

## La géométrie des particules du groupe $SU(2)$ et l'algèbre réelle d'espace-temps

R. BOUDET

UER Mathématiques  
Université de Provence,  
Pl. V. Hugo 13331 Marseille Cedex 13

RESUME. Ce mémoire récapitulatif concerne les liens qui unissent les particules à symétrie interne, ainsi que la constante de Planck, avec la structure euclidienne de l'espace-temps  $M$ . A cet effet, une description géométrique complète de l'électron de Dirac, et de l'énergie locale qui lui est associée, est faite, et son extension aux particules relevant du groupe  $SU(2)$  abordée. Le repère propre local  $\mathcal{R}(x)$  de la particule, défini en chaque point  $x$  de  $M$ , formé de la quadrivitesse  $v^\mu(x)$ , du quadrivecteur spin ou isospin  $s^\mu(x)$ , et du plan  $\mathcal{P}(x)$  orthogonal en  $x$  à  $v^\mu$  et  $s^\mu$ , y joue un rôle essentiel. L'énergie locale et la constante  $\hbar$  apparaissent comme liées à la rotation infinitésimale de  $\mathcal{R}(x)$ , et aussi à une transformation euclidienne mais ne relevant pas du groupe orthogonal  $O(M)$ , intéressant les tenseurs antisymétriques d'ordre deux, la "rotation de dualité". Une telle étude nécessite l'abandon du formalisme des spineurs et matrices de Dirac, au profit d'une algèbre réelle, à la fois euclidienne, multivectorielle et associative, l'algèbre de Clifford  $C(M)$  associée à  $M$ .

### INTRODUCTION.

#### 1 - Plaidoyer pour l'usage d'une algèbre réelle géométrique

Les outils algébriques, habituellement utilisés par les physiciens, sont-ils les plus appropriés pour traduire les relations qui unissent la Physique aux structures euclidiennes de l'Espace  $E^3$  et de l'Espace-Temps de la Relativité  $M$  ?

C'est ce que peut penser le néophyte abordant l'étude de la Mécanique Quantique, au regard des questions naïves qui ne manquent pas de lui venir immédiatement à l'esprit : pourquoi l'équation de Schrödinger est-elle complexe par essence ? D'où viennent ces étranges matrices de Dirac ? Sur quoi opèrent celles de Pauli ? Quelles sont les diverses réalités qui se dissimulent derrière le

symbole  $i = \sqrt{-1}$ , souvent employé, et parfois dans une même équation, avec des significations manifestement différentes ?

On peut certes tenir ces questions pour inutiles, dès lors qu'on estime satisfaisant tout algorithme permettant de retrouver par le calcul le résultat d'une expérience. Mais on peut aussi se demander si une démarche algébrique épousant étroitement les propriétés géométriques des espaces euclidiens, ne serait pas susceptible d'apporter, outre des clarifications et simplifications agréables, la réponse à des questions plus fondamentales comme celle-ci : qu'entendons-nous par le mot énergie ?

L'importance des structures euclidiennes en Physique apparaît en particulier par le rôle de plus en plus grand qu'y jouent les groupes orthogonaux ; et là encore on peut se demander si la méthode utilisée par les physiciens, celle des représentations par des matrices orthogonales ou unitaires, est la plus judicieuse. D'une part, la méthode matricielle ne constitue pas la meilleure approche de l'étude des propriétés du groupe orthogonal  $O(E)$  d'un espace euclidien  $E$ , mais il y a plus. Il existe des groupes de transformations, liés à la structure euclidienne de  $E$ , et qui cependant sont distincts de  $O(E)$ . Si certains de ces groupes jouent un rôle en Physique -et c'est le cas- comment les traduire correctement en regard de leur signification géométrique, par les méthodes matricielles ? Ne risque-t-on pas des ambiguïtés pouvant mener à des contresens, notamment dans les théories de jauges, comme par exemple la désignation par  $U(1)$  indifféremment d'un sous-groupe de rotations de l'Espace-Temps  $M$  (exprimant la jauge électromagnétique), et du groupe des "rotations de dualité" (voir plus loin) de  $M$  (correspondant à la jauge chirale), qui a une signification géométrique et physique tout à fait différente ?

*Il conviendrait donc de n'utiliser que des algèbres réelles opérant, sans aucun intermédiaire, sur les seuls éléments géométriques qu'on peut associer à  $E^3$  et  $M$ , à savoir les scalaires et les portions orientées de droites, plans, volumes, hypervolumes et leurs combinaisons, représentés par les multivecteurs (ou tenseurs antisymétriques) de  $M$ , d'ordre 0 à 4.*

Une algèbre réelle, associée uniquement à la structure de  $M$ , est-elle suffisante pour exprimer toutes les équations de la Physique ? On serait tenté de répondre par la négative devant la complexité de certains groupes comme  $SU(3)$  et  $SU(5)$ , utilisés en théorie des particules. Mais ces groupes peuvent être traduits très naturellement dans l'algèbre réelle géométrique que nous allons employer, et le recours à une telle algèbre garantit la conformité à la structure

euclidienne de l'espace-temps.

## 2 - La géométrie des particules

Le présent article concerne les relations qui peuvent exister entre les équations et les constantes (en particulier la constante de Planck  $h$ ) de la Physique et la structure euclidienne de l'Espace-Temps  $M$ . Nous avons pour cela effectué une description entièrement géométrique de l'électron de Dirac plongé dans un champ extérieur, et de l'énergie locale qui lui est associée. Mais à travers ce cas particulier, c'est une approche systématique de l'ensemble des théories de jauge et de classification des particules qui est suggérée, dans laquelle les propriétés de groupes de transformation relevant exclusivement de la géométrie de l'Espace-Temps, seraient utilisées.

**3** - Les variables indépendantes de tout repère galiléen, et les *diverses* équations qu'elles vérifient, qu'on peut associer à la fonction d'onde  $\psi$  et à l'équation de Dirac, ont fait l'objet de nombreuses études, en particulier de l'Ecole L. de Broglie. Mais la construction d'une *unique* équation invariante ( $D$ ), équivalente à l'équation de Dirac, nécessite l'emploi d'une algèbre  $C(M)$  associée à l'espace-temps  $M$  et géométriquement bien appropriée, dont l'utilisation en Physique est moins connue, et qui fera l'objet de la première partie de l'exposé.

L'équation ( $D$ ) fait intervenir, définis en chaque point  $x$  de  $M$ , outre la densité  $\rho$  et le "mystérieux" angle  $\beta$  d'Yvon-Takabayasi, le "repère propre"  $\mathcal{R}(x) = \{\vec{v}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{s}\}$  de la particule, qui est un repère mobile orthonormal, formé en chaque point  $x$  de  $M$ , de la quadrivitesse  $v^\mu$ , du quadrivecteur spin  $s^\mu$ , et de deux autres vecteurs orthogonaux  $n_1^\mu, n_2^\mu$ , ainsi que la rotation infinitésimale  $\Omega$  du repère  $\mathcal{R}(x)$ . Les composantes de cette rotation, divisées par 2, et multipliées par  $\rho\hbar$ , se retrouvent dans trois des valeurs  $\rho T_\nu^\mu v^\nu, \rho T_\nu^\mu n_1^\nu, \rho T_\nu^\mu n_2^\nu$  du tenseur  $\rho T$  d'impulsion-énergie (tenseur de Tetrode). Ainsi, l'énergie locale, en théorie de Dirac peut apparaître comme essentiellement ce qui fait tourner le repère propre -plus précisément le plan orienté  $\mathcal{P}(x)$  de ce repère, défini en chaque point  $x$  par les vecteurs  $n_1^\mu, n_2^\mu$  - la constante de Planck ne tenant le rôle que d'un facteur de conversion d'une demi-variation angulaire infinitésimale en énergie.

La quatrième valeur  $\rho T_\nu^\mu s^\nu$  de  $\rho T$  est égale au produit par  $\rho\hbar$  de la moitié du gradient de  $\beta$ , ce qui n'éclaire pas le mystère de cet angle. Sauf si l'on considère l'énergie locale comme exprimée par les demi-composantes de l'opérateur infinitésimal, au point  $x \in M$ , d'un champ  $\phi(x)$  de transformations appartenant à un groupe  $G$  qui possède la propriété suivante. Quand ces transformations sont

relatives à des vecteurs de  $M$ ,  $G$  se réduit au groupe  $SO^+(M)$  des rotations de Lorentz orthochrones. Quand elles sont relatives à des tenseurs antisymétriques d'ordre deux,  $G$  est *isomorphe* à  $U(1) \times SO^+(M)$ , où  $U(1)$  *correspond* à un groupe de transformations, *spécifique de  $C(M)$* , le groupe des "rotations de dualité de  $M$  d'angle  $\beta$ ".

La fonction d'onde  $\psi$ , quand elle est écrite dans  $C(M)$  de la façon la plus simple possible, n'est autre que le produit par  $\rho^{1/2}$  du champ  $\phi$ .

Une propriété du groupe  $G$  est de relier de façon cohérente les deux jauges de la théorie de Dirac, la jauge électromagnétique (invariante par l'addition d'un gradient au quadripotentiel), qui a pour effet de faire tourner les vecteurs  $n_1^\mu$ ,  $n_2^\mu$  dans le plan  $\mathcal{P}(x)$ , et la deuxième jauge, la jauge chirale, liée à l'angle  $\beta$  (sa symétrie est brisée par l'existence d'une masse pour l'électron), dont l'effet géométrique est une "rotation de dualité" du bivecteur  $\sigma^{\mu\nu} = n_1^\mu n_2^\nu - n_2^\mu n_1^\nu$  et de son dual  $\hat{\sigma}^{\mu\nu} = s^\mu v^\nu - v^\mu s^\nu$ . De ce point de vue, le passage de l'électron au positron peut être décrit de la façon suivante, qui est toute différente de celle utilisant les transformations  $C$ ,  $P$ ,  $T$ , et en particulier, contrairement à ces dernières, sans recours à un repère privilégié de  $M$  :

L'invariance de la jauge électromagnétique exige que le changement du signe de la charge soit accompagné de celui de l'orientation du plan  $\mathcal{P}(x)$ . L'invariance de l'équation de Dirac, concernant son terme de masse, impose alors, soit le changement de sens du quadrivecteur courant  $\rho v^\mu$ , soit l'addition de la constante  $\pi$  à l'angle  $\beta(x)$ . Or cette dernière opération, considérée comme une "rotation de dualité" d'angle  $\pi$ , a justement pour effet d'entraîner l'inversion de l'orientation de  $\mathcal{P}(x)$ , et la cohérence des deux jauges est ainsi assurée, sans qu'il soit nécessaire de supposer que le positron est une particule qui remonte le temps.

En résumé, la constante  $\hbar$ , multipliée par  $1/2$ , apparaît en facteur des éléments de l'algèbre de Lie du groupe  $G$ , et si on veut associer  $G$  exclusivement à la structure euclidienne de  $M$ , il faut le considérer, par l'intermédiaire de  $C(M)$ , comme un groupe de transformations opérant sur les multivecteurs (tenseurs antisymétriques) de  $M$ .

Le schéma géométrique de la particule de Dirac se généralise aux particules relevant du groupe  $SU(2)$ . On associe comme précédemment à ces particules un repère propre local  $\mathcal{R}(x)$ , dont le vecteur temps  $v^\mu$  coïncide avec la direction en  $x$  du courant. Mais la direction du vecteur  $s^\mu$ , et corrélativement celle du plan  $(n_1^\mu, n_2^\mu)$  n'est plus privilégiée. Un vecteur  $s'^{\mu}$ , le spin isotopique, peut

se déplacer dans l'espace orthogonal en  $x$  à  $v^\mu$ , celui-ci constituant un "espace isotopique". Le rôle de l'angle  $\beta$  demeure inchangé.

#### 4 - Un formalisme multivectoriel

Le formalisme de l'algèbre  $C(M)$ , utilisé dans cet article, ne manquera pas de paraître déroutant pour les lecteurs habitués à l'usage des spineurs et matrices de Dirac (le lecteur non averti des équations de la Mécanique Quantique éprouvera moins de difficultés), et les notations (exclusivement vectorielles ou multivectorielles) irritantes parce que peu usitées en Physique.

Pourtant ce formalisme et ces notations ne sont pas nouveaux. Ils sont la simple généralisation de ceux de la théorie des quaternions, ces objets étant à considérer ici au sens *vectoriel* donné par leur inventeur Hamilton [1], et surtout pas au sens matriciel de Pauli. Ils constituent l'instrument privilégié par les mathématiciens pour l'étude des propriétés des espaces euclidiens [2].

Bien qu'ils décourageront (malgré leur simplicité) une bonne proportion de lecteurs, il nous était impossible de ne pas les employer. D'abord parce que le spineur de Dirac est un être mathématique géométriquement compliqué et ambigu, que l'on doit éliminer de toute façon dès qu'on adopte un point de vue géométrique sur la théorie de Dirac et les théories de classification des particules. Ensuite parce que la présence, explicite ou cachée, dans les théories de jauge, de l'angle  $\beta$  impose une rupture dans notre habitude de penser la structure euclidienne d'un espace  $E$  comme affectant les seuls vecteurs de  $E$ . Cette structure affecte *aussi* les multivecteurs d'ordre quelconque de  $E$ , en particulier les bivecteurs qui interviennent dans la définition des moments cinétiques et du spin et pour l'étude des transformations correspondantes les méthodes matricielles ne sont plus suffisantes.

Nous avons néanmoins traduit en notations tensorielles courantes les *diverses* équations intrinsèques qu'on peut associer à l'équation de Dirac. Cette traduction est impossible pour l'équation ( $D$ ), qui est à valeurs dans  $C(M)$ . On trouvera aussi les relations de passage des spineurs d'Hestenes (qui représentent de la façon la plus simple, les éléments du groupe  $G$  ci-dessus) aux spineurs de Dirac. La connaissance de ces derniers n'est pas nécessaire pour la compréhension de l'article, qui ne nécessite aucune autre connaissance algébrique que les règles élémentaires (produits extérieur et intérieur) de calcul sur les tenseurs anti-symétriques d'un espace euclidien.

Ceci dit, bien qu'il nous paraisse comme algébriquement le plus approprié, nous n'attachons pas une importance fondamentale à ce formalisme, et nous avons conscience de l'inconvénient que représente un idiome de plus dans cette tour de Babel qu'est devenue la Physique. C'est la deuxième raison pour laquelle nous avons parallèlement employé le langage plus général des constructions géométriques euclidiennes élémentaires.

Ainsi les groupes d'invariance de jauge  $U(1)$  de l'électromagnétisme, et  $SU(2)$  du modèle de Weinberg et Salam, pourront être décrits par des expressions comme :

- "il n'existe pas de direction privilégiée dans le plan orthogonal au quadricourant  $v$  et au vecteur  $s$  orthogonal à  $v$ ",
- "il n'existe pas, de plus, dans l'espace orthogonal à  $v$ , de direction privilégiée pour le vecteur  $s$ ".

Nous pensons que de telles images devraient permettre à tout le monde de s'y reconnaître, et à chacun d'en réaliser une traduction précise dans le formalisme qui lui convient le mieux.

## I - L'ALGÈBRE REELLE D'ESPACE-TEMPS

### 5 - Nécessité d'une algèbre multivectorielle euclidienne associative

Une illustration de la nécessité d'une algèbre multivectorielle, à la fois euclidienne et associative, peut être faite sur la "Théorie Hydrodynamique de l'Equation de Dirac" (à laquelle de nombreuses études, en particulier de l'Ecole de L. de Broglie, ont été déjà consacrées) :

L'équation et la fonction d'onde  $\psi$  de Dirac sont relatives à un repère galiléen arbitraire. La réalité physique ne peut dépendre d'un tel repère, aussi, dès la publication de cette équation, a-t-on cherché à déduire de  $\psi$  des grandeurs invariantes dans tout changement de repère, telles que la densité  $\rho = [(\bar{\psi}\psi)^2 + (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]^{1/2}$ ,<sup>1</sup>. Le quadrivecteur courant  $\rho v^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , le quadrivecteur spin  $s^\mu$ , tel que  $\rho s^\mu = \bar{\psi}i\gamma^5\gamma^\mu\psi$ , des tenseurs mixtes pouvant représenter l'impulsion-énergie, comme le tenseur de Tetrode  $\rho T_\nu^\mu = i(\hbar c/2)\bar{\psi}[\partial^\mu]\gamma_\nu\psi - eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$  où  $A^\mu$  est le potentiel-vecteur extérieur, ainsi que des équations, déduites de l'équation

<sup>1</sup>En coordonnées  $(x^1, x^2, x^3, x^4 = ict)$  de  $M$  ; les matrices  $\gamma_\mu$  vérifient  $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$  avec  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$ ,  $\psi^\dagger =$  conjugué hermitien de  $\psi$ .

de Dirac, auxquelles ces grandeurs pouvaient satisfaire, comme l'équation de conservation du courant ou de l'énergie ([3]).

Il semble qu'on ne se soit occupé que bien plus tard (vers 1940) de déterminer un ensemble *complet* de grandeurs et d'équations, invariantes dans tout changement de repère galiléen, correspondant à  $\psi$  et à l'équation de Dirac, et cela a été fait de façon échelonnée ([4] à [9]), les mêmes équations étant retrouvées par des voies quelquefois très différentes, et, malgré certains efforts de diffusion (voir par exemple [10], [11]), dans l'ignorance des travaux précédents.

L'ensemble des grandeurs invariantes équivalentes à  $\psi$  doit correspondre à 8 scalaires réels. Il est naturel de faire figurer parmi ces grandeurs la densité  $\rho$ , la quadrivitesse  $c\vec{v}$ , le quadrivecteur spin  $\vec{s}$ , ce qui correspond à 6 scalaires, compte tenu des contraintes imposées à  $\vec{v}$  et  $\vec{s}$  :  $v^\mu v_\mu = 1$ ,  $s^\mu s_\mu = -1$ ,  $v^\mu s_\mu = 0$ . Les deux autres scalaires ne peuvent être alors ([6], [12]) que la phase  $\chi/2$  et l'angle  $\beta$ , d'Yvon-Takabayasi, tel que  $\text{tg } \beta = -(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)/\bar{\psi}\psi$ .

L'équation ou les équations invariantes de Dirac doivent correspondre à un ensemble de 8 équations scalaires réelles.

Les équations invariantes établies dans [4] et [6] apparaissent comme dispersées et sans trop de liens entre elles. Il paraît intéressant de construire une *unique* équation invariante correspondant à l'équation de Dirac, qui évidemment ne présenterait pas ces inconvénients. Une telle équation doit de plus permettre par décompositions de retrouver toutes les autres, un sens physique pouvant être associé à chaque décomposition.

Dans quel espace une telle équation peut-elle trouver ses valeurs ? L'espace des spineurs est exclu pour des raisons de variance. L'espace cherché doit être de dimensions (réelles) en nombre *au moins égal* à 8. Il doit contenir les quadrivecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{s}$ , donc l'espace-temps  $M$ , et aussi les tenseurs contrevariants antisymétriques de  $M$ , qui apparaissent en théorie de Dirac, comme la densité de spin  $(\hbar c/2)\rho S^{\mu\nu\xi}$ , où  $\rho S^{\mu\nu\xi} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu\xi}\psi$ . L'espace cherché ne peut donc être, en tout ou partie, que la somme directe  $\wedge M = \wedge^0 M \oplus \wedge^1 M \oplus \wedge^2 M \oplus \wedge^3 M \oplus \wedge^4 M$  des espaces vectoriels des tenseurs antisymétriques d'ordre 0 à 4 (scalaires, vecteurs, bivecteurs, pseudo-vecteurs, pseudo-scalaires) de  $M$ .  $\wedge M$  est doté du produit extérieur  $\wedge$  qui est associatif mais n'est pas représentatif de la structure euclidienne de  $M$  et du produit intérieur (obtenu par contraction sur les indices) qui utilise cette structure mais n'est pas associatif, et qui par suite se prête mal à une correspondance avec l'algèbre des matrices de Dirac qui est associative. Mais  $\wedge M$  peut être doté d'un troisième produit, le produit de Clifford (voir ci-

dessus) qui est à la fois associatif et représentatif de la structure euclidienne de  $M$ .

*Ainsi l'espace vectoriel  $\wedge M$ , doté des trois lois de composition internes précédentes (extérieure, intérieure et de Clifford) apparaît comme le cadre obligé pour l'écriture de l'équation invariante de Dirac.*

Nous avons dans [7] construit cette équation à partir de la forme (non invariante), donnée par D. Hestenes dans [12] à l'équation de Dirac. Cette construction était d'autant plus aisée qu'Hestenes s'était placé dans le cadre cité plus haut pour établir son équation.

## 6 - Les algèbres réelles multivectorielles de Clifford

D'une façon générale, on peut associer à tout espace (proprement ou improprement) euclidien une algèbre  $C(E)$ , dite algèbre de Clifford de  $E$ , en dotant l'espace vectoriel  $\wedge E$  des multivecteurs d'ordre quelconque de  $E$ , d'une loi multiplicative interne, associative, non commutative (produit de Clifford), notée  $(X, Y) \rightarrow XY$ , qui lie, comme on le verra, les produits intérieur et extérieur de façon très simple.

En particulier, si  $X = \vec{x} \in E$  et  $Y = \vec{y} \in E$ , on a pour produit de Clifford  $\vec{x}\vec{y}$  de  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$

$$\vec{x}\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{y}, \quad (1)$$

où  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  est la valeur de la forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée (produit intérieur) qui définit la structure euclidienne de  $E$ .

Si  $E = E^3$ , le produit *extérieur*  $\vec{x} \wedge \vec{y}$  est le tenseur antisymétrique d'ordre 2 dual du produit *vectoriel*  $\vec{x} \times \vec{y}$ . Si  $E = M$ , espace-temps, en notation tensorielle relative à une base de  $M$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  s'écrit  $x^\mu y_\mu$  et  $\vec{x} \wedge \vec{y}$  est le tenseur de composantes  $x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu$ .

Le produit  $\vec{x}\vec{y}$  a l'aspect hybride, un peu surprenant, de la somme d'un scalaire et d'un bivecteur ! Mais, comme on le verra, son utilisation est aussi naturelle que celle des nombres complexes.

$C(E)$  est en relation étroite avec le groupe des isométries de  $E$ . Les produits de Clifford d'un nombre pair de vecteurs de  $E$ , constituent une sous-algèbre notée  $C^+(E)$ , dite paire, de  $C(E)$ , qui joue un rôle important, en relation avec le groupe  $O^+(E)$  des rotations de  $E$ , sous-groupe de  $O(E)$ .

Nous allons évoquer quelques propriétés de ces algèbres multivectorielles, qu'il convient de distinguer des algèbres de Clifford matricielles, utilisées en



mécanique quantique, qui ne permettent pas le point de vue géométrique d'où l'on se place ici.

**7** - Rappelons d'abord que le produit extérieur  $\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_p$  de  $p$  vecteurs  $\vec{x}_k$  de  $E$  est nul si et seulement si les  $\vec{x}_k$  sont linéairement dépendants, et qu'il en résulte que ce produit est alterné, la permutation de deux vecteurs arguments du produit le transformant en son opposé.

En particulier,  $\vec{x} \wedge (\lambda \vec{x}) = 0$ , et  $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ , d'où par (1),

$$\vec{y} = \lambda \vec{x} \Rightarrow \vec{x}\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad , \quad \vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}, \tag{2}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x}\vec{y} = \vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{y}\vec{x}. \tag{3}$$

Le produit  $\vec{x}\vec{y}$  est donc commutatif si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires, et on a pour tout  $\vec{x}, \vec{y}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{x}). \tag{4}$$

Il est anticommutatif si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont orthogonaux, et pour tout  $\vec{x}, \vec{y}$ ,  $\vec{x} \wedge \vec{y} = (\vec{x}\vec{y} - \vec{y}\vec{x})/2$ .

On peut déduire de cette propriété que certaines isométries particulières, importantes pour la connaissance de  $O(E)$ , admettent dans  $C(E)$  une expression très simple :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$  non isotrope, normé ( $\vec{u}^2 = \eta$  avec  $\eta = 1$  ou  $\eta = -1$ ). Alors l'application

$$\vec{x} \in E \rightarrow \vec{y} = \vec{u}\vec{x}\vec{u} \tag{5}$$

est une isométrie. En effet, posons  $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$  où  $\vec{x}_{\parallel}$  et  $\vec{x}_{\perp}$  sont respectivement parallèle et orthogonal à  $\vec{u}$ . On obtient  $\vec{y} = \vec{u}(\vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp})\vec{u} = \vec{u}^2\vec{x}_{\parallel} - \vec{u}^2\vec{x}_{\perp} = \eta(\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}_{\perp})$ .

Si  $\eta = 1$ , cette application est la symétrie  $\vec{y} = D_{\vec{u}}(\vec{x})$  par rapport à la droite colinéaire à  $\vec{u}$ , si  $\eta = -1$ , c'est la symétrie  $\vec{y} = H_{\vec{u}}(\vec{x})$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $\vec{u}$ . On a de toute façon

$$H_{\vec{u}}(\vec{x}) = -\eta\vec{u}\vec{x}\vec{u}. \tag{6}$$

On peut vérifier directement que  $\vec{y}^2 = \vec{x}^2$  par  $\vec{y}^2 = (\vec{u}\vec{x}\vec{u})^2 = \vec{u}\vec{x}(\vec{u}^2)\vec{x}\vec{u} = \eta\vec{u}(\vec{x}^2)\vec{u} = \eta^2\vec{x}^2$ .

Le produit de deux isométries telles que (5) revêt la forme dans  $C(E)$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{v}(\vec{u}\vec{x}\vec{u})\vec{v} = (\vec{v}\vec{u})\vec{x}(\vec{u}\vec{v}) = R\vec{x}\tilde{R}, \tag{7}$$

où  $R = \vec{v}\vec{u}$  et où  $\tilde{R}$  se déduit de  $R$  par l'opération, notée

$$U \rightarrow \tilde{U} \tag{8}$$

qui, consiste à inverser l'ordre des facteurs dans tout produit de Clifford de vecteurs (anti-automorphisme principal).

On sait, par un théorème de Cartan que toute isométrie de  $E$  est un produit de symétries telles que  $H_{\vec{u}}$ .

Il en résulte (voir Annexe) en particulier, que pour tout élément  $J$  du groupe  $SO^+(E)$  des rotations de  $E$  directes (si  $E = M$ ,  $SO^+(M)$  est le groupe des rotations de Lorentz orthochrones), on peut écrire

$$J(\vec{x}) = R\vec{x}\tilde{R}, \tag{9}$$

où

$$R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1 \quad , \quad R = \vec{u}_1 \cdot \dots \cdot \vec{u}_p, \tag{10}$$

$p$  étant pair, les vecteurs  $\vec{u}_k$  étant des vecteurs non isotropes.

On verra qu'il existe des applications de la forme

$$X \in C(E) \rightarrow UX\tilde{U} \in C(E) \tag{11}$$

permettant de définir des groupes de transformations, liés à la structure euclidienne de  $E$ , et pourtant distincts de  $O(E)$ , qui jouent un rôle en Physique.

Les produits de Clifford, à gauche  $\vec{x}X$ , ou à droite  $X\vec{x}$ , d'un multivecteur  $X$  par un vecteur  $\vec{x}$ , se définissent par

$$\vec{x}X = \vec{x} \cdot X + \vec{x} \wedge X \quad , \quad X\vec{x} = X \cdot \vec{x} + X \wedge \vec{x}, \tag{12}$$

où  $\vec{x} \cdot X$  et  $X \cdot \vec{x}$  désignent les produits intérieurs de  $X$  et  $\vec{x}$ , obtenus par contraction des indices sur les composantes : par exemple, si  $E = M$ , et  $X = \vec{y} \wedge \vec{z}$ ,  $\vec{x} \cdot X$  et  $X \cdot \vec{x}$  sont les vecteurs de composantes  $x_\mu(y^\mu z^\nu - z^\mu y^\nu)$  et  $(y^\nu z^\mu - z^\nu y^\mu)x_\mu$ .

On peut en déduire que si des vecteurs  $\vec{x}_k$  sont orthogonaux deux à deux, on a

$$\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_p = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_p. \tag{13}$$

Par exemple, prenons  $p = 3$ . Faisons dans (12)  $\vec{x} = \vec{x}_1$ ,  $X = \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3$ , d'où  $X = \vec{x}_2\vec{x}_3$  par (3). Comme  $\vec{x}_1 \cdot (\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3) = (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_3 - (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3)\vec{x}_2 = 0$ , on obtient bien  $\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3 = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3$ .

Si  $X_p \in \wedge^p E$ , on obtient en éliminant  $\vec{x} \wedge X_p$  et  $\vec{x} \cdot X_p$  dans les relations (12)

$$\vec{x} \cdot X_p = \vec{x}X_p - (-1)^p X_p \vec{x} \quad , \quad \vec{x} \wedge X_p = \vec{x}X_p + (-1)^p X_p \vec{x}. \quad (14)$$

### 8 - Relation avec les nombres complexes et hypercomplexes

Soit  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , deux vecteurs de  $E$  orthogonaux et normés, du même genre ( $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2$ ). On a

$$(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1)^2 = \vec{e}_2(-\vec{e}_2 \vec{e}_1)\vec{e}_1 = -\vec{e}_1^2 \vec{e}_2^2 = -1. \quad (15)$$

La restriction du produit de Clifford aux éléments de la forme  $\lambda + \sigma\mu$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$ , définit une sous-algèbre de  $C(E)$  isomorphe à  $C$ ,  $\sigma$  tenant le rôle de  $i = \sqrt{-1}$ .

Mais il peut exister d'autres sous-algèbre de  $C(E)$  isomorphes à  $C$ , d'interprétation géométrique toute différente. Soit  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  une base orthonormale de  $E$ . Posons

$$\epsilon = \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n = \vec{e}_1 \cdot \dots \cdot \vec{e}_n \in \wedge^n E. \quad (16)$$

Si  $\epsilon^2 = -1$  (cela dépend de la signature de  $E$ ), la restriction du produit de Clifford aux éléments de la forme  $\lambda + \epsilon\mu \in \wedge^0 E \oplus \wedge^n E$ , est aussi une sous-algèbre, notée  $Z(E)$  de  $C(E)$ , isomorphe à  $C$ ,  $\epsilon$  tenant le rôle de  $i$ .

*Quaternions.* Le produit de deux quaternions *vectoriels* d'Hamilton (qu'il faut distinguer ici des quaternions *matriciels* de Pauli)  $q = \lambda + i\mathbf{x}$ ,  $q' = \mu + i\mathbf{y}$ , ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ) ("Les Quaternions", collection "Que sais-je ?", 1950) :

$$qq' = (\lambda + i\mathbf{x})(\mu + i\mathbf{y}) = \lambda\mu - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{i}(\mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} - \mathbf{x} \times \mathbf{y}),$$

peut se définir en posant  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i\mathbf{x} = \mathbf{x}i$  et  $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + i(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ . Soit  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  une base orthonormée positive de  $E^3$  (en signature +++). Posons dans  $C(E^3)$

$$i = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{ijk} \quad (17)$$

On a  $i^2 = \mathbf{ij}(\mathbf{ki})\mathbf{jk} = -\mathbf{ij}(\mathbf{ik})\mathbf{jk} = -\mathbf{i}(\mathbf{ji})(\mathbf{kj})\mathbf{k} = -(-1)^2 i^2 j^2 k^2 = -1$ . Le dual de  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$  est  $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{ij} = \mathbf{ijk}^2 = i\mathbf{k}$ , d'où l'on déduit  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = i(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ , ce qui rend les règles ci-dessus compatibles avec la définition (2) du produit de Clifford.  $C^+(E^3)$  est donc *identique* au corps des quaternions.  $C(E^3)$  est identique à l'anneau des bi-quaternions  $q = \lambda + \mathbf{x} + i\mathbf{y} + i\mu$ , ou quaternions "complexes".

**9 - L'algèbre réelle d'Espace-Temps  $C(M)$**

Soit  $(\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3)$  une base orthonormale de  $M$  (en signature  $+- - -$  :  $\vec{\gamma}_0^2 = 1, \vec{\gamma}_k^2 = -1, k = 1, 2, 3$ ). On posera

$$i = \vec{\gamma}_0 \wedge \vec{\gamma}_1 \wedge \vec{\gamma}_2 \wedge \vec{\gamma}_3 = \vec{\gamma}_0 \vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_3. \tag{18}$$

(On verra plus loin que ce  $i$  correspond à la matrice  $\gamma_5$ ).

On en déduit facilement

$$i^2 = -1 \quad , \quad \tilde{i} = i \quad , \quad i\vec{\gamma}_\mu = -\vec{\gamma}_\mu i \quad \text{d'où} \quad i\vec{x} = -\vec{x}i \quad , \quad \forall \vec{x} \in M. \tag{19}$$

Le  $i$  tenseur antisymétrique d'ordre 4, est distingué ici, *contrairement à ce qu'il est fait dans la construction des matrices et spineurs de Dirac*, du tenseur antisymétrique d'ordre 2,  $\sigma_{12} = \vec{\gamma}_2 \wedge \vec{\gamma}_1$ , dont le carré dans  $C(M)$  est aussi égal à  $-1$ .

Ainsi défini,  $i$  se trouve associé à une opération de dualité très simple. Le produit  $iX$  d'un tenseur antisymétrique décomposable  $X$  de  $M$ , par  $i$ , définit le tenseur antisymétrique dual de  $X$  (le doublement de cette opération donnant  $-X$ ).

On remarque que l'application  $\vec{x} \rightarrow i\vec{x}\tilde{i} = i\vec{x}i = -i^2\vec{x} = \vec{x}$  est l'identité, mais que  $i\vec{x}\vec{y}i = (-1)^2 i^2 \vec{x}\vec{y} = -\vec{x}\vec{y}$ . On a ainsi une transformation dans  $C(M)$  qui, quand elle s'applique aux vecteurs est l'identité, mais qui transforme les bivecteurs en leur opposé, c'est-à-dire qui peut, sans changer l'orientation des droites, inverser celle des plans.

Plus généralement, on a  $e^{i\beta/2} X e^{i\beta/2} = X$ , ou  $e^{i\beta/2} X e^{i\beta/2} = \cos \beta X + \sin \beta iX$  (rotation de dualité d'angle  $\beta$ ) suivant que  $X$  est un tenseur antisymétrique d'ordre impair ou pair. Une telle transformation paraît difficilement accessible par la méthode des représentations matricielles, si on veut rester dans le cadre strict de la structure euclidienne de  $M$ .

En posant  $\mathbf{i} = \vec{\gamma}_1 \wedge \vec{\gamma}_0, \mathbf{j} = \vec{\gamma}_2 \wedge \vec{\gamma}_0, \mathbf{k} = \vec{\gamma}_3 \wedge \vec{\gamma}_0$ , on voit qu'on peut identifier  $C^+(M)$  avec  $C(E^3), Z(M)$  avec  $Z(E^3)$ , les deux définitions (17) et (18) de  $i$  étant compatibles, et qu'on a  $\sigma_{12} = i\mathbf{k}, (i\mathbf{k})^2 = -1$ .

Un élément quelconque  $X$  de  $C(M)$  pourra donc s'écrire sous la forme

$$X = \lambda + \vec{a} + U + i\vec{b} + i\mu \quad , \quad \text{avec} \tag{20}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad , \quad \vec{a}, \vec{b} \in M \quad , \quad U = \mathbf{A} + i\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in E^3$$

la décomposition du bivecteur  $U$  de  $M$  en la somme d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur de  $E^3$  dépendant du choix d'un vecteur  $\vec{\gamma}_0$  du genre temps de  $M$ .

**10 - Ecriture dans  $C(E)$  de l'algèbre de Lie de  $SO^+(E)$**

On considère la famille à un paramètre de transformations définies en (9)

$$\vec{y} = J(\vec{x}_0) = R\vec{x}_0\tilde{R} \tag{21}$$

où  $R(t)$  est fonction différentiable d'un paramètre  $t \in \mathbf{R}$ , et  $\vec{x}_0$  un vecteur fixe de  $E$ .

Puisque  $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$ , on peut écrire

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{dR}{dt}x_0\tilde{R} + Rx_0\frac{d\tilde{R}}{dt} = \frac{dR}{dt}\tilde{R}Rx_0\tilde{R} + Rx_0\tilde{R}R\frac{d\tilde{R}}{dt} = \frac{1}{2}(\omega y - y\omega), \tag{22}$$

en posant

$$\omega = 2\frac{dR}{dt}\tilde{R} = -2R\frac{d\tilde{R}}{dt}. \tag{23}$$

On a  $\tilde{\omega} = -\omega$ , et puisque  $Rd\tilde{R}/dt \in C^+(E)$ , on a  $\omega \in C^+(E)$ . On peut facilement vérifier (en ramenant chaque  $\wedge^p E$  à une base orthogonale) que les seuls éléments  $X$  de  $C(E)$  tels que  $X = -\tilde{X}$  appartiennent à  $\wedge^2 E \oplus \wedge^3 E$ . Par suite, puisque  $\omega \in C^+(E)$ , on a  $\omega \in \wedge^2 E$ . On en déduit  $\omega \cdot \vec{y} = -\vec{y} \cdot \omega$ ,  $\omega \wedge \vec{y} = \vec{y} \wedge \omega$ , et par les relations (12),

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \omega \cdot \vec{y}$$

$\omega(t)$  n'est autre que l'opérateur infinitésimal, considéré en  $t$ , de la transformation définie en (21). On retrouve en (22) le résultat bien connu par lequel  $d\vec{y}/dt$  est le produit intérieur d'un bivecteur (de rotation infinitésimale) par  $\vec{y}$  :

$$\frac{dy^\mu}{dt} = \omega^{\mu\nu}y_\nu \iff \frac{dy^\mu}{dt}y_\mu = 0.$$

On obtient le  $\omega$  des familles appartenant chacune à une composante connexe de  $O(M)$  (voir Annexe) en multipliant les seconds membres de (23) par  $R\tilde{R} = \eta$ , où  $\eta = 1$  pour  $O_+^+(M) = SO^+(M)$  et  $O_-^-(M)$ , et  $\eta = -1$  pour  $O_+^-(M)$  et  $O_-^+(M)$ .

## II - L'EQUATION INTRINSEQUE DE DIRAC

### 11 - L'équation de Dirac dans le formalisme de l'algèbre réelle d'Espace-Temps

Rappelons d'abord la description géométrique de l'électron de Dirac, telle qu'elle apparaît dans les travaux de l'Ecole L. de Broglie.

Les six paramètres scalaires, correspondant à la définition des  $v^\mu$  et  $s^\mu$ , et à la phase  $\chi/2$ , permettent de construire, en chaque point  $x$  de l'espace-temps, un repère orthonormal mobile  $\mathcal{R}(x) = \{\vec{v}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{s}\}$ , ou "tétrapode de Takabayasi" (voir [13]).  $\vec{v}$  est la quadrivitesse, du genre temps, par suite les trois autres vecteurs sont du genre espace. Les deux vecteurs d'univers  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ , engendrent un plan d'univers  $\mathcal{P}(x)$  (dénommé, à juste titre par Hestenes [12], "plan du spin"). La direction de  $\vec{n}_1$  (donc de  $\vec{n}_2$ ) dans  $\mathcal{P}(x)$  est déterminée, en chaque point  $x$ , par la phase  $\chi(x)/2$ .

La forme donnée dans [14] par Jakobi et Lochak au  $\Psi$  de Dirac ;

$$\Psi(x) = \psi(x)U \quad , \quad \psi = \rho^{1/2} e^{\gamma_5 \beta/2} R \tag{24}$$

est la traduction algébrique littérale de cette description.

En effet  $U$  est le spineur constant  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $R$  la matrice d'une rotation de Lorentz orthochrone, à six paramètres réels, qui amène en coïncidence les vecteurs du repère du laboratoire avec ceux du repère mobile  $\mathcal{R}(x)$ .

Le scalaire  $\beta$  est l'angle d'Yvon-Takabayasi ([4],[6]) qu'on peut faire apparaître (voir [14]) dans la relation de Pauli-Kofinck donnant le moment électromagnétique  $M^{\mu\nu}$  :

$$M^{\mu\nu} = \rho(\cos \beta(n_1^\mu n_2^\nu - n_1^\nu n_2^\mu) + \sin \beta(s^\mu v^\nu - s^\nu v^\mu)).$$

Le travail d'Hestenes (postérieur aux études de l'Ecolde L. de Broglie, mais réalisé tout à fait indépendamment) a été d'abord la traduction du formalisme de l'algèbre des matrices de Dirac en algèbre réelle d'Espace-Temps  $C(M)$ .

Considérant  $M$  en coordonnées réelles ( $x^0 = ct$  ,  $x^1, x^2, x^3$ ), et la base  $\mathcal{B} = \{\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3\}$  orthonormale du repère du laboratoire :

$$\vec{\gamma}_\mu \cdot \vec{\gamma}_\nu = g_{\mu\nu} \quad , \quad g_{00} = 1 \quad , \quad g_{kk} = -1 \quad , \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu,$$

écrivait dans  $C(M)$  par (4)

$$\vec{\gamma}_\mu \cdot \vec{\gamma}_\nu = \frac{1}{2}(\vec{\gamma}_\mu \vec{\gamma}_\nu + \vec{\gamma}_\nu \vec{\gamma}_\mu) = g_{\mu\nu},$$

et comparant avec les relations satisfaites par les matrices  $\gamma_\mu$  (en coordonnées réelles)

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = g_{\mu\nu} I,$$

où  $I$  est la matrice unité, Hestenes identifie les *vecteurs*  $\vec{\gamma}_\mu$  avec les *matrices*  $\gamma_\mu$ , le scalaire 1 avec  $I$ , le produit de Clifford de  $C(M)$  avec le produit matriciel. Le tenseur antisymétrique d'ordre 4, défini par (18),  $i = \vec{\gamma}_0 \vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_3$  correspond alors (en coordonnées réelles) à la matrice  $\gamma_5$ .

Cela le conduit à réinventer dans [12] la forme (24) [14], donnée à  $\Psi$  :

$$\Psi(x) = \psi(x)U \quad , \quad \psi = \rho^{1/2} e^{i\beta/2} R, \tag{25}$$

mais écrite dans  $C(M)$  :  $R$  est tel que  $R \in C^+(M)$ ,  $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$ , et on a

$$\vec{v} = R\vec{\gamma}_0\tilde{R} \quad , \quad \vec{s} = R\gamma_3\tilde{R} \quad , \quad \vec{n}_k = R\vec{\gamma}_k\tilde{R} \quad , \quad k = 1, 2.$$

Comme on a dans  $C(M)$ ,  $i\vec{a} = -\vec{a}i$ , et  $\tilde{i} = i$ , l'angle  $\beta$  s'élimine dans des expressions de la forme  $\psi\vec{\gamma}_\mu\tilde{\psi} = e^{i\beta/2} R\vec{\gamma}_\mu\tilde{R}e^{i\beta/2}$ , et on a en particulier pour les courants de Dirac et de spin,

$$\rho\vec{v} = \psi\vec{\gamma}_0\tilde{\psi} \quad , \quad \rho\vec{s} = \psi\vec{\gamma}_3\tilde{\psi}.$$

Par contre, puisque  $i\vec{a}\vec{b} = (-1)^2\vec{a}\vec{b}i = \vec{a}\vec{b}i$ ,  $\beta$  ne s'élimine pas des expressions de la forme  $\psi\vec{\gamma}_\mu\vec{\gamma}_\nu\tilde{\psi}$ , et on a en particulier pour le tenseur  $M$  de polarisation  $M = \psi\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2\tilde{\psi} = \rho e^{i\beta/2} R\vec{\gamma}_1\tilde{R}R\vec{\gamma}_2\tilde{R}e^{i\beta/2} = \rho e^{i\beta} \vec{n}_1\vec{n}_2 = \rho(\cos\beta\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 + \sin\beta\vec{s} \wedge \vec{v})$ , puisque  $\vec{n}_1\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ , et que  $i\vec{n}_1\vec{n}_2 = (\vec{v}\vec{n}_1\vec{n}_2\vec{s})\vec{n}_1\vec{n}_2 = \vec{v}\vec{s}(\vec{n}_1\vec{n}_2)^2 = -\vec{v}\vec{s} = \vec{s} \wedge \vec{v}$ .

On voit apparaître l'opération "rotation de dualité",  $X \rightarrow e^{i\beta/2} X e^{i\beta/2}$ . En fait, l'originalité de l'étude [12] réside dans la remarque suivante, intéressante, par les simplifications qu'elle peut apporter non seulement en théorie de Dirac, mais dans la théorie générale des particules : le spineur  $U$  de (25) (ou (24)) ne joue aucun rôle dans la théorie de l'électron (ni probablement d'aucune autre particule), si ce n'est qu'il y rend plus difficile son interprétation géométrique.

On peut le *supprimer purement et simplement*, moyennant une transformation convenable de l'équation de Dirac

$$\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = (mc^2 \Psi + e A_\mu \gamma^\mu \Psi) i. \tag{26}$$

Le spineur  $U$  admet dans  $C(M)$  l'expression suivante  $U = (1 + \vec{\gamma}_0)(1 + \sigma_3)/2$ , où  $\sigma_3 = \vec{\gamma}_3 \vec{\gamma}_0$ , qui est celle d'un idempotent ( $U^2 = U$ ) de  $C(M)$ . On vérifie immédiatement

$$i \sigma_3 = \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1 \quad , \quad i \sigma_3 U = U i \sigma_3 = U i \quad , \quad \vec{\gamma}_0 U = U \quad , \tag{27}$$

Hestenes remplace l'équation (26) par l'équation équivalente

$$\hbar c \vec{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi = (mc^2 \psi \vec{\gamma}_0 + e \vec{A} \psi) i \sigma_3 \quad (i \sigma_3 = \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1). \tag{28}$$

Si l'on multiplie à droite les deux membres de cette équation par  $U$ , on obtient bien (26), compte tenu des relations (27) et de ce que  $\Psi = \psi U$ .

On remarquera que, comme l'idempotent  $U$  n'étant pas égal à l'unité, n'est pas inversible (car  $U^2 = U$  et  $U U^{-1} = 1$  entraîneraient  $U^2 U^{-1} = U$ , d'où  $U U^{-1} = U = 1$ ), on peut passer de l'équation d'Hestenes (28) à celle de Dirac (26) par une simple multiplication, mais que l'inverse n'est pas possible.

L'équation (28) est d'apparence un peu plus compliquée que l'équation de Dirac (26), mais c'est parce que le bivecteur  $\vec{\gamma}_2 \wedge \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1$ , générateur de la rotation

$$\vec{\gamma}_1 \rightarrow e^{(\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2) \frac{\chi}{2}} \vec{\gamma}_1 e^{(\vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1) \frac{\chi}{2}} = e^{(\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2) \chi} \vec{\gamma}_1 = \cos \chi \vec{\gamma}_1 + \sin \chi \vec{\gamma}_2 \tag{29}$$

qui fait tourner d'un angle  $\chi$ ,  $\vec{\gamma}_1$  dans le plan fixe  $(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ , puis  $\vec{n}_1 = R \vec{\gamma}_1 \tilde{R}$  dans le plan mobile  $\mathcal{P}(x)$ , apparaît explicitement dans l'équation d'Hestenes, au lieu d'être masqué dans l'équation de Dirac par l'ambiguïté du spineur  $U$  représentée par la relation  $U \vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1 = U i \sigma_3 = U i$ .

Ainsi le facteur de phase électromagnétique, qui s'écrit  $e^{i\chi/2}$  dans le formalisme de Dirac, s'écrit  $e^{\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \chi/2}$  dans celui d'Hestenes et exprime donc clairement une rotation d'un angle  $\chi$  dans le plan  $(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ .

Le facteur de phase "chirale"  $e^{\gamma_5 \beta/2} = e^{i\beta/2}$ , s'écrit de la même façon dans les deux formalismes, puisque  $i$  est identifié à  $\gamma_5$ , mais sa nature géométrique n'apparaît explicitement que dans le second.

Cependant l'équation (28) est *rigoureusement* équivalente à celle de Dirac.



### 12 - Le cas du potentiel central et l'angle de Takabayasi

L'équation (28) permet de retrouver très aisément (voir [15],[16]) les solutions sphériques du potentiel central, avec la possibilité d'un calcul immédiat des grandeurs intrinsèques comme  $\rho\vec{v}$ ,  $\rho\vec{s}$ , et surtout l'angle  $\beta$ .

Nous avons dans [16] mis ces solutions sous la forme de quaternions (d'Hamilton) : posant en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = \cos\theta\mathbf{k} + \sin\theta\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$ , où  $\mathbf{k} = \vec{\gamma}_3 \wedge \vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_3\vec{\gamma}_0$  (d'où  $i\mathbf{k} = \vec{\gamma}_2\vec{\gamma}_1$ ), on obtient

$$\psi(r, \theta, \phi) = (g\mathbf{Nk} + f\mathbf{iN})e^{i\mathbf{k}(m\phi + Ex^0)} \tag{30}$$

avec  $\mathbf{N} = L\mathbf{k} + M\mathbf{u}$ , le quaternion  $T = \mathbf{N}e^{i\mathbf{k}m\phi}$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) étant solution de l'équation

$$(\mathbf{r} \wedge \nabla)T = \lambda T \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{31}$$

$g(r), f(r) \in \mathbf{R}$  sont les solutions du système radial (voir [17],[18]) pour l'énergie  $E$  et le nombre  $\kappa = \lambda - 1$  ; on a  $L = qP_l^m(\cos\theta)$ ,  $M = P_l^{m+l}(\cos\theta)$ , où  $l \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq |m| < l$ ,  $P_l^m(\cos\theta)$  étant les fonctions associées de Legendre, avec  $\lambda = l + 1$  et  $q = l - m$ , ou bien  $\lambda = -l$  et  $q = -(l + m + 1)$ .

L'expression (30) de  $\psi$  est à rapprocher de celle proposée par Sommerfeld dans [19], avec la différence sur le  $i$ , qui pour les quaternions de Sommerfeld correspond à l'ininterprétable  $\sqrt{-1}$ , et le fait qu'ici, il n'est pas nécessaire d'introduire des demi-entiers.

Posant  $\text{tg } \nu = f/g$ ,  $\text{tg } \tau = M/L$ , on déduit de  $\psi\tilde{\psi} = \rho e^{i\beta}$ ,

$$\text{tg } \beta = \text{tg } 2\nu \cos(\theta - 2\tau), \tag{32}$$

qui montre que  $\beta$  n'est pas nul pour l'électron dans un potentiel central, et permet de préciser ce que *ne peut pas être* l'angle  $\beta$  : dans le cas des ondes planes monochromatiques, on a  $\beta = 0$  partout pour l'électron, et  $\beta = \pi$  partout pour le positron. On serait tenté de penser que l'équation de Dirac serait celle de, en quelque sorte, un doublet où ces deux valeurs particulières de  $\beta$  préciseraient la nature électron ou positron de la particule de Dirac, exactement comme la valeur  $\xi = 0$ , ou  $\xi = \pi$  de l'angle  $\xi$  de l'équation du doublet nucléon (voir no. 16) permet d'obtenir soit le proton, soit le neutron. La non nullité de  $\beta$  dans le cas de l'équation de Dirac de l'atome d'hydrogène qui, si l'on ne tient pas compte des fluctuations du vide, concerne manifestement un électron pur, nous paraît exclure cette hypothèse.

### 13 - L'équation intrinsèque de Dirac

Posons

$$\Omega_\mu = 2(\partial_\mu R)\tilde{R} = -2R(\partial_\mu \tilde{R}) \tag{33}$$

$\Omega_\mu$  est le bivecteur de la rotation infinitésimale du repère  $\mathcal{R}(x)$ , correspondant à un déplacement infinitésimal du point  $x$  parallèlement au vecteur  $\tilde{\gamma}_\mu$  de la base  $\mathcal{B}$ , la coordonnée  $x^\mu$  jouant ici le même rôle que le paramètre  $t$  du no. 10.

On peut associer à la rotation infinitésimale au point  $x$  de  $\mathcal{R}(x)$ , l'élément de  $C(M)$ , somme d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur de  $M$ ,

$$\Omega = -\gamma^\mu \Omega_\mu, \tag{34}$$

qui est invariant dans tout changement de base  $\mathcal{B}$ . Ecrivant

$$\partial_\mu \psi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_\mu \rho}{\sqrt{\rho}} + \sqrt{\rho} \partial_\mu \beta i \right) e^{i\beta/2} R + \sqrt{\rho} e^{i\beta/2} (\partial_\mu R),$$

notant que  $2\partial_\mu R = 2(\partial_\mu R)\tilde{R}R = \Omega_\mu R$ ,  $\tilde{\gamma}^\mu e^{i\beta/2} = e^{-i\beta/2} \tilde{\gamma}^\mu$ ,  $R\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1\tilde{R} = R\tilde{\gamma}_2\tilde{R}R\tilde{\gamma}_1R = \tilde{n}_2\tilde{n}_1$ , posant

$$\tilde{n}_1\tilde{n}_2 = \tilde{n}_1 \wedge \tilde{n}_2 = \sigma,$$

multipliant les deux membres de (28) par  $1/\sqrt{\rho}$ , puis à gauche par  $e^{i\beta/2}$ , à droite par  $\tilde{R}$ , on obtient l'équation intrinsèque de Dirac ([7], éq. (6)),

$$(D) : \frac{\hbar c}{2} (\Omega - \vec{\nabla} \log \rho - \vec{\nabla} \beta i) = (mc^2 e^{i\beta} \vec{v} + e\vec{A})\sigma \quad \text{où } \vec{\nabla} = \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu. \tag{35}$$

La rotation du plan  $\mathcal{P}(x) = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$  sur lui-même joue un rôle important dans cette équation. Pour un déplacement infinitésimal du point  $x$  parallèle au vecteur  $\tilde{\gamma}_\mu$ , elle est représentée par le scalaire

$$\omega_\mu = (\partial_\mu \tilde{n}_1) \cdot \tilde{n}_2 = -(\partial_\mu \tilde{n}_2) \cdot \tilde{n}_1, \tag{36}$$

et pour un déplacement parallèle à un vecteur  $\vec{n} = n^\mu \tilde{\gamma}_\mu$ , par le scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{\omega}$ , où le vecteur  $\vec{\omega} = \omega^\mu \tilde{\gamma}_\mu$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$ . Mais pour définir une telle rotation, les vecteurs  $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2$  ne peuvent pas être pris arbitrairement dans le plan  $\mathcal{P}(x)$ . Si ces vecteurs sont remplacés par les vecteurs  $\tilde{n}'_1, \tilde{n}'_2$  définis par la rotation (29), le vecteur  $\vec{\omega}$  est remplacé par

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{\nabla} \chi. \tag{37}$$

On posera de même pour le dual  $\hat{\sigma} = i\sigma = \vec{s} \wedge \vec{v}$  du bivecteur  $\sigma$ ,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^\mu \vec{\gamma}_\mu \quad , \quad \vec{\omega}_\mu = (\partial_\mu \vec{s}) \cdot \vec{v} = -(\partial_\mu \vec{v}) \cdot \vec{s} \tag{38}$$

Or on peut écrire [20] (voir démonstration en annexe)

$$\Omega = (\vec{\nabla}\sigma + \vec{\omega} + i\vec{\omega})\sigma. \tag{39}$$

On voit donc apparaître dans (35), en facteur de  $\sigma$ , le vecteur

$$\vec{p} = \frac{\hbar c}{2}\vec{\omega} - e\vec{A}, \tag{40}$$

qui n'est autre que le quadrivecteur d'impulsion-énergie de la particule.

L'addition à  $\vec{\omega}$ , (due à la rotation de  $\vec{n}_1$  de l'angle  $\chi$  dans le plan orienté  $\mathcal{P}(x)$  du quadrigradient  $-\vec{\nabla}\chi$  (le signe moins est dû à la signature  $(- -)$  de  $\mathcal{P}(x)$ ), et l'addition simultanée de  $-\hbar c \nabla\chi / (2e)$  à  $\vec{A}$ , assure l'invariance de jauge électromagnétique.

Géométriquement, cela revient à dire *qu'il n'existe pas de direction  $\vec{n}_1$  privilégiée dans le plan  $\mathcal{P}(x)$* , et cinématiquement, que ce plan "s'accroche", dans son mouvement de rotation sur lui-même, au potentiel  $\vec{A}$ , par l'intermédiaire de l'invariance de jauge. *Le constante  $\hbar$  n'apparaît dans (40) que comme un facteur de conversion d'une demi-variation angulaire en énergie.*

Le photon de jauge, représenté par le quadrigradient  $-\vec{\nabla}\chi$  apparaît ici (voir aussi [8]) comme essentiellement lié à la rotation sur lui-même d'un plan mobile de l'Espace-Temps.

Supposons que le changement de  $e$  en  $-e$ , du passage de l'équation de l'électron à celle du positron, laisse invariant le sens (vers le futur) du courant  $\rho\vec{v} \cdot R$ , qui définit  $\vec{v}$ , doit rester inchangé, et aussi, par suite  $\Omega$ . On voit sur (35) qu'il faut changer  $\sigma$  en  $-\sigma$ , ( $i\sigma = \vec{s} \wedge \vec{v}$  devient  $-i\sigma = \vec{v} \wedge \vec{s}$ ,  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}$  deviennent  $-\vec{\omega}$  et  $-\vec{\omega}$ , en conformité avec (39)), et  $\beta$  en  $\beta + \pi$ . Aucun changement de sens de vecteur n'est nécessaire, seul le changement de l'orientation des plans, compatible avec cette dernière transformation, est réalisé.

On peut représenter l'électron de Dirac par l'horloge dont s'est servi L. de Broglie pour décrire le mouvement vibratoire de son corpuscule. Le plan du cadran de l'horloge est le plan du spin  $\mathcal{P}(x)$ , l'aiguille coïncide avec le vecteur  $\vec{n}_1$ . Le passage au positron laisse l'aiguille inchangée mais retourne le plan du cadran, si bien que les heures sont marquées en sens inverse. En fait, dès sa

conception, le corpuscule de de Broglie était bien une particule à spin (voir [14]), contenant en plus le principe du passage à son anti-particule!

### 14 - Les décompositions de l'équation intrinsèque de Dirac

Multipliant les deux membres de (35), à droite, par  $\sigma$  (on a  $\sigma^2 = -1$ ), puis à gauche, par  $e^{-i\beta}$  (on rappelle que  $e^{-i\beta}\vec{a} = \vec{a}e^{i\beta}$ ), on obtient avec (39) et (40) :

$$\rho\vec{p} = \rho mc^2 e^{i\beta} \vec{v} - \frac{\hbar c}{2} (\vec{\nabla}(\rho\sigma) + \rho i\vec{\omega} + \rho(\nabla\beta)i\sigma), \tag{41}$$

$$\rho mc^2 \vec{v} = \rho(\vec{p} + \frac{\hbar c}{2} i\vec{\omega})e^{i\beta} + \frac{\hbar c}{2} \vec{\nabla}(\rho\sigma e^{i\beta}). \tag{42}$$

Les équations (35), (41), (42) sont à valeurs dans  $\wedge^1 E \oplus \wedge^3 E$ . Séparant les parties vectorielles et pseudo-vectorielles de ces équations, on obtient (en notation tensorielle courante) les couples d'équations vectorielles (35)', (41)', (42)', chacun des couples étant équivalent à l'équation de Dirac :

$$\begin{aligned} \rho p^\mu &= \rho mc^2 \cos \beta v^\mu - \frac{\hbar c}{2} (\partial_\nu(\rho\sigma^{\nu\mu}) + (\partial_\nu\beta)\rho\hat{\sigma}^{\nu\mu}) \\ \frac{\hbar c}{2} \vec{\omega}^\mu &= \rho mc^2 \sin \beta v^\mu + \frac{\hbar c}{2} (\partial_\nu(\rho\hat{\sigma}^{\nu\mu}) + (\partial_\nu\beta)\rho\sigma^{\nu\mu}) \end{aligned} \tag{41}'$$

(41)'<sub>1</sub> est l'équation (13), p. 26 de [6], (41)'<sub>2</sub> regroupe les équations (1'), (2') et (12') de [6].

$$\begin{aligned} \rho mc^2 v^\mu &= \rho(\cos \beta p^\mu + \sin \beta \frac{\hbar c}{2} \varpi^\mu) + \frac{\hbar c}{2} \partial_\nu(\rho(\cos \beta \sigma^{\nu\mu} + \sin \beta \hat{\sigma}^{\nu\mu})) \\ 0 &= \rho(\sin \beta p^\mu - \cos \beta \frac{\hbar c}{2} \varpi^\mu) + \frac{\hbar c}{2} \partial_\nu(\rho(\sin \beta \sigma^{\nu\mu} - \cos \beta \hat{\sigma}^{\nu\mu})) \end{aligned} \tag{42}'$$

(42)'<sub>1</sub> est, multipliée par  $e/(mc^2)$ , l'équation de Gordon de la décomposition du courant.

L'angle  $\beta$  apparaît comme étant plutôt lié à la masse dans (41)', et plutôt lié à la polarisation dans (42)'. Ces deux aspects sont conciliés dans le monopôle de masse nulle de Lochak [21].

Enfin, posant

$$\vec{w} = \vec{\gamma}^\mu \cdot \Omega_\mu \quad , \quad \vec{u} = i(\vec{\gamma}^\mu \wedge \Omega_\mu), \tag{43}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 (D)_I &: mc^2 \cos \beta s^\mu + \frac{\hbar c}{2}(u^\mu + \partial^\mu \beta) - eA_\nu \hat{\sigma}^{\nu\mu} = 0 \\
 (D)_{II} &: mc^2 \sin \beta s^\mu + \frac{\hbar c}{2}(w^\mu + \partial^\mu (\log \rho)) + eA_\nu \sigma^{\nu\mu} = 0
 \end{aligned}
 \tag{35'}$$

Considérant les trois équations de conservation, du courant, de l'impulsion-énergie et de la densité de spin :

$$(C)\partial_\mu(\rho v^\mu) = 0 \quad , \quad \partial_\mu(\rho T^{\mu\nu}) = \rho f^\nu \quad , \quad \rho(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) = -\frac{\hbar c}{2}\partial_\xi(\rho S^{\xi\mu\nu}), \tag{44}$$

où  $f^\nu = e(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)v_\mu$  est la force de Lorentz, nous avons déduit dans [22], de cette dernière décomposition, la proposition suivante : “Soit  $(D)_I$  la partie de l'équation de Dirac qui ne dépend pas de la densité  $\rho$ ,  $(D)_{II}$  l'autre partie.  $(D)_I$  et les trois équations de conservation  $(C)$  déterminent  $(D)_{II}$ ”.

Autrement dit, la partie de l'équation de Dirac qui contient la densité n'apporte rien de plus que ces trois lois de conservation.

Nous rappelons l'expression établie dans [16] (voir aussi [22]) du quotient par  $\rho$  du tenseur d'impulsion-énergie, où l'on peut remarquer le rôle joué par la rotation infinitésimale du repère  $\mathcal{R}(x)$  :

$$T(\vec{n}) = \frac{\hbar c}{2}((\Omega_\mu \cdot (i(\vec{n} \wedge \vec{s})))\vec{\gamma}^\mu + (\vec{s} \cdot \vec{n})\vec{\nabla}\beta) - e(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{A}, \tag{45}$$

dont les valeurs sont

$$\begin{aligned}
 T(\vec{v}) &= \vec{p} \quad , \quad T(\vec{n}_1) = \frac{\hbar c}{2}(\Omega_\mu \cdot (\vec{v} \wedge \vec{n}_2))\vec{\gamma}^\mu \quad , \\
 T(\vec{n}_2) &= \frac{\hbar c}{2}(\Omega_\mu \cdot (\vec{n}_1 \wedge \vec{v}))\vec{\gamma}^\mu \quad , \quad T(\vec{s}) = -\frac{\hbar c}{2}\vec{\nabla}\beta.
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

### 15 - Relation entre la constante de Planck et la structure euclidienne de $M$ en théorie de Dirac

En mécanique classique, le lien qui unit la notion d'énergie et la structure euclidienne de  $M$  est exprimé par la vitesse linéaire qui intervient dans l'impulsion. Mais quel est-il en mécanique quantique ? En particulier quelle place y occupe la constante de Planck  $h$  ? Ni la relation  $E = h\nu$ , ni le principe de correspondance

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p_{x_k} \rightarrow -i\hbar \partial_k, \tag{47}$$

ne permettent de répondre clairement à cette question.

Hestenes remarque dans [12], et confirme dans [23], par un passage minutieux de l'équation de Dirac à celle de Pauli, puis à celle de Schrödinger, que  $\hbar$  apparaît dans l'équation de Schrödinger indissolublement lié au symbole  $i$ , et que ce symbole doit être associé au bivecteur  $\sigma = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$  de la théorie de Dirac, représentant le plan  $\mathcal{P}(x)$  de  $M$  (qui, en théorie de Schrödinger est fixe et d'orientation indifférente). Il en déduit que la particule de Schrödinger est bien en fait une particule à spin (remarque déjà faite dans [24] par G. Lochak), et d'autre part [25], d'une façon plus contestée [26], que le principe d'Heisenberg n'est pas un vrai principe, mais la simple conséquence d'autres propositions, elles, fondamentales.

Or  $\hbar$  apparaît dans (35) en facteur de  $c(\Omega_\mu + i\partial_\mu\beta + \partial_\mu \log \rho)/2$ , ce qui rend insuffisant le point de vue d'Hestenes par lequel  $\hbar$  est lié à un bivecteur, bien que (40) montre que  $\hbar$  est *principalement* relié au mouvement du plan  $\mathcal{P}(x)$  sur lui-même, dans la définition de l'énergie locale de la particule de Dirac.

En fait, si l'on considère que la densité  $\rho$  s'introduit par l'intermédiaire de l'équation de continuité (44)<sub>I</sub>, qui ne fait pas intervenir  $\hbar$ , alors  $\hbar$  doit être regardé comme facteur de conversion en énergie du demi-produit de  $c$  par l'opérateur infinitésimal  $\Omega_\mu + i\partial_\mu\beta$  du groupe  $G(M)$  de transformations

$$X \in C(M) \rightarrow \Phi X \tilde{\Phi} \in C(M) \quad , \quad \Phi = e^{i\beta/2} R, \tag{48}$$

sous-groupe des éléments  $L$  de  $C(M)$  inversibles, tels que

$$\forall p = 0, 1, 2, 3, 4 \quad X \in \wedge^p M \longrightarrow LX \tilde{L} \in \wedge^p M. \tag{49}$$

Définissons  $G(M)$  de façon plus précise. Posons  $z(M) = \{e^{i\beta/2} \in C(M) : \beta \in \mathbf{R}\}$ .  $z(M)$  constitue un groupe isomorphe à  $U(1)$ . Par ailleurs, pour tout espace euclidien  $E$ , on définit  $Spin(E) = \{R \in C^+(E) : R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1, \text{ et } \vec{x} \in E \Rightarrow R\vec{x}\tilde{R} \in E\}$ .

L'application  $\vec{x} \rightarrow R\vec{x}\tilde{R}$  est alors une isométrie  $J_R \in SO^+(E)$ , et on démontre que l'application  $R \in Spin(E) \rightarrow J_R \in SO^+(E)$  est un homomorphisme surjectif, de noyau  $\{1, -1\}$ ,  $J_R$  étant l'image à la fois de  $R$  et  $-R$ .

Le groupe  $G(M)$  est le produit  $z(M) \times Spin(M)$ . La transformation infinitésimale, en  $t$ , d'une famille de transformations  $Y = \Phi X_0 \tilde{\Phi}$  où  $\Phi = e^{i\beta/2} R$ , dépendant d'un paramètre  $t$ , est définie par la relation

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2}(iY + Yi)\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{2}(\omega Y - Y\omega) \quad , \quad \omega = 2\frac{dR}{dt}\tilde{R}, \tag{50}$$

qui a la même forme que (22) si  $Y$  est d'ordre impair. On a

$$\omega + i \frac{d\beta}{dt} = 2 \frac{d\Phi}{dt} \Phi^{-1}.$$

La constante  $\hbar$  apparaît donc liée, moins au bivecteur  $\sigma$  qu'à la rotation qui amène en coïncidence le repère du laboratoire avec celui de Takabayasi, suivie (ou précédée, les deux opérations étant commutables) d'une rotation de dualité. Il semble d'ailleurs que c'est ce dernier point de vue que l'on doit adopter pour les particules relevant du groupe SU(2), car, comme on va le voir, si on peut maintenir, pour ces particules, la notion de repère propre, la direction du bivecteur  $\sigma$  n'y joue plus un rôle privilégié.

### III - La géométrie des particules relevant du groupe SU(2)

**16** - Un schéma géométrique semblable à celui de la particule de Dirac peut-il s'appliquer à toutes les particules élémentaires, ou y a-t-il des particules géométriques et d'autres abstraites ? Le mot abstrait est très subjectif : tel virtuose des spineurs et matrices de Dirac trouvera très abstrait l'opération de symétrie par rapport à une droite de  $M$  ! En fait, la question est de savoir si toutes les constructions de particules peuvent être faites avec ou sans l'algèbre  $C(M)$ , c'est-à-dire en conformité ou non avec la structure euclidienne de l'espace-temps.

La question n'est pas innocente, en ce qu'une réponse affirmative entraîne une sévère limitation dans la construction algébrique des particules non encore observées.

Nous nous contenterons de signaler ici les travaux dans ce domaine qui ont été faits en algèbre réelle d'espace-temps. Ils concernent l'équation des nucléons [27], [28], une définition de l'étrangeté et du nombre baryonique [28], des calculs théoriques des différences de masses dans les doublets et le triplet, à partir de la différence expérimentale de la masse du neutron et du proton [28], et le modèle de Weinberg-Salam pour les interactions faibles et électromagnétiques [29].

L'idée essentielle (déjà émise explicitement dans [13], à partir de la jauge de Pauli [30], et implicitement contenue dans [31]) est qu'on peut associer à la particule un espace isotopique local, représenté par le repère propre  $\mathcal{R}(x) = \{\vec{v}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{s}\}$ , défini, comme pour la particule de Dirac, par les vecteurs  $R\vec{\gamma}_\mu \vec{R}$ , tel que  $\vec{v}$  coïncide avec la direction en  $x$  du courant. Mais la direction du vecteur  $\vec{s}$ , et corrélativement celle du plan  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  n'est plus privilégiée : un vecteur  $\vec{s}'$ ,

le spin isotopique, peut se déplacer, avec un (cas des doublets) ou deux (cas du triplet) degrés de liberté, dans l'espace  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{s})$  orthogonal à  $\vec{v}$ .

Ainsi la jauge correspondant à une rotation dans le plan  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  orthogonal à  $\vec{s}$  (traduite par la symétrie du groupe  $U(1)$ ), serait étendue à une rotation à trois paramètres (traduite par la symétrie du groupe  $SU(2)$ ). En algèbre  $C(M)$ , dans la rotation associée à la particule de Dirac, représentée par  $Ru$ , où  $R \in Spin(M)$  est à 5 paramètres et où  $u = \exp(\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \chi / 2)$  représente une rotation à un paramètre,  $u$  serait remplacé par un élément de Spin  $(E^3(\vec{\gamma}_0))$ , à trois paramètres. On a désigné par  $E^3(\vec{\gamma}_0)$  l'espace proprement euclidien, défini comme au no. 9, engendré par les bivecteurs de  $C(M)$  de la forme  $\vec{\gamma}_k \wedge \vec{\gamma}_0$ , qui, multipliés par  $i$ , sont les générateurs des rotations dans l'espace  $(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3)$  du repère du laboratoire. La rotation définie par  $R$  permet de transformer ensuite les vecteurs  $\vec{\gamma}'_k = u \vec{\gamma}_k \tilde{u}$  de cet espace en vecteurs de l'espace  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{s})$  du repère propre. En particulier, ce point de vue conduit à définir les quadrivecteurs

$$\vec{s} = R \vec{\gamma}_3 \tilde{R} \text{ (spin)} \quad \text{et} \quad \vec{s}' = R \vec{\gamma}'_3 \tilde{R} = Ru \vec{\gamma}_3 \tilde{u} \tilde{R} \text{ (isospin)}. \tag{51}$$

La jauge  $\beta$  y joue un rôle identique (ou plus sophistiqué [32] ?) que celui qu'elle tient en théorie de Dirac.

A titre d'exemple, l'équation intrinsèque analogue à (35), des nucléons de même masse, qu'on peut déduire comme variante de l'équation intrinsèque (2.10) de [27], est la suivante :

$$\frac{\hbar c}{2} (\Omega - \vec{\nabla} \log \rho - \vec{\nabla} \beta i) = mc^2 e^{i\beta} \vec{v} \sigma' + e \bar{A} \frac{1}{2} (\sigma + \sigma') + g e^{i\beta} \vec{\pi}, \tag{52}$$

où  $\sigma' = \vec{n}'_1 \wedge \vec{n}'_2 = i(\vec{s}' \wedge \vec{v})$ ,  $\vec{\pi}$  est un quadrivecteur représentant le champ pionique,  $g$  la constante de couplage pion-nucléon. Pour assurer la conservation de courant  $\rho \vec{v}$  le vecteur  $\vec{\pi}$  doit être pris orthogonal à  $\vec{v}$ .

Définissons l'angle  $\xi$  tel que  $\cos \xi = \vec{s} \cdot \vec{s}'$ . Si  $\xi = 0$ , on a  $\vec{s}' = \vec{s}$ ,  $\sigma' = \sigma$ , c'est l'équation du proton. (52) est alors, diminuée de son dernier terme, et, à la valeur de  $m$ , le signe de  $e$ , le sens du bivecteur  $\sigma$  près, identique à (35). Si  $\xi = \pi$ , on a  $\vec{s}' = -\vec{s}$ ,  $\sigma' = -\sigma$ , le terme en  $e$  disparaît, c'est l'équation du neutron. Dans [28], la différence des masses du neutron et du proton est liée à des considérations géométriques, reprises pour expliquer celle qu'on peut trouver dans les doublets et triplets.

Que les travaux cités conduisent à des résultats distincts de ceux des théories usuelles de jauge, ou, comme [27], [29], strictement équivalents ( (52)



est équivalente aux équations (20') de [33]), il ne fait pas de doute qu'une géométrisation complète de la théorie des particules relevant du groupe  $SU(2)$  et de leurs bosons ou isobosons de jauge associés est possible. Par des constructions similaires à la méthode de la fusion de de Broglie (pour la traduction dans  $C(M)$  de cette méthode voir [34]), celle des particules élémentaires de spin entier nous paraît envisageable, mais dépasse le cadre de la présente étude.

**17** - Nous n'avons pas connaissance de traduction dans  $C(M)$  de théories de particules relevant des groupes  $SU(3)$  et  $SU(5)$ . Mais si la définition de ces particules est bien compatible avec la structure euclidienne de l'espace-temps, alors ce n'est pas la complexité de ces groupes qui devrait poser des difficultés. On peut très naturellement représenter  $SU(3)$ ,  $SU(4)$  (voir [29]) et  $SU(5)$  dans  $C(M)$ .

Exprimons tout élément  $X \in C(M)$  comme en (20), et identifions la sous-algèbre  $Z(M) = \{z = \lambda + i\mu \in C(M) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$  de  $C(M)$  à  $C$ . Alors on peut faire les identifications suivantes :

$$F_3 = \wedge^2 M \Leftrightarrow C^3 \quad ; \quad F_4 = \wedge^0 M \oplus \wedge^2 M \oplus \wedge^4 M \Leftrightarrow C^4 \quad ;$$

$$F_5 = \wedge^0 M \oplus \wedge^1 M \oplus \wedge^3 M \oplus \wedge^4 M \Leftrightarrow C^5.$$

On peut définir ([29]) sur  $C(M)$ , associée à  $\vec{\gamma}_0$ , une opération de "conjugaison complexe"  $X \rightarrow X^+$ , en posant  $X^+ = \vec{\gamma}_0 \tilde{X} \vec{\gamma}_0$ , qui consiste en fait en une symétrie dans  $M$  par rapport à la droite de  $M$  engendrée par  $\vec{\gamma}_0$ , suivie par l'opération d'anti-automorphisme principal de  $C(M)$ . Si  $\vec{x}_0 \cdot \vec{\gamma}_0 = 0$ , et si  $\vec{x} = \xi \vec{\gamma}_0 + \vec{x}_0$ , on a  $\vec{x}^+ = \xi \vec{\gamma}_0 - \vec{x}_0$ ,  $(\vec{x}_0 \vec{\gamma}_0)^+ = \vec{x}_0 \vec{\gamma}_0$ ,  $i^+ = -i$ ,  $X^+ = (\lambda + \vec{x} + \mathbf{a} + i\mathbf{b} + i\mu)^+ = \lambda + \vec{x}^+ + \mathbf{a} - i\mathbf{b} + i(\vec{y})^+ - i\mu$ . Cette opération dote chaque  $F_k$  d'une "norme"  $|X| = ([X^+ X]_S)^{1/2}$ , où  $[Y]_S$  désigne la partie scalaire de  $Y$ .

Les représentations des  $SU(k)$  dans  $C(M)$  sont les groupes de transformation des  $F_k$  dans  $C(M)$  qui laissent cette norme invariante. On trouvera dans [29] une représentation dans  $C(M)$  des générateurs de  $SU(3)$ .

La restriction à  $F_4$  de l'opération  $X \rightarrow X^+$ , correspond à la conjugaison hermitienne de la définition des matrices de Dirac (mais ne joue aucun rôle réel dans la théorie de l'électron). Notons [29] que, appliquée à la décomposition  $F = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$  du bivecteur champ électromagnétique,  $SU(3)$  correspond à une transformation de  $F_3$  qui laisse invariante la composante temporelle  $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)/2$  du quadrivecteur de Poynting relatif au repère galiléen  $\mathcal{B}$  vecteur temps  $\vec{\gamma}_0$ .

Les constructions précédentes, et par suite les représentations des  $SU(k)$  qu'on peut en déduire, font intervenir un repère  $\mathcal{B}$  privilégié, comme d'ailleurs

la représentation de  $SU(2)$  par  $Spin(E^3(\vec{\gamma}_0))$ . Mais si elles sont associées avec une rotation de Lorentz qui amène  $\mathcal{B}$  en coïncidence avec le repère propre de la particule, elles prennent une signification valable dans ce repère, et donc indépendante de  $\mathcal{B}$ .

#### IV - CONCLUSION

**18** - Ainsi la géométrisation de la théorie de l'électron de Dirac dans un champ extérieur peut être considérée comme entièrement réalisée. Pour les particules "à structure propre" (associées chacune à un groupe de transformation caractéristique de la particule) elle apparaît comme possible, ou même en très bonne voie. Mais qu'on tienne compte du champ créé par l'électron, par exemple pour le calcul du décalage de Lamb, ou qu'on applique une simple méthode de perturbation, alors les claires images géométriques qui ont été associées à l'électron se brouillent quelque peu.

En effet, elles sont déduites de la forme (24) ou (25) donnée au spineur  $\psi$  de Dirac (ou  $\psi$  de Jakobi-Lochak-Hestenes) et sont en fait la traduction géométrique de la notion de "structure propre" associée à l'électron. Un tel spineur est solution de l'équation de Dirac, et en particulier, dans le cas du potentiel central, chaque "état" est représenté par un tel spineur. Mais la somme  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  de deux tels spineurs  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , bien que solution de l'équation de Dirac du fait de la linéarité de cette équation, n'est pas en général susceptible d'être mise sous une telle forme (24) (par exemple, la somme de deux matrices de Lorentz n'est pas forcément une matrice de Lorentz). On ne peut donc pas lui associer la même "structure propre", ni par suite les mêmes images géométriques, qu'aux "spineurs élémentaires" de la forme (24) ou (25).

On associe pourtant à une telle solution  $\psi$  de l'équation de Dirac, un courant de Dirac "généralisé" représenté par le quadrivecteur  $\vec{J} = \psi \vec{\gamma}_0 \tilde{\psi}$ .

On peut certes exprimer ce courant généralisé, et plus particulièrement sa composante  $\vec{J}_{12} = \psi_1 \vec{\gamma}_0 \psi_2 + \psi_2 \vec{\gamma}_0 \psi_1$ , indépendamment de toute base de  $M$ . Mais, sauf à imaginer une nouvelle "structure propre" pour un électron dans "l'état intermédiaire (1, 2)", on ne peut plus associer à un tel  $\psi$  des groupes de transformations analogues à ceux qui sont maintenant reconnus comme étant à la base de la définition de la particule de Dirac. (Il est à noter cependant que c'est, semble-t-il, [35] la considération de "courants croisés" comme  $\vec{J}_{12}$  qui a conduit L. de Broglie à la méthode de fusion, qui n'est que la définition d'une structure propre

pour ses particules maxwelliennes et non maxwelliennes). Faut-il alors abandonner la notion de structure pour un électron ? Il faudrait aussi, interprétation géométrique ou pas, l'abandonner a fortiori pour toutes les particules, autant dire renoncer à la théorie actuelle des particules.

Mais examinons de plus près les huit paramètres réels qui définissent un spineur  $\psi$  "élémentaire" représenté par l'équation (25). Sept d'entre eux, correspondant à  $\vec{v}$ ,  $\vec{s}$ ,  $x$ ,  $\beta$ , définissent au point  $x$  un élément  $\Phi(x)$  du groupe  $G(M) = z(M) \times Spin(M)$  et sont étroitement liés à la structure euclidienne de  $M$ . Le huitième, la densité  $\rho$ , apparaît moins comme un paramètre de structure, relevant d'un groupe de transformations que comme une variable de nature statistique (et cela que l'on considère le fluide  $\mathcal{F}$  représenté par la fonction  $\psi$ , indifféremment, dans l'interprétation de l'Ecole de Copenhague, comme formé par des éventualités différentes de la même particule, ou bien, dans l'interprétation strictement statistique de Ballentine [36], comme constitué par différentes particules, considérées une à une dans des expériences successives mais similaires, et réunies par la pensée en une seule expérience fictive). Mais comment définir, en Relativité, la densité  $\rho(x)$  au point  $x$  du fluide  $\mathcal{F}$  ?  $\rho(x)$  est le quotient, rapporté à l'unité, d'un nombre (d'éventualités) de particules par la mesure d'un petit volume  $V(x)$  entourant le point  $x$  de  $M$ . La définition de  $V(x)$ , et aussi le fait qu'en Relativité, cela n'a aucun sens d'ajouter entre elles des vitesses d'univers, imposent, pour la construction du fluide  $\mathcal{F}$ , de ne considérer au point  $x$  que les seuls éléments  $\Phi(x)$  de  $G(M)$  qui correspondent au même vecteur  $\vec{v}$ . Le volume  $V(x)$  sera une portion de l'espace orthogonal en  $x$  à  $\vec{v}$ . *Mais par cela même nous ne construisons pas un fluide  $\mathcal{F}$  correspondant à toutes les valeurs possibles de  $\Phi(x)$ , mais, en quelque sorte, un fluide partiel.* Avec  $\rho$  et  $\Phi(x)$  on a alors défini huit paramètres réels, ce qui autorise la résolution des huit équations scalaires de Dirac, en *un problème mathématiquement bien posé, pour l'électron dans un champ extérieur.* A chacune des valeurs discrètes de la constante qui apparaît dans la résolution de ce problème correspond un niveau, mais aussi un fluide partiel  $\mathcal{F}$ . Ainsi la séparation en fluides partiels, que l'on a dû faire pour des raisons relativistes, de l'ensemble des éventualités qu'on peut associer à la particule, apparaît *comme une raison relativiste de la séparation des niveaux.* C'est une proposition surprenante, en ce que les niveaux sont apparus dans le premier modèle de Bohr, et dans la théorie de Schrödinger, qui ne sont pas relativistes. Mais elle n'est que la simple conséquence du point de vue par lequel on attribue une "structure interne", entièrement liée à l'espace-temps, à la particule de Dirac.

Si l'on veut tenir compte du potentiel électromagnétique créé par l'électron, alors le problème n'est plus mathématiquement bien défini. On peut essayer de le poser le mieux possible (et de le résoudre tant bien que mal !) en considérant tous les niveaux, discrets ou non, et en couplant l'équation de Dirac avec l'équation de Maxwell du self-potential  $\vec{A}^{self}$  créé par l'électron. Mais se posent alors, concernant cette dernière équation, les mêmes questions à la réponse desquelles la présente étude a été consacrée pour la particule de Dirac :

- (a) En quelle(s) partie(s) de l'équation de Maxwell, purement classique à l'origine, doit-on placer  $\hbar$  ?
- (b) En facteur de quels éléments de l'espace-temps cette constante apparaît-elle ?
- (c) Les liens de cette constante avec la structure euclidienne de  $M$ , qu'on peut en déduire, sont-ils les mêmes que ceux de la théorie de Dirac, ou apportent-ils quelque chose de nouveau ?

La réponse à la première question conditionne celle des deux autres. Incontestablement,  $\hbar$  apparaît, comme conséquence de la quantification de la matière, dans le second membre de l'équation de Maxwell ou "terme source", qu'on représente par un courant "généralisé",  $\vec{J} = \psi \vec{\gamma}_0 \tilde{\psi}$ , où  $\psi$  est une suite discrète de spineurs  $\psi_k$  élémentaires, à laquelle on ajoute une intégrale représentant le spectre continu. En Théorie Semi-Classique (TSC) du rayonnement, c'est le seul endroit où  $\hbar$  peut se situer. Le potentiel  $\vec{A}^{self}$  est regardé comme devant être la solution mathématique exacte, sans autre hypothèse, de l'équation de Maxwell, dès lors que son second membre est supposé connu.  $\hbar$  est ainsi associé à la matière mais non pas au champ. En Electrodynamique Quantique (EDQ), cette constante s'introduit (en concordance d'ailleurs avec le fait que  $\hbar$  se raccroche en théorie de Dirac au potentiel, par l'intermédiaire de l'invariance de jauge) constitutivement dans la définition du potentiel, comme conséquence de la quantification du champ. L'expérience peut-elle lever le doute sur ce point ? Le phénomène de Lamb est considéré comme une confirmation de l'EDQ. Malheureusement, il semble [37] que ce soit aussi une confirmation de la TSC. Rappelons que les intégrales divergentes permettant en EDQ le calcul du décalage de Lamb (par l'application de la méthode des perturbations), où  $\hbar$  apparaît, mais disparaît après changement de variable d'intégration, ne sont pas autre chose qu'une approximation des intégrales (convergentes) qu'on peut déduire en TSC du champ classique. Il conviendrait sans doute que les électrodynamiciens se mettent d'accord sur l'interprétation qu'on peut donner de cette coïncidence

troublante. En attendant, la réponse aux deux autres questions pourrait être envisagée indépendamment, et recherchée par la géométrisation des études sur la “structure propre” des bosons massifs et des photons. Mais la présentation de l’EQD est basée sur la notion d’opérateur. Or comment concevoir cette notion dans la deuxième quantification, alors qu’elle disparaît dans la première (pour être remplacée par celle d’algèbre de Lie, constituée de grandeurs multivectorielles de  $M$ ) ? La transcription géométrique de l’EDQ dépasse le cadre de la présente étude, mais, si le point de vue de la TSC est à rejeter, elle y est étroitement liée.

**ANNEXE**

**Le groupe orthogonal O(E) et l’algèbre de Clifford C(E)**

Rappelons [2] le théorème d’E. Cartan “Toute isométrie d’un espace euclidien  $E$  est un produit (d’un nombre pair pour les rotations, impair pour les retournements) de symétries par rapport à des hyperplans  $H_{\vec{u}_k}$  orthogonaux chacun à un vecteur  $\vec{u}_k$  de  $E$  non isotrope” :

$$\forall J \in O(E) \quad , \quad J = H_{\vec{u}_1} o \cdots o H_{\vec{u}_p} \tag{A_1}$$

(A<sub>1</sub>) se traduit dans C(E) par l’application répétée de la relation (6) :

$$J(\vec{x}) = (-1)^p \eta R \vec{x} \tilde{R} \quad , \quad R = \vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p, \tag{A_2}$$

où

$$R \tilde{R} = \vec{u}_1 \cdots \vec{u}_{p-1} (\vec{u}_p^2) \vec{u}_{p-1} \cdots \vec{u}_1 = \cdots = \vec{u}_1^2 \cdots \vec{u}_p^2 = \tilde{R} R = \eta = (-1)^r, \tag{A_3}$$

$r$  étant le nombre des vecteurs normés  $\vec{u}_k$  tels que  $\vec{u}_k^2 = -1$ .

On rappelle le théorème : “Le groupe orthogonal O(E) admet quatre (ou deux, si  $E$  est proprement euclidien) composantes connexes”.

Nous proposons la démonstration suivante, très simple, de ce théorème. Considérons les quatre isométries particulières  $I =$  identité,  $H_{\vec{u}_0} o H_{\vec{v}_0}$ ,  $H_{\vec{u}_0}$ ,  $H_{\vec{v}_0}$ , où  $\vec{u}_0$ ,  $\vec{v}_0$  sont des vecteurs donnés tels que  $\vec{u}_0^2 > 0$ ,  $\vec{v}_0^2 < 0$ . Par ailleurs on a  $H_{\vec{u}_0} o H_{\vec{u}_0} = I$ , et on vérifie immédiatement que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux on a  $H_{\vec{u}_0} o H_{\vec{v}_0} = H_{\vec{v}_0} o H_{\vec{u}_0}$ . Soit alors  $H_{\vec{u}_k}$  et  $H_{\vec{u}_{k+1}}$  deux isométries consécutives dans l’expression (A<sub>1</sub>) de  $J$ . Si  $\vec{u}_k$  et  $\vec{u}_{k+1}$  sont du même genre, on peut faire tendre

continument  $\vec{u}_k$  vers  $\vec{u}_{k+1}$  et transformer ainsi le produit de ces deux isométries en l'identité ; s'ils sont de genres différents, on peut, par une transformation continue, les rendre orthogonaux ce qui permet d'inverser ce produit, et de rendre l'une de ces isométries consécutive à une isométrie correspondant à un vecteur du même genre. On peut ainsi transformer continument une isométrie quelconque  $J$  en éliminant deux à deux les isométries qui la composent, et finalement, par une dernière transformation continue, se ramener à une des quatre isométries particulières précédentes. Ainsi  $O(E)$  admet *au plus* quatre (deux si tous les vecteurs de  $E$  sont du même genre) composantes connexes.

Il suffit maintenant de prouver que  $O(E)$  peut être partitionné en quatre sous-ensembles disjoints, chacune des quatre isométries particulières précédentes appartenant à un sous-ensemble différent.

$O(E)$  se partage d'abord en l'ensemble  $O^+(E)$  des rotations, et celui  $O^-(E)$  des retournements. Par ailleurs, pour une  $J$  donnée, comme  $\eta$  est indépendant de la décomposition  $(A_1)$  de  $J$  (voir Nota ci-dessous), on peut de plus partager, si  $E$  est pseudo-euclidien,  $O^+(E)$  en  $O^+_+(E)$  et  $O^+_-(E)$ , et  $O^-(E)$  en  $O^-_+(E)$  et  $O^-_-(E)$ , en considérant les  $J$  telles que  $\eta = +1$  ou  $\eta = -1$ . On a  $I \in O^+_+(E)$ ,  $H_{\vec{u}_0} o H_{\vec{v}_0} \in O^+_-(E)$ ,  $H_{\vec{u}_0} \in O^-_+(E)$ ,  $H_{\vec{v}_0} \in O^-_-(E)$ . CQFD. (On remarquera le caractère tout à fait élémentaire de cette démonstration, alors que la démonstration matricielle nécessite l'étude de la convergence de suites, exponentielle ou logarithmiques, de matrices).

Pour tout  $J$  appartenant à  $O^+_+(E) = SO^+(E)$  (ou composante connexe neutre de  $O(E)$ ), on a donc

$$J(\vec{x}) = R\vec{x}\tilde{R} \in E \quad , \quad R \in C^+(E) \quad , \quad R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1. \tag{A_4}$$

Réciproquement, on démontre que l'ensemble

$$Spin(E) = \{R \in C^+(E) : R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1 \quad , \quad R\vec{x}\tilde{R} \in E \quad , \quad \forall \vec{x} \in E\} \tag{A_5}$$

correspond à  $SO^+(E)$  ; plus précisément, l'application

$$R \in Spin(E) \rightarrow J_R \in SO^+(E) : J_R(\vec{x}) = R\vec{x}\tilde{R} \tag{A_6}$$

est un homomorphisme surjectif, de noyau  $\{-1, 1\}$ . Le fait que si  $R$  définit  $J_R$  il en est de même de  $-R$ , qui donne à  $Spin(E)$  l'aspect d'un double revêtement de  $SO^+(E)$ , correspond à ce que  $R$  est construit sur des vecteurs  $\vec{u}_k$  de  $E$  et que  $H_{\vec{u}} = H_{-\vec{u}}$ .

On peut démontrer que si  $\dim(E) \leq 4$ , les conditions  $R \in C^+(E)$  et  $R\tilde{R} = 1$ , suffisent pour définir  $Spin(E)$ .

Si  $E = E^3$ , on peut écrire  $R = \cos \theta/2 - \sin \theta/2 i\mathbf{u}$ ,  $R = \cos \theta/2 + \sin \theta/2 i\mathbf{u}$ .  $Spin(E^3)$  est une variété à trois dimensions, compacte.  $Spin(M)$  est une variété à six dimensions, non compacte.

Nota L'indépendance de  $\eta$  et, au signe près, de  $R$ , par rapport à la décomposition  $(A_1)$  de  $J$  se vérifie ainsi. Soit  $J(\vec{x}) = (-1)^p \eta R \vec{x} \tilde{R} = (-1)^{p'} \eta' R' \vec{x} \tilde{R}'$ . Puisque  $p$  et  $p'$  sont de même parité, on a  $\eta R \vec{x} \tilde{R} = \eta' R' \vec{x} \tilde{R}'$ , d'où  $\eta \tilde{R} R \vec{x} \tilde{R}' R' = \eta' \tilde{R}' R' \vec{x} \tilde{R} R$ , d'où  $\eta^2 \vec{x} \tilde{R} R' = \eta'^2 \tilde{R}' R' \vec{x}$ , avec  $\eta^2 = \eta'^2 = 1$ ,  $\tilde{R}' R' \in C^+(E)$  (puisque  $p, p'$  de même parité). Or on vérifie aisément que si  $X \in C^+(E)$  et  $X\vec{x} = \vec{x}X, \forall \vec{x} \in E$ , alors  $X \in \mathbf{R}$ . D'où  $\tilde{R}' R' = \lambda \in \mathbf{R}$ ,  $(\tilde{R}' R') \sim = \tilde{R}' R = \tilde{\lambda} = \lambda$ , d'où  $\eta R' = \lambda R, \eta' R = \lambda R'$ , d'où  $\eta \eta' = \lambda^2$ , d'où  $\eta = \eta', \lambda^2 = 1, R' = \pm R$ .

**Calcul de  $\Omega$**

On a

$$\partial_\mu \sigma = \partial_\mu (R \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{R}) = (\partial_\mu R) \tilde{R} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 R + R \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{R} R \partial_\mu \tilde{R} = \frac{1}{2} (\Omega_\mu \sigma - \sigma \Omega_\mu).$$

Posons

$$h_\mu = \frac{1}{2} (\Omega_\mu \sigma + \sigma \Omega_\mu),$$

d'où  $-\Omega \sigma = +\tilde{\gamma}^\mu \Omega_\mu \sigma = (\nabla \sigma + \tilde{\gamma}^\mu h_\mu)$ .

Or  $\tilde{h}_\mu = h_\mu$  et par suite la partie bivectorielle de  $h_\mu \in C^+(E)$  est nulle et  $h_\mu$  est de la forme  $X + iY$  où  $X, Y \in \mathbf{R}$ . On a

$$[\Omega_\mu \sigma]_S = (\Omega_\mu \cdot \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 = \Omega_\mu \cdot (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \Omega_\mu \cdot \sigma = [\sigma \Omega_\mu]_S$$

d'où  $X = \Omega_\mu \cdot \sigma$ .

De même

$$h_\mu = -i^2 h_\mu = -\frac{i}{2} (\Omega_\mu \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \Omega_\mu) = -i (\Omega_\mu \cdot \hat{\sigma} + iX)$$

d'où  $Y = -\Omega_\mu \cdot \hat{\sigma}$ .

Comme

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= (\partial_\mu \vec{n}_1) \cdot \vec{n}_2 = \Omega_\mu \cdot \sigma, \\ \varpi_\mu &= \Omega_\mu \cdot \hat{\sigma}, \end{aligned}$$

on en déduit

$$-\Omega\sigma^2 = \Omega = (\nabla\sigma + \vec{\gamma}^\mu\omega_\mu - \gamma^\mu i\varpi_\mu)\sigma = (\nabla\sigma + \vec{\omega} + i\vec{\varpi})\sigma.$$

## Références

- [1] P. Tait, *Traité élémentaire des Quaternions*, G.V. (1882)
- [2] J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Springer (1971)
- [3] H. Tetrode, *Z. Phys.* **49**, 858 (1928)
- [4] J. Yvon, *J. Phys. et le Radium*, **VIII**, 18 (1940)
- [5] O. Costa de Beauregard, *Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac* G.V. (1943)
- [6] T. Takabayasi, *Supp. of the Prog. Theor. Phys.*, **4**, 1 (1957)
- [7] R. Boudet, *C.R.A.S.*, **272**, A, 767 (1971)
- [8] J. Mickelsson, *Lett. in Math. Phys.*, **6**, 221 (1982)
- [9] J. des Cloizeaux, *J. Phys.*, **44**, 885 (1983)
- [10] F. Halbwachs, *Théorie relativiste de fluides à spin*, G.V. (1960)
- [11] G. Casanova *L'algèbre vectorielle*, Collection "Que sais-je ?" PUF (1976)
- [12] D. Hestenes, *J. Math. Phys.*, **8**, 798 (1967)
- [13] F. Halbwachs, J.M. Souriau, J.P. Vigièr, *J. Phys. et le Radium*, **22**, 293 (1961)
- [14] G. Jakobi et G. Lochak, *C.R.A.S.*, **243**, 234 (1956) ; **243**, 357 (1956)
- [15] P. Quilichini, *C.R.A.S.*, **273**, B, 829 (1971)
- [16] R. Boudet, *C.R.A.S.*, **278**, 1063 (1974)
- [17] H. Bethe and E. Salpeter *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*, Springer Verlag
- [18] A. Messiah *Mécanique quantique*, tome II, Dunod (1964)
- [19] A. Sommerfeld, *Atomba und Spektrallinien*, II (1960)
- [20] R. Boudet, P. Quilichini, *C.R.A.S.*, **268**, A, 724 (1969)
- [21] G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **8**, 345 (1983), **9**, 5 (1984)
- [22] R. Boudet, *J. Math. Phys.* **26**, 718 (1985)
- [23] R. Gurtler, D. Hestenes, *J. Math. Phys.* **16**, 573 (1975)
- [24] G. Lochak, *C.R.A.S.*, **245**, 2023 (1957)
- [25] D. Hestenes, *Am. J. Phys.*, **47**, 399 (1979)
- [26] R. Deck, *Am. J. Phys.*, **49**, 495 (1981)
- [27] D. Hestenes, *J. Math. Phys.*, **8**, 809 (1967)
- [28] G. Casanova, *C.R.A.S.* 280, A, 1321 (1975) ; 281, A, 257 (1975) ; 282, A, 349 (1976) ; 282, A, 665 (1976)
- [29] D. Hestenes, *Found. Phys.*, **12**, 153 (1982)
- [30] W. Pauli, *Nuovo Cimento*, **6**, 204 (1957)
- [31] L. de Broglie, *Introduction à la nouvelle théorie des particules*, G.V. (1961)
- [32] J. Keller, *Int. J. Theor. Phys.*, **21**, 829 (1982) ; **23**, 817 (1984)
- [33] F. Gursey, *Nuovo Cimento*, **7**, 411 (1958)
- [34] R. Boudet, *C.R.A.S.*, **274**, 1278 (1972) ; **274**, 1970 (1972)
- [35] G. Lochak, *Communication personnelle*
- [36] L. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.*, **42**, 358 (1970)
- [37] A. Barut, J. Kraus, *Found. Phys.*, **13**, 189 (1983) ; A. Barut, J. Van Huele, *Phys. Rev.*, A, **32**, 3187 (1985).