété fondamentale relative à la somme des angles d'un triangle euclidien, pourvu que les côtés de celui-ci soient d'un ordre allant des distances ordinaires jusqu'à la distance de la terre au soleil. Dans ces conditions rien ne suggère l'abandon de la géométrie euclidienne. En ce qui concerne la géométrie non pseudo-euclidienne de l'espace-temps, elle englobe celle de l'espace, mais de toute façon sa réalisation repose sur la modification présumée de la structure pseudo-euclidienne par la distribution de la matière dans l'espace, ce qui entraînerait l'existence d'objets non euclidiens, à savoir de triangles dont la somme des angles différerait de π, de cercles dont la longueur différerait de $2\pi a$ (a étant le rayon) etc. Or puisque ceux-ci ne sont pas réalisables de façon incontestable, on ne peut pas s'attendre à une vérification décisive de la Relativité Générale dans le cadre macroscopique de la nature qui nous est accessible. Il reste à voir si la situation est différente à l'échelle microscopique et à l'échelle cosmique. Celle-ci étant inaccessible à l'expérimentation directe, on devrait essayer de déduire de la Relativité Générale des résultats relatifs aux fortes concentrations de matière constituées par les corpuscules. Einstein avait déjà envisagé une telle possibilité, comme en témoigne sa préface à l'"Introduction to the Theory of Relativity" de P.G. Bergmann [2]. Cependant, par une ironie du sort, la Relativité Générale est restée une théorie macroscopique et même extra-macroscopique utilisée surtout pour les considérations cosmologiques. L'explication que l'on en donne d'habitude semble satisfaisante à première vue : les effets gravitationnels étant négligeables dans le monde des corpuscules, les théories de gravitation ne pourront être destinées qu'aux phénomènes macroscopiques. En fait il s'agit là d'une extrapolation vers l'infiniment petit de la loi macroscopique de Newton qui concerne la gravitation statique. En principe nous ne savons rien sur ce que peut être la gravitation à l'échelle microscopique. Il est probable que les corpuscules effectuent des oscillations ultra-rapides engendrant des ébranlements gravitationnels puissants, donc aussi de fortes fluctuations de leurs champs aux très courtes distances. Ce point de vue nous amène au problème de savoir comment les oscillations des sources, microscopiques ou macroscopiques, engendrent les ébranlements gravitationnels et comment ceux-ci se propagent dans l'espace.

Les théories physiques qui sont fondées sur le cadre rigide de l'espace euclidien ne sont pas à même d'aborder ce problème, car elles se trouvent dans l'impossibilité de concevoir la propagation d'un effet de déformation dans le vide macroscopique. Quant à la Relativité Générale, qui utilise une riche métrique spatio-temporelle, elle est apte à introduire une géométrie variable avec le temps, de sorte que l'ébranlement gravitationnel peut être conçu comme vitesse de déformation locale de la métrique en fonction des oscillations de la matière, et sa propagation peut être aussi conçue comme modification de proche en proche de la métrique en fonction à la fois du temps et de l'éloignement à la source. De telles conceptions posent des problèmes d'interprétation physique très délicats, mais ce n'est pas constructif d'y renoncer.

Afin d'amorcer la mathématisation du problème, nous allons nous limiter à la considération d'une distribution compacte de matière dont le bord S_t reste homéomorphe à une surface compacte euclidienne donnée S_e, qui pourra être une sphère, un tore etc. Suivant le principe fondamental relatif à tous les problèmes relevant d'équations différentielles, nous devons alors préciser :

premièrement la variété de base, c'est-à-dire la variété sur laquelle le champ est conçu,

deuxièmement les conditions initiales et les conditions aux limites,

troisièmement les fonctions inconnues à déterminer.

Il convient bien de souligner le caractère impératif de ce principe, car il n'est jamais respecté dans la recherche de solutions exactes des équations d'Einstein et c'est d'ailleurs la raison principale pour laquelle on aboutit à des solutions "frankly unphysical" suivant l'expression de W. Kinnersley [15] et à des "purely mathematical extensions ... without any more experimental evidence" suivant la critique de L. Brillouin [7]. Pour ce qui concerne le choix de la variété de base, il est plus ou moins évident : la coordonnée temporelle est susceptible de prendre n'importe quelle valeur, c'est-à-dire qu'elle parcourt $\mathbf{R}$, tandis que la source du champ évolue dans l'espace physique que nous représentons par l'espace abstrait $\mathbf{R}^3$. Ainsi la variété de base sera le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ tout comme en Relativité Restreinte. Or celle-ci représente la réalité conformément à nos habitudes euclidiennes en identifiant l'espace physique à une structure rigide basée sur un objet euclidien simple, à savoir sur un système de trois axes rectangulaires que notre imagination se charge de prolonger indéfiniment. Rien de tel en Relativité Générale. Les objets géométriques sont non euclidiens et en outre leur géométrie varie en général avec le temps et ne nous est pas connue d'avance ; on la déterminera après l'intégration des équations d'Einstein. En fait la théorie des métriques spatio-temporelles est une création mathématique abstraite, de sorte que ses interprétations physiques ne peuvent pas être abordées de façon dogmatique sans tenir compte des conditions particulières de chaque situation étudiée. Cela dit, dans le cas qui nous préoccupe, le bord S_t de la source du champ sera défini par une homotopie $H : \mathbf{R} \times S_e \to \mathbf{R}^3$ telle que $H(\{t\} \times S_e) = S_t$ pour tout instant $t \in \mathbf{R}$. La déformation de S_t est assujettie aux processus qui se déroulent à l'intérieur de la source. En effet, les changements qui en résultent se propagent d'abord dans la matière, mais ils finissent par atteindre le bord dont les caractéristiques géométriques se modifient ainsi en fonction du temps. Or dès que le bord sera ébranlé, la déformation de l'espace-temps ne pourra plus se limiter dans la matière et se propagera dans le vide macroscopique créant ainsi un état non stationnaire du champ extérieur. Celui-ci prolonge donc le champ intérieur à travers la surface compacte bordant la source et sa détermination nécessite en conséquence la donnée de certaines fonctions définies sur S_t et caractérisant complètement la géométrie locale et globale de S_t de façon à assurer la jonction continue des deux champs sur S_t. Ces fonctions constituent les *conditions initiales* [1] pour la détermination du champ extérieur et l'ensemble de leurs dérivées par rapport au temps sera l'expression mathématique de l'ébranlement gravitationnel. Quant à la propagation de celui-ci, elle sera conçue au moyen de la *fonction de propagation* qui sera définie dans un instant. D'autre part les *conditions aux limites* définissent le comportement de l'espace-temps très loin de la source où la métrique s'approche asymptotiquement d'une forme pseudo-euclidienne (non nécessairement minkowskienne). Finalement les fonctions inconnues à déterminer seront précisées moyennant les données particulières du problème.

La description que nous venons de donner est tout à fait sommaire et incomplète. Suivant les formes prises par S_t, il se peut qu'un ébranlement gravitationnel émis d'une région de S_t à l'instant t_1, donc de S_{t1}, revienne à S_{t2}, $(t_2 > t_1)$, de sorte que la déformation de S_t ne dépend pas seulement des processus se déroulant dans la matière, mais aussi des ébranlements rentrants. En outre

[1]Nous pensons que ce terme est préférable à l'expression “conditions aux limites à distance finie” qui serait néanmoins plus conforme à la terminologie habituelle.

il se peut que deux ébranlements gravitationnels émis de deux régions distinctes de S_t se rencontrent au cours de leur propagation à l'extérieur de la matière, ce qui rend l'étude du phénomène de propagation particulièrement difficile. De telles situations sont pratiquement inaccessibles au formalisme mathématique, et c'est pourquoi nous sommes obligés de considérer seulement les cas où la surface S_t garde une forme suffisamment simple de façon que les complications précitées ne se produisent pas [27]. En fait, afin de rendre notre exposé plus concis et plus clair, nous allons aborder uniquement le cas où la distribution considérée de matière reste constamment à symétrie sphérique au cours de sa déformation. Il s'agit d'une abstraction mathématique assez poussée ne serait-ce qu'en raison de l'impossibilité de réaliser un bord parfaitement sphérique. Cependant une telle approche est indispensable afin de préparer l'étude de situations plus réalistes.

Outre les hypothèses simplificatrices concernant la source et son bord, nous devons supposer que la distribution de matière en question se trouve très loin des autres masses de façon que les effets gravitationnels de celles-ci puissent être négligés. Cette hypothèse n'est pas susceptible de justification physique et on l'introduit pour éviter des difficultés mathématiques insurmontables. En théorie de Newton où l'addition des potentiels est autorisée, il est loisible d'introduire d'abord le champ de chaque source séparément. Ce n'est plus le cas en Relativité Générale. On peut donc se demander s'il est légitime d'utiliser des résultats déduits d'hypothèses qui ne respectent pas les principes de la théorie. Or il est probable que les effets dus à la propagation des ébranlements gravitationnels s'atténuent très rapidement en fonction de l'éloignement à la source, de sorte que les résultats obtenus ne seront pas dépourvus de signification quantitative. D'autre part il ne faut pas sous-estimer l'aspect qualitatif : il serait déjà très significatif, si l'on pouvait constater une modification de proche en proche du champ lors d'une déformation rapide de la source.

2. Métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes

Plaçons-nous d'abord dans le cadre de l'espace euclidien et considérons une distribution compacte de matière disposée en couches sphériques concentriques, leur centre commun étant l'origine O d'un système orthonormé. Supposons en outre que la densité de masse dépende uniquement du temps et de la distance au centre. Dans ces conditions tous les systèmes orthonormés d'origine O sont équivalents pour la description de la distribution considérée de matière et de son champ newtonien. En d'autres termes le champ est invariant par rapport aux opérations du groupe orthogonal $O(3)$. De façon plus précise, si l'on passe de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ à l'espace-temps $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, le champ est invariant vis-à-vis des transformations orthogonales de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ qui laissent la coordonnée temporelle fixe. Ces transformations constituent un sous-groupe de $O(4)$ qui sera noté $\Theta(4)$, de sorte qu'une matrice appartient à $\Theta(4)$ si et seulement si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in O(3). \tag{2.1}$$

Supposons maintenant que la présence de matière modifie la géométrie pseudo-euclidienne de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ conformément aux principes de la Relativité Générale, ce qui implique que la métrique de Minkowski sera remplacée par une métrique spatio-temporelle sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x_0, x) dx_\alpha dx_\beta \quad , \quad (x_0 \in \mathbf{R}, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3), \tag{2.2}$$

vérifiant les équations d'Einstein [2]

$$R_{\alpha\beta} - \left(\frac{R}{2} + 3\lambda\right) g_{\alpha\beta} + \frac{8\pi k}{c^4} T_{\alpha\beta} = 0.$$

En généralisant la propriété relative au champ newtonien, nous postulons que la métrique (2.2) représente le champ d'une distribution de matière $\Theta(4)$-invariante, si et seulement si elle est $\Theta(4)$-invariante.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

un élément du groupe $O(3)$ et considérons le transformé (y_0, y_1, y_2, y_3) de (x_0, x_1, x_2, x_3) par la matrice correspondante (2.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \Theta(4),$$

ce qui donne

$$y_0 = x_0 \quad , \quad y_i = A_i^1\, x_1 + A_i^2\, x_2 + A_i^3\, x_3 \quad , \quad (i = 1, 2, 3).$$

[2]Comme dans [26], la constante cosmologique Λ sera toujours notée -3λ pour la commodité des calculs.

Alors dire que la métrique (2.2) est $\Theta(4)$-invariante signifie que, si l'on remplace dans l'expression

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(y_0,y)dy_\alpha\,dy_\beta \quad , \quad \big(y=(y_1,y_2,y_3)\big),$$

les cooordonnées y_0, y_1, y_2, y_3 par leurs expressions ci-dessus, on trouve après les réductions les égalités

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(y_0,y)dy_\alpha\,dy_\beta = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x_0,x)dx_\alpha\,dx_\beta.$$

Dans un premier temps nous devons donc résoudre le problème de savoir quelles sont les métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$. D'ailleurs il n'est pas inutile d'approfondir ce problème en considérant une situation plus générale.

Soit $SO(3)$ le sous-groupe de $O(3)$ constitué par les rotations, ce qui signifie que $A\in O(3)$ est un élément de $SO(3)$ si et seulement si son déterminant est égal à 1. Alors si A parcourt le groupe $SO(3)$, les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

forment un groupe qui sera noté $S\Theta(4)$. Puisque $S\Theta(4)$ est un sous-groupe de $\Theta(4)$, toute métrique spatio-temporelle $\Theta(4)$-invariante est aussi $S\Theta(4)$-invariante. La réciproque est aussi vraie et nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *La métrique* (2.2) *est* $S\Theta(4)$ *-invariante si et seulement si elle est* $\Theta(4)$ *-invariante. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe quatre fonctions de* $(x_0, \parallel x \parallel)$ *avec* $\parallel x \parallel = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$,

$$a_{00}(x_0,\parallel x \parallel) \quad , \quad a_{01}(x_0,\parallel x \parallel) \quad , \quad a_{11}(x_0,\parallel x \parallel) \quad , \quad a_{22}(x_0,\parallel x \parallel) \quad ,$$

telles que

$$g_{00}(x_0,x) = a_{00}(x_0,\parallel x \parallel),\; g_{0i}(x_0,x) = x_i\,a_{01}(x_0,\parallel x \parallel),$$

$$g_{ii}(x_0,x) = -a_{11}(x_0,\parallel x \parallel) - x_i^2\,a_{22}(x_0,\parallel x \parallel),$$

$$g_{ij}(x_0,x) = -x_i\,x_j\,a_{22}(x_0,\parallel x \parallel),$$

avec

$$i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad i \neq j.$$

Ce théorème se rattache aux propriétés générales des champs de tenseurs $O(n)$ -invariants ou $SO(n)$ -invariants sur $\mathbf{R}^n$ [28]. Nous l'acceptons sans démonstration. En remplaçant alors les expressions ci-dessus de $g_{\alpha\beta}(x_0, x)$ dans (2.2), on obtient la forme générale des métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes,

$$\begin{aligned} ds^2 =& a_{00}(x_0, \parallel x \parallel) dx_0^2 + 2\, a_{01}(x_0, \parallel x \parallel)(xdx)dx_0 \\ & - a_{11}(x_0, \parallel x \parallel) dx^2 - a_{22}(x_0, \parallel x \parallel)(xdx)^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec

$$xdx = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 \quad , \quad dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Les fonctions $a_{00}(x_0, u), a_{01}(x_0, u), a_{11}(x_0, u), a_{22}(x_0, u)$ sont supposées indéfiniment dérivables, mais, puisque la norme $\parallel x \parallel$ n'est pas différentiable à l'origine, elles doivent satisfaire à certaines conditions locales au voisinage de $u = 0$ pour que le tenseur métrique soit indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Ces conditions n'interviennent pas dans l'étude du champ extérieur que nous allons aborder ici.

La définition de la $\Theta(4)$ -invariance fait jouer un rôle à part à la coordonnée x_0 qui représente le temps. En fait cette nature spécifique de x_0 doit être précisée par la métrique elle-même sans ambiguïté. Suivant L. Landau et E. Lifchitz [17], cela nécessite que le coefficient de dx_0^2 soit strictement positif, et puisque la nature spatiale des trois autres coordonnées doit aussi être indiquée par la métrique, les coefficients de dx_1^2, dx_2^2, dx_3^3 doivent être négatifs ou nuls. Nous avons donc d'abord les conditions

$$a_{00} > 0 \quad , \quad a_{11} + x_i^2\, a_{22} \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3),$$

qui permettent d'écrire

$$ds^2 = \left(\sqrt{a_{00}}\, dx_0 + \frac{a_{01}}{\sqrt{a_{00}}}\,(xdx)\right)^2 - \left(a_{11}\, dx^2 + (\frac{a_{01}^2}{a_{00}} + a_{22})(xdx)^2\right), \tag{2.4}$$

en mettant ainsi en évidence la métrique riemannienne spatiale associée :

$$ds_R^2 = a_{11}\, dx^2 + \big(\frac{a_{01}^2}{a_{00}} + a_{22}\big)(xdx)^2$$

qui est définie positive et donne lieu en conséquence à la condition $a_{11} > 0$. Le déterminant

$$a_{11}^2 \left(a_{11} + (\frac{a_{01}^2}{a_{00}} + a_{22}) \| x \|^2 \right)$$

de la matrice associée à la forme quadratique ds_R^2 est aussi strictement positif, de sorte que nous devons considérer (2.4) avec les conditions

$$\begin{aligned} (2.5) \qquad & a_{00} > 0 \quad , \quad a_{11} > 0 \quad , \quad a_{11} + x_i^2 \, a_{22} \geq 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \\ & a_{11} + (\frac{a_{01}^2}{a_{00}} + a_{22}) \| x \|^2 > 0, \end{aligned}$$

qui entraînent en particulier que la forme ds_R^2 est définie positive, et nous appellerons alors (2.4) une *métrique admissible* $\Theta(4)$*-invariante*. Nous ne tiendrons compte désormais que de telles métriques $\Theta(4)$-invariantes seules susceptibles d'avoir une signification physique.

Pour simplifier l'écriture, la coordonnée temporelle x_0 sera notée τ. D'autre part, pour faire rentrer directement dans le cas général la métrique statique déjà utilisée [26] et pour avoir les conditions (2.5) sous une forme plus simple, nous substituons aux fonctions $a_{00}, a_{01}, a_{11}, a_{22}$ quatre autres fonctions f, h, l, g de (τ, ρ) en posant

$$\| x \| = \rho \quad , \quad \sqrt{a_{00}} = f \quad , \quad \rho \, \frac{a_{01}}{\sqrt{a_{00}}} = h \quad , \quad \rho \sqrt{a_{11}} = g,$$

$$\sqrt{a_{11} + \left(\frac{a_{01}^2}{a_{00}} + a_{22} \right) \| x \|^2} = l.$$

Cela permet de mettre la métrique admissible sous la forme

$$\begin{aligned} (2.6) \quad ds^2 = & \left(f(\tau,\rho) d\tau + h(\tau,\rho) \, \frac{x dx}{\rho} \right)^2 \\ & - \left[\left(\frac{g(\tau,\rho)}{\rho} \right)^2 dx^2 + \left(\big(l(\tau,\rho)\big)^2 - \left(\frac{g(\tau,\rho)}{\rho} \right)^2 \right) \frac{(x dx)^2}{\rho^2} \right] \end{aligned}$$

et de remplacer (2.5) par les conditions

$$f(\tau,\rho) > 0 \ , \ l(\tau,\rho) > 0 \ , \ | \, h(\tau,\rho) \, | \leq l(\tau,\rho) \ , \ g(\tau,\rho) > 0 \text{ pour } \rho > 0, \quad (2.7)$$

$$g(\tau, 0) = 0 \quad , \quad h(\tau, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g(\tau, 0)}{\partial \rho} = l(\tau, 0),$$

$$\frac{\partial^2 g(\tau,0)}{\partial\rho^2} = 2\,\frac{\partial l(\tau,0)}{\partial\rho}.$$

Les conditions de différentiabilité à l'origine de $\mathbf{R}^3$ étant supposées satisfaites, la métrique (2.6), assujettie aux conditions (2.7), est valable sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$, de sorte qu'elle convient à la détermination du champ aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la matière. La validité universelle de (2.6) par rapport aux coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 rend tout à fait superflue et même nuisible l'utilisation de coordonnées locales pour la formulation du problème. Cependant la tradition a imposé les coordonnées polaires (ou sphériques) ainsi que d'autres interminables changements de coordonnées qui sont utilisés sans préciser leurs domaines de validité. Cela a entraîné la modification de la variété du problème et l'impossibilité de formuler les conditions initiales et les conditions aux limites. L'abandon de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ a conduit finalement à une situation paradoxale qui consiste à rechercher la variété du problème en tant qu'élément inconnu !

L'introduction des coordonnées sphériques a favorisé la prise en considération de transformations autres que les éléments du groupe $\Theta(4)$. Une telle transformation, conçue correctement sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$, est définie de la façon suivante

$$\tau = \xi(t, \parallel y \parallel) \quad x_i = \frac{\gamma(t, \parallel y \parallel)}{\parallel y \parallel}\, y_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.8}$$

avec

$$\parallel y \parallel = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \quad , \quad \gamma(t,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\gamma(t,u)}{\partial u} > 0$$

et $\gamma(t,u) \to +\infty$ lorsque $u \to +\infty$. La différentiabilité à l'origine de $\mathbf{R}^3$ -ou plus précisément aux points de la sous-variété $\mathbf{R}\times\{O\}$- pose des problèmes délicats qui sont liés à la solution intérieure. Supposant ces problèmes résolus, (2.8) est un difféomorphisme global qui transforme la métrique générale (2.6) en un métrique $\Theta(4)$ -invariante s'identifiant, aux notations près, à (2.6). Par conséquent son utilisation n'apporte absolument rien en ce qui concerne la formulation du problème. Cependant nous allons nous servir plus tard de difféomorphismes spécifiques du type (2.8) pour lesquels $x = y$. Un tel difféo- morphisme se réduit à un changement de coordonnée temporelle

$$\tau = \xi(t, \parallel x \parallel)$$

et sera conçu uniquement à l'extérieur de la matière. Bien entendu son usage ne peut être autorisé que s'il est tel que les conditions initiales et les conditions aux limites du problème soient respectées.

Cela dit, revenant à la métrique spatio-temporelle (2.6), on constate que la métrique spatiale qui lui est associée, à savoir

$$ds_R^2 = \left(\frac{g(\tau,\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left((l(\tau,\rho))^2 - \left(\frac{g(\tau,\rho)}{\rho}\right)^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2},$$

garde la même forme que dans le cas statique déjà étudié [26]. Pour toute valeur fixée de τ, les demi-géodésiques d'espace issues de l'origine O sont représentées, dans notre variété $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$, par des demi-droites du sous-espace $\{\tau\}\times\mathbf{R}^3$, identifié à $\mathbf{R}^3$. En outre elles sont orthogonales, par rapport à ds_R^2, aux surfaces d'équation $\| x \| = Cte$, qui sont en conséquence les sphères riemanniennes de centre O. Il s'agit là d'une situation assez suggestive qui nous rappelle quelques propriétés familières de l'espace euclidien et concrétise notre variété $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ qui est ainsi associée à des objets géométriques invariants par les déformations de la source, à savoir le centre O, les demi-géodésiques d'espace issues de O, et les sphères de centre O. En particulier les géodésiques définies par les vecteurs $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ sont deux à deux orthogonales par rapport à ds_R^2, et forment ainsi un repère rigide invariant dans le temps. Cependant il faut se garder de pousser plus loin cette similitude avec nos images euclidiennes. Les idées géométriques ne pourront s'exprimer que par le moyen de la métrique spatiale ds_R^2 qui se rattache à des objets géométriques variant en général avec le temps. Ainsi, par exemple, si $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$, les angles que font deux à deux les lignes coordonnées de $\mathbf{R}^3$ passant par (x_1,x_2,x_3) dépendent tous les trois du temps, de sorte qu'il ne semble pas envisageable de concevoir un moyen pour les mesurer. La notion de mesure en Relativité Générale soulève des problèmes très délicats qui ont été signalés par P. Bridgman [5], [6], et L. Brillouin [7]. En fait, contrairement à la Mécanique Quantique, la Relativité Générale accepte l'existence de faits et de propriétés qui ne sont pas susceptibles de mesure ou d'observation directe. Il ne pourrait pas en être autrement, car la structure non euclidienne introduit des grandeurs qui ne sont pas concevables dans le cadre stationnaire et euclidien des mesures préconisées par la Mécanique Quantique. Celle-ci est basée sur la géométrie euclidienne et ignore complètement les erreurs de mesure qui résulteraient de la validité éventuelle d'une géométrie non euclidienne à l'échelle des corpuscules. Par contre la Relativité Générale entraîne l'existence d'objets non euclidiens qui interviennent de façon essentielle dans la conception et la détermination du champ gravitationnel, bien qu'il semble impossible de les identifier directement à notre échelle macroscopique. En particulier si l'on se réfère aux champs statiques à symétrie sphérique déjà étudiés

[26], on constate que la grandeur fondamentale qui y intervient, à savoir le rayon de courbure des sphères $\| x \| = Cte$, est très difficile sinon impossible à mesurer directement. Lorsqu'il s'agit de champs non stationnaires, il est encore plus difficile de concevoir la mesure de grandeurs relatives à des objets non euclidiens dont la structure varie avec le temps. Or on ne peut pas se passer de ces objets, car ils sont intimement liés à la conception et aux fondements de la théorie. Bien entendu, pour qu'une grandeur non susceptible de mesure directe ait droit de cité en Relativité Générale, il faut que son "existence" commande l'apparition d'autres grandeurs décelables par des mesures et des observations.

Cela dit, la variété de base et la forme admissible de la métrique spatio-temporelle étant précisées, on doit ensuite formuler pertinemment le problème relatif à la détermination du champ non stationnaire extérieur. Or le fait même de poser ce problème ne manquera pas de surprendre tous ceux qui sont habitués à la présentation classique de la théorie et en particulier à la solution de Schwarzschild et au théorème de Birkhoff suivant lequel la Relativité Générale entraîne que le champ d'une distribution de matière à symétrie sphérique en déformation est toujours statique et dépend uniquement de la masse totale tout comme en théorie de Newton. Ce théorème se trouve en contradiction flagrante avec les principes fondamentaux de la Relativité Générale et a alimenté une série d'aberrations mathématiques qui ont abouti à la théorie des trous noirs. Les idées qui s'en sont découlées sont tellement implantées que l'on ne saurait fonder notre problème sur une base solide sans mettre en exergue leurs points faibles. C'est pourquoi le paragraphe suivant est consacré à une étude critique des conceptions classiques relatives aux métriques à symétrie sphérique.

3. Le paramètre de Levi-Civita et la théorie des trous noirs

Toute l'évolution des idées en Relativité Générale a été marquée de façon surprenante par une erreur commise par Levi-Civita [18] dans un article publié en 1896, erreur qui a conduit plus tard à la solution de Schwarzschild [22] et la théorie des trous noirs. Il s'agit d'une transformation irréalisable qui prétend réduire toute métrique riemannienne $O(3)$-invariante (ou classiquement à symétrie sphérique) sur $\mathbf{R}^3$ à la forme

$$ds^2 = (\alpha(r))^2 \, dr^2 + r^2 d\omega^2, \tag{3.1}$$

$d\omega^2$ étant la métrique induite sur la sphère unité $S^2 : \| x \| = 1$ par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$. En fait cette réduction est impossible. Pour s'en assurer, on doit partir de l'expression mathématiquement correcte des métriques riemanniennes $O(3)$-invariantes sur $\mathbf{R}^3$, expression indiquée pour la première fois par H. Weyl [30],

$$ds^2 = p(\rho)dx^2 + q(\rho)(xdx)^2, \tag{3.2}$$

avec $\rho = \| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, p(\rho) > 0, p(\rho) + \rho^2 q(\rho) > 0$. Nous savons [24], [26], qu'il est commode d'introduire d'une part la fonction

$$l(\rho) = \sqrt{p(\rho) + \rho^2 q(\rho)}$$

qui intervient dans le calcul de la distance géodésique de O à $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\delta(\rho) = \int_0^\rho l(u)du \quad , \quad \rho = \| x \|,$$

d'autre part le rayon de courbure

$$\rho\sqrt{p(\rho)} = g(\rho)$$

de la sphère $S_\rho : \| x \| = \rho$, considérée avec la métrique induite par (3.2). Cela permet de mettre (3.2) sous une forme plus appropriée

$$ds^2 = \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left((l(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right) \frac{(xdx)^2}{\rho^2} \tag{3.3}$$

avec $l(\rho) > 0$ pour tout $\rho \geq 0$, $g(\rho) > 0$ pour tout $\rho > 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = l(0)$, $g''(0) = 2l'(0)$.

Alors le passage de (3.3) à (3.1) nécessite d'abord l'utilisation des coordonnées sphériques qui permettent de transformer la restriction de (3.3) à $\mathbf{R}^3 - \{O\}$ en une métrique sur $]0, +\infty[\times S^2$, à savoir

$$ds^2 = (l(\rho))^2 d\rho^2 + (g(\rho))^2 d\omega^2. \tag{3.4}$$

Bien que (3.3) se réduise, pour $\rho = 0$, à la métrique euclidienne

$$(g'(0))^2 dx^2 = (l(0))^2 dx^2,$$

(3.4) dégénère pour $\rho = 0$ à cause de la condition $g(0) = 0$. Celle-ci caractérise la coordonnée radiale $\rho \in [0, +\infty[$ par rapport à (3.4) : Une métrique riemannienne de la forme (3.4) sur $]0, +\infty[\times S^2$ ne peut être le pendant d'une métrique $O(3)$-invariante sur $\mathbf{R}^3$ que si $g(0) = 0$. Cette propriété ne dépend pas du choix de l'origine dans $\mathbf{R}^3$. En effet, si l'action du groupe $O(3)$ est conçue par rapport à un autre point $a \in \mathbf{R}^3$, nous aurons la métrique qui résulte de (3.3) si l'on y remplace x par $x - a$, de sorte que l'utilisation des coordonnées sphériques donnera encore (3.4) avec $\rho = \parallel x - a \parallel$ et $g(0) = 0$.

La dégénérescence de (3.4) pour $\rho = 0$ souligne la nécessité d'utiliser la transformation effectuée sur son domaine de définition, à savoir sur $\mathbf{R}^3 - \{O\}$. (Le fait que les coordonnées ϕ et θ ne sont pas définies globalement sur la sphère unité ne pose pas de problèmes, si l'on note $d\omega^2$ la métrique globale induite sur cette sphère par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$). Ce n'est pas le cas dans les exposés de la Relativité Générale où la métrique (3.4) est introduite au titre d'une métrique sur $\mathbf{R}^3$ et alors la valeur $\rho = 0$ est censée définir l'origine de $\mathbf{R}^3$, bien qu'elle définisse le bord de $[0, +\infty[\times S^2$ qui n'a d'ailleurs aucune signification physique. Cet abus de principes serait probablement sans incidence sérieuse sur l'étude du champ extérieur, si Levi-Civita ne pratiquait pas une mutilation de la métrique (3.4) au moyen d'un prétendu changement de coordonnées qui consiste à remplacer ρ par la "coordonnée r" obtenue en résolvant par rapport à ρ l'équation $g(\rho) = r$. Celle-ci devrait donc définir ρ en tant que fonction différentiable de r, ce qui nécessiterait la validité de la condition :

$$g'(\rho) > 0 \quad \text{pour tout} \quad \rho \geq 0.$$

Cependant cette condition ne résulte pas de la définition de la métrique (3.3), la fonction dérivable $g(\rho)$ qui y figure étant simplement strictement positive pour $\rho > 0$ et nulle pour $\rho = 0$. Ainsi le passage de (3.3) à (3.1) s'avère irréalisable. Or cette indéfinissable "coordonnée r", que nous appellerons désormais "le paramètre de Levi-Civita", s'est installée solidement partout en envahissant la Relativité Générale et ses extensions [13] dans tous les problèmes se rapportant de près ou de loin à la symétrie sphérique. Elle est même introduite en tant que coordonnée radiale, bien qu'elle ne soit pas une coordonnée du tout. En effet, chaque sphère $S_\rho : \parallel x \parallel = \rho$ est localisée dans $\mathbf{R}^3$, relativement à (3.3), par son rayon ρ, de sorte que ρ est effectivement une coordonnée radiale, qui sert d'ailleurs à déterminer la distance géodésique $\delta(\rho)$. D'autre part la sphère S_ρ étant un objet non euclidien, elle possède un rayon de courbure $g(\rho) \neq \delta(\rho)$ qui n'a en principe aucun rapport avec sa localisation, car $g(\rho)$ figure dans (3.3) en tant que fonction inconnue susceptible d'une infinité de déterminations, et dans le cas particulier de la Relativité Générale on cherche à la déterminer moyennant les équations d'Einstein. De toute façon on ne peut connaître $g(\rho)$ autrement que par l'intermédiaire de la coordonnée radiale ρ. La mesure physique directe de $g(\rho)$ est certainement impossible. Or même si elle était possible, comment pourrait-on en déduire la localisation de la sphère S_ρ ? Ainsi la métrique appauvrie (3.1), qui résulte de l'utilisation abusive du paramètre de Levi-Civita, ne contient pas de coordonnée radiale et est en conséquence incompatible avec l'opération de localisation des sphères S_ρ dans $\mathbf{R}^3$. En fait les sphères S_ρ n'ont ni centre ni rayon, elles sont inexistantes par rapport à (3.1), de sorte que, même si la condition $g'(\rho) > 0$ est satisfaite, l'introduction du paramètre de Levi-Civita transgresse les principes élémentaires des raisonnements géométriques.

Depuis l'avènement de la Relativité Générale l'utilisation du paramètre de Levi-Civita inaugure une pratique sans principes qui consiste à introduire de "nouvelles coordonnées" à tout bout de champ sans se soucier des domaines de leur validité, sans faire la distinction nécessaire entre coordonnées et fonctions inconnues, et sans tenir compte des conditions initiales et des conditions aux limites. En particulier les problèmes relatifs à la symétrie sphérique ont donné lieu à des innombrables avatars de la solution de Schwarzschild [22] qui a fait couler et continue encore à faire couler beaucoup d'encre. Mais tous ces avatars gravitent autour de deux pôles fixes : la variété à bord $[0,+\infty[\times S^2$ qui remplace $\mathbf{R}^3$, et le paramètre de Levi-Civita. La confusion topologique qui en résulte fait en sorte que même l'interprétation de ce paramètre comme "coordonnée radiale" se dégage peu à peu à travers de nombreuses controverses.

Levi-Civita considère r comme "coordonnée", mais sans oublier quand même sa signification géométrique : $1/r^2$ est la courbure d'une sphère géodésique, de sorte que la valeur $r = 0$ correspond au centre. En fait nous avons vu tout à l'heure que (3.4) ne peut être le pendant d'une métrique $O(3)$-invariante sur $\mathbf{R}^3$ que si $g(0) = 0$. Par conséquent (3.1) n'a de sens comme pendant d'une métrique $O(3)$-invariante sur $\mathbf{R}^3$ que si la valeur $r = 0$ du paramètre de Levi-Civita $r = g(\rho)$ correspond à l'origine choisie dans $\mathbf{R}^3$. Cependant, à cause de l'abandon de $\mathbf{R}^3$ et du manque de définition satisfaisante pour la symétrie sphérique de la métrique, cette propriété élémentaire est vite oubliée. Ainsi, afin de réduire sa solution à la forme standard connue, Schwarzschild introduit le paramètre de Levi-Civita par la relation

$$r = \sqrt[3]{R^3 + (2\mu)^3} \quad , \quad R \geq 0 \quad , \quad \mu = \frac{km}{c^2},$$

en supposant que la valeur $R = 0$ corresponde à l'origine de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire en supposant que la sphère de centre O et de rayon de courbure $2\mu > 0$ s'identifie à l'origine de $\mathbf{R}^3$. C'est Droste [9] qui remédie ultérieurement à cette erreur en introduisant le paramètre de Levi-Civita comme "coordonnée radiale" et en établissant à nouveau la forme standard de la solution de Schwarzschild (que l'on devrait d'ailleurs appeler solution de Schwarzschild-Droste). Mais en fait le point de vue de Droste n'est pas du tout clair : il accepte la possibilité de remplacer r par $r+2\mu$, et considère toujours la "coordonnée de Schwarzschild" $\sqrt[3]{R^3+(2\mu)^3}, R \geq 0$, comme un choix possible de coordonnée radiale. A force de rester sur la variété à bord $[0,\infty[\times S^2$, on a fini par faire disparaître la caractéristique essentielle de la notion de coordonnée radiale. Il est très significatif à ce propos que même Hilbert [14] n'exclut pas en termes mathématiques la transformation de Schwarzschild qui ramène $r = 2\mu$ à l'origine de $\mathbf{R}^3$; il dit simplement qu'elle n'est pas à recommander.

La confusion qui subsiste encore aujourd'hui sur la notion de coordonnée radiale se reflète dans un article relativement récent de L.S. Abrams [1] qui utilise la métrique spatio-temporelle statique sur $\mathbf{R} \times [0,+\infty[\times S^2$,

$$ds^2 = A(\rho)dt^2 - B(\rho)d\rho^2 - C(\rho)d\omega^2,$$

sans imposer la condition $C(0) = 0$ à la fonction $C(\rho)$. En fait, bien qu'il évite le paramètre de Levi-Civita, la solution qu'il obtient est telle que $C(\rho)$ tende vers une constante strictement positive lorsque ρ tend vers zéro. L.S. Abrams critique de façon très judicieuse l'extension de Kruskal, mais de toute façon sa solution ne peut pas être retenue, car elle contredit un principe fondamental de la symétrie sphérique qui exige l'annulation de $C(\rho)$ pour $\rho = 0$.

Il semble que le point de vue de Hilbert ait joué un rôle déterminant pour l'acceptation du paramètre de Levi-Civita en tant que coordonnée radiale dans la solution standard de Schwarzschild. Dès lors celle-ci fait l'objet de nombreuses discussions orientées d'une part vers l'interprétation de la singularité $r = 2\mu$ et d'autre part vers les problèmes relatifs au degré de généralité des diverses solutions possibles. Afin d'élucider ce deuxième point, on généralise l'emploi des transformations irréalisables, ce qui conduit plus tard à un cercle vicieux, appelé théorème de Birkhoff [3]. Celui-ci prétend démontrer que le champ extérieur d'une source sphérique en déformation est toujours défini par la solution de Schwarzschild, donc en particulier qu'il est toujours statique. En fait ledit théorème s'énonce de façon très imprécise. Ainsi dans un article de W.B. Bonnor [4], on peut lire :

“Birkhoff’s theorem is as follows : Every spherically symmetric solution of the field equations of general relativity, $R_{ik} = 0$, may be reduced, by a coordinate transformation, to the Schwarzschild solution”.

D’autre part l’énoncé présenté par Misner, Thorne et Wheeler [20] insiste davantage sur le caractère local de la solution évoquée :

“Birkhoff’s theorem : Let the geometry of a given region of spacetime be spherically symmetric, and be a solution to the Einstein field equations in vacuum. Then that geometry is necessarily a piece of the Schwarzschild geometry”.

Sans compter le manque de définition pour la symétrie sphérique de la métrique, la solution de Schwarzschild s’établit quand même sur la base de certaines conditions aux limites qui, bien que mal formulées, conduisent à la détermination de la constante μ. Ces conditions ne sont pas concevables localement et interviennent effectivement dans la démonstration du théorème de Birkhoff, qui nécessite l’établissement complet de la solution de Schwarzschild. Il n’est pas possible de concevoir localement les énoncés précités. D’autre part les relativistes se servent d’une multitude “d’extensions régularisantes” de la métrique de Schwarzschild qui contredisent toutes le théorème de Birkhoff. En particulier ils utilisent l’extension d’Eddington-Finkelstein :

$$ds^2 = (1 - \frac{2\mu}{r})du^2 + 2du\,dr - r^2\,d\omega^2,$$

bien qu’aucun changement de coordonnées ne puisse la ramener à la solution de Schwarzschild sur un voisinage de $r = 2\mu$. En fait il existe une infinité de solutions, entre autres la solution de N. Rosen [21], qui ne se transforment pas dans la métrique de Schwarzschild par des changements de coordonnées. Il s’agit toujours d’un difféomorphisme entre deux ouverts. L’emploi de transformations discontinues, très usité chez les relativistes, est à proscrire, car il détruit les bases mêmes de nos raisonnements mathématiques et donne lieu aux pires malentendus. La nécessité de se tenir aux difféomorphismes a été soulignée dans un article récent de N. Rosen [21].

La discussion des contradictions inhérentes au soi-disant théorème de Birkhoff serait superflue si celui-ci ne se rattachait pas à l’idée que le champ d’une source sphérique est toujours statique. Pour refuter cette idée, nous devons retracer les raisonnements illusoires qui lui sont associés, ce qui nous donnera d’ailleurs l’occasion de faire apparaître clairement la nécessité de fonder le problème sur une base nouvelle.

Suivant la tradition, les métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes (appelées classiquement métriques à symétrie sphérique ou à symétrie centrale) sont conçues par rapport aux coordonnées sphériques, ce qui signifie mathématiquement par rapport à la variété à bord $\mathbf{R} \times [0, +\infty[\times S^2$. Il s'agit là d'un premier faux pas dont on ne saurait négliger les conséquences. En particulier le bord de la variété n'a pas de signification physique et de plus il n'existe pas alors de définition satisfaisante pour la $\Theta(4)$-invariance. Or, passons ces difficultés et suivons, par exemple, l'exposé de L. Landau et E. Lifchitz [17] relatif au théorème de Birkhoff [3].

"Si l'on a recours à des coordonnées spatiales sphériques r, θ, ϕ, l'expression à symétrie centrale la plus générale de ds^2 est

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(sin^2\theta.d\phi^2 + d\theta^2) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)dr\,dt \qquad (97.1)$$

où h, k, l, a sont certaines fonctions du rayon r et du temps t. Mais étant donné l'arbitraire dans le choix du référentiel en Relativité Générale, nous pouvons encore soumettre les coordonnées à toute transformation ne violant pas la symétrie centrale de ds^2 ; cela signifie qu'on peut transformer les coordonnées r et t au moyen des formules $r = f_1(r', t'), t = f_2(r', t')$, où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires des nouvelles coordonnées r', t'. Exploitant cette possibilité, nous choisissons la coordonnée r et le temps de sorte que, primo, le coefficient $a(r,t)$ de $dr\,dt$ dans l'expression de ds^2 s'annule et, secundo, que le coefficient $k(r,t)$ soit simplement égal à $-r^2$. Cette dernière condition signifie que le rayon r est déterminé de façon que la longueur de la circonférence de centre à l'origine des coordonnées soit égale à $2\pi r$ ... On trouve ainsi pour ds^2 l'expression suivante

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta.d\phi^2) - e^\lambda\,dr^2 \quad \text{''}. \qquad (97.2)$$

Nous voilà donc arrivés au paramètre de Levi-Civita r. Il est bel et bien égal au rayon de courbure $2\pi r/(2\pi)$ d'un cercle non euclidien, mais on veut coûte que coûte qu'il soit aussi une coordonnée radiale ! D'ailleurs on s'aperçoit immédiatement que la transformation évoquée dans la "démonstration" précédente est irréalisable : Remplaçant dans (97.1) r et t par les fonctions $f_1(r', t')$ et $f_2(r', t')$ et écrivant que la métrique transformée satisfait aux conditions indiquées, on trouve un système de deux équations, l'une d'elles étant aux dérivées partielles,

$$(r')^2 + k(f_1, f_2) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
2h(f_1,f_2)\frac{\partial f_1}{\partial r'}\,\frac{\partial f_1}{\partial t'} &+ 2l(f_1,f_2)\,\frac{\partial f_2}{\partial r'}\,\frac{\partial f_2}{\partial t'} \\
&+a(f_1,f_2)\left(\frac{\partial f_1}{\partial r'}\,\frac{\partial f_2}{\partial t'}+\frac{\partial f_1}{\partial t'}\,\frac{\partial f_2}{\partial r'}\right)=0,
\end{aligned}
$$

où l' on écrit f_1 et f_2 au lieu de $f_1(r',t')$ et $f_2(r',t')$ respectivement. Or nous avons remarqué précédemment que le théorème de Birkhoff doit être conçu globalement, de sorte que le passage de (97.1) à (97.2) ne sera susceptible d'utilisation que si, pour tout choix de fonctions différentiables h,k,l,a sur $[0,+\infty[\times\mathbf{R}$, ce système admet sur $[0,+\infty[\times\mathbf{R}$ des solutions différentiables $f_1(r',t')$ et $f_2(r',t')$ ayant partout un déterminant jacobien non nul. Mais cela est manifestement faux. Le passage de (97.1) à (97.2) est une transformation irréalisable qui amplifie l'erreur de Levi-Civita. A part le fait que (97.2) est un cas particulier de (97.1), il n'existe aucun autre rapport entre les deux métriques. Mais il y a plus. Même s'il existait un difféomorphisme global transformant (97.1) en (97.2), cela ne signifierait pas que les deux métriques seraient équivalentes pour la détermination du champ gravitationnel au moyen des équations d'Einstein. Cependant "la démonstration du théorème de Birkhoff" s'achève sur la base de la métrique appauvrie (97.2) : Celle-ci s'écrit sous une forme légèrement différente adaptée à l'écriture (3.1),

$$ds^2=(\beta(t,r))^2\,dt^2-((\alpha(t,r))^2\,dr^2+r^2\,d\omega^2), \tag{3.5}$$

et en établissant alors les équations d'Einstein relatives au champ extérieur, on en déduit que les fonctions $\alpha(t,r)$ et $\beta(t,r)$ ne dépendent pas du temps, de sorte que l'on a affaire en définitive à une métrique statique,

$$ds^2=(\beta(r))^2\,dt^2-((\alpha(r))^2\,dr^2+r^2\,d\omega^2), \tag{3.6}$$

d'où la conclusion hâtive : le champ extérieur d'une source à symétrie sphérique en déformation (en contraction ou en expansion ou en pulsation) est toujours statique.

Conformément à l'analyse précédente, le passage de (97.1) à (97.2), donc aussi à (3.5), est une opération arbitraire sans aucune justification mathématique. Cela suffit pour rendre caduque la démonstration du théorème de Birkhoff. Mais il y a plus. Le fait que les équations d'Einstein relatives à (3.5) donnent une solution statique n'est qu'un cercle vicieux. En effet, la métrique (3.5) est conçue sur la variété à bord $\mathbf{R}\times[0,+\infty[\times S^2$ et ne contient pas de coordonnée radiale, de sorte que, même si l'on peut attribuer tant bien que mal un rayon de courbure au bord sphérique de la source, celle-ci n'a ni centre ni rayon par rapport à (3.5), c'est-à-dire qu'elle est inexistante pour la métrique. En particulier la source en déformation est inexistante pour les conditions initiales du problème : son rayon en tant que fonction du temps n'est pas concevable –car le rayon lui-même n'est pas définissable– et il en est de même du rayon de courbure de son bord sphérique, car une fonction du temps $t \mapsto r(t)$ définit "un mouvement radial dans le champ extérieur" et non pas une variation de ce rayon de courbure. Or les équations d'Einstein pour une source statique (et a fortiori pour une source inexistante) ne peuvent avoir qu'une solution statique.

Pour ce qui concerne le problème relatif à la métrique statique (3.6), qui conduit à la solution de Schwarzschild, il est toujours un problème sans conditions initiales, la source du champ étant inexistante pour la métrique. L. Brillouin avait déjà remarqué que "the Schwarzschild problem is usually stated in a curious way ... This does not tell anything about boundary conditions ... A complete statement of the problem should include the conditions on a small sphere enclosing the origin" [7].

Le problème étant incorrectement formulé, la solution qui en résultera sera nécessairement mauvaise. On sait que l'intégration des équations d'Einstein pour le champ extérieur donne

$$(\beta(r))^2 = c^2(1-\frac{A}{r}), (\alpha(r))^2 = \frac{1}{1-\frac{A}{r}}, (A = \mathrm{Cte}, c = \text{vitesse de la lumière}),$$

la détermination de la constante A étant basée ensuite sur l'approximation asymptotique de $-c^2A/(2r)$ par le potentiel newtonien pour les grandes valeurs de la distance des points $x \in \mathbf{R}^3$ au centre. Pour déterminer la constante A, on est ainsi obligé de calculer d'abord la distance $\int_0^r \alpha(u)\,du$, mais ce calcul est impossible, car la fonction $\alpha(r)$ n'est pas encore connue. Devant cette impasse on change d'attitude vis-à-vis du paramètre de Levi-Civita. Celui-ci était d'abord un rayon de courbure. Puis on l'a baptisé "coordonnée radiale". Désormais il sera la distance ! Alors on abandonne l'approximation asymptotique, et par un raisonnement trompeur on identifie $-c^2A/(2r)$ au prétendu potentiel newtonien $-km/r$, ce qui donne $A = 2km/c^2 = 2\mu$, d'où la solution de Schwarzschild :

$$(\beta(r))^2 = c^2(1-\frac{2\mu}{r}) \quad , \quad (\alpha(r))^2 = \frac{1}{1-2\mu/r}.$$

Cette identification masque le fait que la détermination de A est commandée par les grandes valeurs de r et que, en conséquence, le prolongement de la solution obtenue vers les petites valeurs de r est autorisé tant que la continuité subsiste, c'est-à-dire tant que $r > 2\mu$. En fait les équations d'Einstein sont non linéaires, et nous savons que les solutions des équations différentielles non linéaires introduisent souvent des singularités qui définissent en même temps les ouverts connexes sur lesquels ces solutions sont valables. Il semble que la tradition créée par les équations différentielles linéaires ait joué un rôle décisif dans l'attitude des relativistes qui n'hésitent pas à prolonger la solution à travers la discontinuité $r = 2\mu$. La solution de Schwarzschild est désormais considérée comme valable pour tout $r \geq 0$ avec deux singularités, $r = 0$ et $r = 2\mu$, la première étant une "vraie singularité" et la deuxième étant due à la "pathologie des coordonnées de Schwarzschild". Puisque le paramètre de Levi-Civita est censé être une distance, la valeur $r = 2\mu$ sera appelée "le rayon gravitationnel de la masse m", bien qu'elle n'ait rien à voir avec un rayon, celui-ci n'étant pas définissable par rapport à (3.6). Mais les abus de notions ne sont pas encore terminés. Le paramètre de Levi-Civita subit un troisième avatar sur l'intervalle $]0, 2\mu[$, car il représente alors la coordonnée temporelle. Comme l'écrit N. Rosen [21] : "It is hard to understand how this co-ordinate, so defined in a spacelike manner, suddenly changes its character at the value 2μ and becomes timelike (although the circle remains spacelike)". L'espace, qui était identifié de façon abusive à la variété à bord $[0, +\infty[\times S^2$, se transforme maintenant en un cylindre à trois dimensions $\mathbf{R} \times S^2$ et le "centre" est défini par l'instant $r = 0$! On ne sait plus de quoi on parle. Les relativistes sont obsédés par cette valeur $r = 0$, car, quelle que soit la situation, elle représente à leurs yeux un point, le fameux centre de la source, bien qu'elle définisse toute une sous-variété de dimension 3. Le centre disparaît du moment où l'on abandonne définitivement la variété du problème, à savoir l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, au profit de la variété à bord $\mathbf{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ dont le bord n'a aucune signification physique. Ayant entériné cette erreur topologique, les relativistes cherchent ensuite à justifier "la pathologie des coordonnées de Schwarzschild" afin d'attribuer une existence à cet objet imaginaire, appelé un trou noir, une boule de matière qui s'effondre subitement à l'intérieur de "l'horizon $r = 2\mu$", sans avoir pourtant ni centre ni rayon, c'est-à-dire sans avoir une existence par rapport à la métrique de Schwarzschild qui est censée assurer sa formation. Il s'agit là d'une situation d'autant plus paradoxale que "les rayonnements ne peuvent pas sortir de l'horizon", tandis que la gravitation, qui est censée obéir à la même loi de propagation que la lumière, se propage partout sans rencontrer des obstacles.

La notion de coordonnées pathologiques est un non-sens mathématique, et les relativistes la maintiennent délibérément dans le vague avec des justifications contradictoires, afin de se permettre d'utiliser tantôt la métrique de Schwarzschild, qui sert toujours de référence, tantôt d'autres métriques résultant de celle-ci par des transformations contenant des singularités, donc inadmissibles, pour éliminer la "singularité fictive $r = 2\mu$". En fait cette élimination n'est qu'apparente et de plus le paramètre de Levi-Civita y figure toujours directement ou indirectement rendant impossible la formulation du problème. Parmi les métriques qui s'en déduisent ainsi, il convient d'en citer celle de Kruskal [16] qui est très en faveur chez les théoriciens des trous noirs [20]. Kruskal commence par se poser la question de savoir quelle est "la variété maximale sur laquelle la métrique de Schwarzschild peut s'étendre sans singularités". Evidemment c'est un faux problème, car la variété de base est bien définie, il s'agit de la variété $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, et il est tout à fait impensable d'en chercher une autre plus grande. En fait le problème insolite de Kruskal est formulé sur la base de l'erreur signalée précédemment, à savoir l'abandon de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ au profit de la variété à bord $\mathbf{R} \times [0, +\infty[\times S^2$.

La "variété maximale de Kruskal" est aussi une variété à bord définie de la façon suivante : Soient H l'hyperbole d'équation $v^2 - u^2 = 1$ dans le plan $\mathbf{R}^2$ de (u, v), et U la composante connexe de $\mathbf{R}^2 - H$ qui contient l'origine. Alors si l'on note $\bar{U}$ l'adhérence de U, la variété de Kruskal est le produit $\bar{U} \times S^2$. En ce qui concerne la métrique correspondante, elle s'écrit

$$ds^2 = \frac{32\mu}{r}\, e^{\frac{-r}{2\mu}}\, (dv^2 - du^2) - r^2\, d\omega^2,$$

où le paramètre de Levi-Civita doit être remplacé par la fonction de (u, v) qui s'obtient en résolvant par rapport à r l'équation

$$(\frac{r}{2\mu} - 1)\, e^{\frac{r}{2\mu}} = u^2 - v^2.$$

La singularité $r = 2\mu$ ne figure pas dans la métrique, mais c'est une fausse apparence. En effet, la métrique de Kruskal doit être considérée avec une constante arbitraire A au lieu de 2μ, et alors la détermination de A nécessite le calcul des distances, ce qui entraîne le retour à la métrique de Schwarzschild et fait réapparaître la singularité $r = 2\mu$. Pour ce qui concerne les caractéristiques géométriques de la métrique de Kruskal, en voici quelques-unes d'assez paradoxales : le fameux centre est représenté par les deux branches de l'hyperbole H. L'espace physique présente des allures différentes suivant que $| v | \leq 1$ ou $| v | > 1$; pour $| v | \leq 1$, il est un cylindre à trois dimensions, tandis que, pour

$\mid v \mid > 1$, il est un espace non connexe, réunion de deux demi-cylindres à trois dimensions. Enfin "l'horizon (la sphère) de Schwarzschild $r = 2\mu$" est défini par les deux droites $u = \pm v$.

Parmi les études qui traitent d'un point de vue critique les extensions analytiques de la solution de Schwarzschild, il convient surtout de mentionner un article de J.M. Souriau [23], qui introduit toute une classe de prolongements généralisant le schéma de Kruskal et met au clair les contradictions qui en résultent lorsqu'on essaie d'y associer des interprétations géométriques et physiques. En examinant le problème de tout côté, J.M. Souriau constate en particulier que "cette matière "immobile" va en même temps plus vite que la lumière". En outre il met en exergue les problèmes relatifs à la notion fondamentale de connexité : "La principale difficulté d'interprétation de la solution de Kruskal généralisée vient du fait que la surface de l'astre n'est pas connexe : elle se compose de deux nappes disjointes, dont l'une est dans le futur de l'autre ... On lève ces difficultés ..., mais c'est en en créant de nouvelles. En effet, les variétés connexes ainsi construites ne sont pas simplement connexes (leur groupe de Poincaré est $\mathbf{Z}$) ; ceci permet une circonstance paradoxale : il est impossible de distinguer continûment et globalement les vecteurs de futur de ceux de passé".

La métrique de Kruskal tourne en aberrations les notions mathématiques les plus simples et les plus élémentaires. On retrouve d'ailleurs cette situation dans toutes les tentatives mises en oeuvre pour "régulariser" la métrique de Schwarzschild afin de faire croire que celle-ci est valable aussi pour $0 < r < 2\mu$. En fait les défauts de la métrique de Schwarzschild sont irrémédiables même pour $r > 2\mu$ à cause du paramètre de Levi-Civita qui, comme nous l'avons déjà constaté, rend impossible la formulation des conditions initiales et des conditions aux limites du problème. Bien entendu la prise en considération des valeurs $r \leq 2\mu$ a aggravé la situation en entourant d'une mystification le paramètre de Levi-Civita qui, sans être une coordonnée du tout, est présenté tantôt comme coordonnée radiale, tantôt comme distance, tantôt comme coordonnée temporelle.

La théorie des trous noirs ne pourrait jamais exister sans le paramètre de Levi-Civita et les aberrations logiques et mathématiques entérinées depuis longtemps pour régulariser la métrique de Schwarzschild. Cependant elle s'est imposée progressivement et, en envahissant les revues de vulgarisation, s'est transformée en une idéologie dominante. Cette situation ne manque tout de même pas de choquer beaucoup de spécialistes.. Comme le remarque S. Mavridès : "La singularité cosmologique (Bing Bang) est tout à fait semblable à la singularité qui se trouve dans l'horizon d'un trou noir ... De telles prédictions théoriques sont détestables. Ce qui les rend encore plus repoussantes c'est qu'elles sont censées se produire dans un passé fini" [19].

La situation se présente sous un jour nouveau dès que l'on abandonne le paramètre de Levi-Civita en utilisant la métrique riemannienne (3.3) sans mutilation. Le champ extérieur d'une source sphérique statique est alors défini par les équations d'Einstein relatives à la métrique spatio-temporelle correspondante :

$$ds^2 = (f(\rho))^2 \, d\tau^2 - \left[\left(\frac{g(\rho)}{\rho} \right)^2 dx^2 + \left((l(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho} \right)^2 \right) \frac{(xdx)^2}{\rho^2} \right]$$

avec $f(\rho) > 0$ et $l(\rho) > 0$ pour tout $\rho \geq 0$, $g(\rho) > 0$ pour tout $\rho > 0$, $g(0) = 0, g'(0) = l(0), g''(0) = 2l'(0)$. D'après le calcul effectué dans [26], si la source n'est pas chargée et si l'on suppose $\lambda = 0$, les fonctions inconnues f, l, g satisfont aux deux relations

$$\left(\frac{dg(\rho)}{d\rho} \right)^2 = (l(\rho))^2 \left(1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} \right) \quad , \quad f(\rho) l(\rho) = c \, \frac{dg(\rho)}{d\rho}, \tag{3.7}$$

dont la première entraîne $g(\rho) \geq 2\mu$, la valeur $g(\rho) = 2\mu$ étant ensuite exclue en vertu de la deuxième. Par conséquent la valeur $g(\rho) = 2\mu$ ne représente pas un rayon, mais une borne inférieure impossible à atteindre pour le rayon de courbure du bord sphérique de la boule de matière. *Le problème de savoir si un trou noir est susceptible de se former ne se pose même pas.* D'autre part, puisque la fonction $g(\rho)$ s'annule uniquement pour $\rho = 0$, il en résulte que notre solution est incompatible avec la notion de masse ponctuelle. Il s'agit là d'une clarification conceptuelle significative, car la solution de Schwarzschild et ses variantes sont supposées définir indifféremment le champ d'une boule de matière ou le champ d'un point matériel [1], [9], [21], [22].

La richesse de la solution générale pour le champ statique extérieur rend possible en particulier le choix de la distance $\delta(\rho)$ comme coordonnée radiale, distance qui est inconcevable par rapport à la métrique de Schwarzschild. Il suffit pour cela de prendre $l(\rho) = 1$ aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la matière. Nous obtenons alors la solution explicitée dans [24] et [26], qui présente un intérêt incontestable : d'une part elle permet la comparaison du champ gravitationnel d'Einstein avec celui de Newton. D'autre part elle conduit à la détermination des fonctions $g(\rho)$ et $f(\rho)$ au moyen d'une nouvelle constante ρ_0 dont la valeur s'obtient par la donnée de la valeur de $g(\rho)$ –considérée comme condition initiale–

sur le bord de la matière. Aux différentes valeurs de ρ_0 correspondent des états statiques différents du champ gravitationnel. Nous voyons ainsi que le champ einsteinien est beaucoup plus riche que le champ newtonien. Mais il s'agit là encore d'un aspect particulier du problème. De façon plus générale, pour la même masse et la même charge de la source, le champ est susceptible d'une infinité d'états stationnaires. Le passage d'un état stationnaire à l'autre ne peut se réaliser que par des états non stationnaires. Ceux-ci seront déterminés dans la deuxième partie de cet article par une étude plus poussée de la métrique spatio-temporelle et des équations d'Einstein.

En définitive nous constatons que l'introduction du paramètre de Levi-Civita a effacé la fonction fondamentale du problème, à savoir le rayon de courbure $g(\tau, \rho)$ qui, en tant que grandeur non euclidienne, engendre tout ce qui est essentiel dans la conception einsteinienne du champ gravitationnel. La situation qui s'en est découlée n'a probablement pas sa pareille dans l'histoire de la physique théorique. Si celle-ci réduisait les fonctions inconnues à des paramètres, ses équations perdraient toute leur signification. Qui est-ce qui peut prétendre, par exemple, que, en prenant $u(t, x) \equiv x$, on obtient la solution de l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0?$$

Cependant c'est exactement cette affirmation naïve que l'on doit mettre en parallèle avec l'introduction du paramètre de Levi-Civita. La solution de Schwarzschild est aussi une solution naïve sans signification physique, mais la tradition qu'elle a occasionnée reste profondément enracinée, d'où la tendance de maintenir à son appui le théorème de Birkhoff ne serait-ce que sous forme d'un énoncé vérifiable a posteriori moyennant les solutions des équations d'Einstein.

Nous allons discuter ce point de vue en considérant en premier lieu la solution statique générale (3.7), d'où l'on peut déduire des solutions particulières étudiées dans [24] et [26].

On doit d'abord poser correctement le problème en distinguant la *solution mathématique* de la *solution physique*. La première est définie pour $\rho \geq \rho_0$, en désignant par ρ_0 la constante, positive ou négative, pour laquelle $g(\rho_0) = 2\mu$, ce qui entraîne aussi $g'(\rho_0) = 0$. La deuxième est définie pour $\rho \geq \sigma_0, (\sigma_0 > 0, \sigma_0 > \rho_0)$ en désignant par σ_0 le rayon de la boule de matière. Mais alors quand on affirme que la solution des équations d'Einstein se ramène à la métrique de Schwarzschild, de quelle solution s'agit-il ? De la solution mathématique ou de la solution physique ? Il semble raisonnable de prendre en considération uniquement la solution mathématique qui contient toutes les solutions physiques possibles. Ainsi la "vérification" du théorème de Birkhoff équivaut à l'affirmation suivante : il existe un difféomorphisme global de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ qui transforme la solution mathématique générale (3.7), considérée dans son intégralité, en une solution qui se ramène à la métrique de Schwarzschild si l'on passe ensuite en coordonnées sphériques. Cela dit, on distingue deux cas :

a) Si $\rho_0 < 0$, les valeurs de ρ dans l'intervalle $[\rho_0, 0[$ n'ont pas de signification géométrique, car la coordonnée radiale $\rho = \| x \|$ parcourt la demi-droite $[0, +\infty[$. Par conséquent il n'existe aucun difféomorphisme de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ susceptible d'être appliqué à la totalité de la solution mathématique.

b) Si $\rho_0 \geq 0$, tout difféomorphisme de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ est applicable sur la totalité de la solution mathématique. Mais un tel difféomorphisme ne peut jamais donner lieu à la solution de Schwarzschild, car celle-ci nécessite l'utilisation de la transformation de Levi-Civita qui introduit, pour $\rho = \rho_0$, une discontinuité à cause de l'annulation de la dérivée $g'(\rho_0)$.

L'impossibilité de réduire par des difféomorphismes la solution mathématique (3.7) à la solution de Schwarzschild nous dispense d'autres considérations plus poussées : par exemple, si une telle réduction était possible, il serait hors de question de considérer ces deux solutions comme équivalentes, car la première contient toutes les constantes arbitraires et toutes les fonctions arbitraires résultant de l'intégration des équations d'Einstein, tandis que la deuxième est appauvrie au maximum. De toute façon on voit qu'il n'existe aucun moyen de "vérifier" a posteriori le théorème de Birkhoff par des transformations admissibles de la solution mathématique. La question est donc réglée, mais on peut encore l'envisager dans un sens plus étroit en restreignant les difféomorphismes à la solution physique. Nous pensons qu'une telle approche n'est pas justifiée, car elle contredit quelques principes élémentaires et comporte des dangers, comme nous le verrons dans un instant. Toutefois nous allons la discuter afin d'épuiser tous les aspects du problème.

Cela dit, voici le raisonnement sous-jacent à l'utilisation de la solution physique : la solution mathématique prouve que la valeur $g(\rho_0) = 2\mu$ pour laquelle $g'(\rho_0) = 0$ ne peut pas se réaliser sur le bord et à l'extérieur de la matière, de sorte que, si σ_0 est le rayon de la source, nous avons $g'(\rho) > 0$ pour tout $\rho \geq \sigma_0$. Par conséquent il est possible de résoudre l'équation $g(\rho) = r$, pour $\rho \geq \sigma_0$, et d'introduire r comme "coordonnée radiale" à l'extérieur de la matière, ce qui conduit à une métrique se réduisant à la métrique de Schwarzschild si l'on passe ensuite en coordonnées sphériques, conformément à l'énoncé du théorème de Birkhoff. En fait nous définissons ainsi un difféomorphisme de la demi-droite $[\sigma_0, +\infty[$ sur la demi-droite $[g(\sigma_0), +\infty[$, tandis qu'une coordonnée radiale parcourt toujours la demi-droite $[0, +\infty[$. Faute de connaître la solution physique $g(\rho)$ pour $0 \leq \rho < \sigma_0$ (d'ailleurs même si l'on parvenait à la déterminer, la condition $g'(\rho) > 0$ ne serait probablement pas valable pour tout $\rho \in [0, \sigma_0[$), on est obligé de prolonger le difféomorphisme obtenu d'une façon quelconque en un difféomorphisme global sur $[0, +\infty[$. Quoi qu'il en soit un tel difféomorphisme, en raison du difféomorphisme de départ :

$$[\sigma_0, +\infty[\rightarrow [g(\sigma_0), +\infty[,$$

dépend des valeurs σ_0 et $\zeta_0 = g(\sigma_0)$ qui constituent les conditions initiales du problème, et d'ailleurs c'est uniquement sa restriction à $[\sigma_0, +\infty[$ qui intervient dans la transformation envisagée de la métrique. En d'autres termes nous faisons intervenir les conditions initiales dans la définition de la "nouvelle coordonnée radiale", de sorte que nous utilisons en fait non pas un difféomorphisme mais une infinité de difféomorphismes. On sait que les coordonnées sont utilisées pour définir, entre autres, les conditions initiales et les conditions aux limites. Maintenant on définit les coordonnées en fonction des conditions initiales. Une telle pratique est inadmissible en physique théorique. On peut l'accepter à la rigueur avant la formulation définitive du problème et de toute façon pourvu que les conditions initiales et les conditions aux limites soient respectées. (Ce sera le cas pour une classe de transformations $\tau = \xi(t, \| x \|)$ portant uniquement sur la coordonnée temporelle, qui seront utilisées dans la deuxième partie du présent article). Une fois le problème formulé et sa solution établie, la modification des coordonnées par l'intermédiaire des conditions initiales risque de dénaturer complètement le problème. En particulier dans le cas actuel elle donne lieu à une transgression de principes élémentaires : en introduisant, pour chaque valeur de σ_0, le paramètre de Levi-Civita sur la demi-droite $[\sigma_0, +\infty[$, on détruit les conditions initiales et les conditions aux limites par la suppression de la coordonnée radiale. En particulier la relation $\rho \geq \sigma_0$ disparaît complètement. En ce qui concerne la relation $g(\rho) \geq \zeta_0$, elle se trouve remplacée par la condition $r \geq \zeta_0$ et, puisque $\zeta_0 > 2\mu$, la métrique transformée n'est plus la métrique classique de Schwarzschild, supposée définie pour tout $r > 0$, mais la métrique de Schwarzschild amputée de la partie $r < \zeta_0$ qui contient "l'horizon $r = 2\mu$". Ainsi, même en passant outre aux principes qui forment la base de nos raisonnements, nous n'arrivons pas à vérifier a posteriori le théorème de Birkhoff sous une forme cohérente.

Des remarques analogues aux précédentes sont aussi valables pour la solution non stationnaire qui sera établie dans la deuxième partie de cet article en prenant pour base un choix particulier, mais probablement le meilleur possible, de la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels. Le pendant de la solution de Schwarzschild est alors la métrique d'Eddington-Finkelstein (à condition de supposer $e = 0$ et $\lambda = 0$). La réduction de la solution mathématique, au moyen de difféomorphismes, à cette métrique est toujours impossible. En ce qui concerne la transformation de la solution physique, elle sera encore basée sur l'introduction du paramètre de Levi-Civita à l'extérieur de la matière par l'intermédiaire des conditions initiales, à savoir du rayon $\sigma(\tau)$ et du rayon de courbure $\zeta(\tau) = g(\tau, \sigma(\tau))$ du bord sphérique de la matière. Rien d'étonnant si l'on dénature ainsi complètement le problème en transformant une solution non stationnaire en solution stationnaire. La coordonnée radiale étant supprimée, la condition $\rho \geq \sigma(\tau)$ disparaît de la solution. Pour ce qui concerne la relation $g(\tau, \rho) \geq \zeta(\tau)$, elle est remplacée par la condition $r \geq \zeta(\tau)$, qui semble assez mystérieuse par rapport à la métrique stationnaire d'Eddington-Finkelstein. D'autre part, puisque $\zeta(\tau) > 2\mu$, on trouve en réalité cette métrique amputée de la partie $r < \zeta(\tau)$ qui contient "l'horizon $r = 2\mu$". Si, malgré les transgressions de principes élémentaires, on désire voir dans ce résultat insignifiant une vérification a posteriori du théorème imprécis de Birkhoff, il faut quand même reconnaître qu'il s'agit d'une transformation purement formelle sans aucun intérêt physique.

La solution de Schwarzschild, le théorème de Birkhoff et la théorie des trous noirs constituent un système naïf et incohérent qui doit être abandonné afin de pouvoir aborder les problèmes relatifs au champ gravitationnel sur une base solide et réaliste.

Références

[1] L.S. Abrams, *Alternative space-time for the point mass,* Phys. Rev., vol. **20**, no. 10, pp. 2474-2479, 15 November 1979.

[2] P. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity,* New York, Prentice-Hall, 1942.

[3] G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics,* p. 253, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1923.

[4] W.B. Bonnor, *On Birkhoff's theorem,* Recent Developments in General Relativity, PWN Warsaw, Pergamon Press, 1962.

[5] P.W. Bridgman, *Reflections of a Scientist,* Philosophical Library, New York, 1955.

[6] P.W. Bridgman, *A Sophisticate's Primer of Relativity,* Wesleyan University Press, Middletown, Connecticut, 1962.

[7] L. Brillouin, *Relativity Reexamined,* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1970.

[8] L. de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire,* Gauthier Villars, Paris, 1956.

[9] J. Droste, *Het van een enkel centrum in Einstein's theorie der zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld,* Versl. gewone Vergad. Akad. Amst., **25**, pp. 163-180, 1916.

[10] A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems,* Phys. Zeit. **14,** pp. 1249-1262, discussion pp. 1262-1266, 1913.

[11] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation,* Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, **II,** pp. 844-847, 25 November 1915.

[12] A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie,* Annalen der Physik, **49,** pp. 769-822, 1916.

[13] F.W. Hehl, *Fermions and gravity,* dans *Einstein 1879-1955, Colloque du Centenaire, Collège de France, 6-9 Juin 1979,* pp. 119-148, Editions du C.N.R.S., Paris, 1980.

[14] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik : Zweite Mitteilung,* Göttingen Nach., pp. 53-76, 1917.

[15] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[16] M.D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric,* Phys. Review, vol. **119**, September 1, pp. 1743-1745, 1960.

[17] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs,* éditions Mir, Moscou, 1970.

[18] T. Levi-Civita, Atti della R. Acc. dei Lincei, 2 sem., vol. **5**, pp. 164-171, 1896.

[19] S. Mavridès, *Les concepts de la physique dans la cosmologie contemporaine* dans *La pensée physique contemporaine,* édité par S. Diner, D. Fargue, G.

Lochak, Fondation Louis de Broglie, éditions Augustin Fresnel, pp. 59-79, 1982.

[20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation,* W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[21] N. Rosen, *The Field of a Particle in General Relativity Theory,* Il nuovo Cimento, vol. **72 B**, N. 1, pp. 51-67, 11 Novembre 1982.

[22] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie,* Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, **II**, pp. 189-196, 1916.

[23] J.M. Souriau, *Prolongements du champ de Schwarzschild,* Bull. Soc. Math. France, t. 93, Fasc. 3, pp. 193-207, 1965.

[24] N. Stavroulakis, *A Statical Smooth Extension of Schwarzschild's Metric,* Lettere al nuovo Cimento, vol. **11,** N. 8, pp. 427-430, 26 Ottobre 1974.

[25] N. Stavroulakis, *Exact solution for the field of a pulsating source,* Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups, vol. **1,** pp. 74-75, 9th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, July 14-19, Jena, 1980.

[26] N. Stavroulakis, *Paramètres cachés dans les potentiels des champs statiques,* Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. **6,** no. 4, pp. 287-327, 1981.

[27] N. Stavroulakis, *Space-time metrics related to the generation and propagation of gravitational waves,* Contributed Papers, vol. **1,** pp. 135-137, 10th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, 4-9 July, Padova, 1983.

[28] N.Stavroulakis, *O(n)-invariant and SO(n)-invariant tensor fields in General Relativity,* Abstracts of contributed Papers, vol. **1,** p. 387, 11th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, July 6-12, Stockholm, 1986.

[29] N. Stavroulakis, *Mathématiques et trous noirs,* Gazette des mathématiciens, no. 31, pp. 119-132, Juillet 1986.

[30] H. Weyl, *Space-time-matter,* First American Printing of the Fourth Edition (1922), Dover Publications, Inc.

Manuscrit reçu le 17 avril 1986