Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale (Deuxième partie)

N. Stavroulakis

Faculté des Sciences de Limoges
123 avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex

RÉSUMÉ. Dans cette deuxième partie nous commençons par introduire la fonction de propagation de la lumière émise radialement du bord sphérique de la source en déformation. La fonction de propagation classique $\tau - \rho/c$ qui est valable dans le cadre de l'espace pseudo-euclidien de la Relativité Restreinte, n'a plus de sens en Relativité Générale. Cependant la généralité et la souplesse de la métrique spatio-temporelle nous autorisent à changer de coordonnée temporelle sans transgresser les conditions initiales et les conditions aux limites du problème, de sorte que la fonction de propagation de la lumière est en fait susceptible d'une infinité de déterminations. En profitant de cette situation avantageuse, on établit qu'il existe toujours un difféomorphisme global transformant la restriction de la métrique à l'extérieur de la matière en une forme simple, que nous appellerons *canonique*, par rapport à laquelle la fonction de propagation de la lumière s'identifie à la coordonnée temporelle. Ensuite en se fondant sur un petit nombre d'hypothèses, qui s'imposent de façon tout à fait naturelle, on démontre que la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels (ou éventuellement de tout autre ébranlement susceptible de se propager dans le vide macroscopique) est identique à celle de la lumière, donc aussi à la coordonnée temporelle par rapport à la forme canonique. Par conséquent celle-ci constitue le cadre approprié pour l'étude des états non stationnaires du champ qui sont engendrés par la propagation des ébranlements gravitationnels produits sur le bord de la source. L'ébranlement gravitationnel produit à l'instant τ s'identifie au couple $(\sigma'(\tau), \zeta'(\tau))$, en désignant par $\sigma(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ respectivement le rayon et le rayon de courbure du bord sphérique de la matière. Rien ne prouve a priori que les valeurs de $|\sigma'(\tau)| + |\zeta'(\tau)|$ sont petites lorsque la masse est très petite, de sorte que les effets gravitationnels engendrés par les ébranlements sont susceptibles de jouer un rôle considérable à l'échelle des corpuscules. Le corpuscule pulsant, chargé ou non chargé, au sein du champ ondulatoire engendré par ses propres pulsations, est le soliton réaliste qui résulte des équations d'Einstein. On verra que la solution générale de celles-ci relativement à la métrique canonique donne lieu à des solitons avec diffusion d'ondes gravitationnelles, et cela conduit à la question de savoir si une telle situation reflète vraiment la réalité. En tout cas on déterminera en particulier les solitons sans diffusion d'ondes gravitationnelles en s'inspirant des potentiels

retardés classiques. Un tel soliton sera appelé *un soliton de Huyghens.* Il est caractérisé par la propriété que l'annulation de l'ébranlement $(\sigma'(\tau), \zeta'(\tau))$ sur n'importe quel intervalle de temps entraîne l'établissement d'un état universellement stationnaire.

Le soliton gravitationnel possède les caractéristiques qualitatives de l'onde à bosse, proposée par Louis de Broglie [8], mais on ne saurait procéder hâtivement à un rapprochement de ces deux concepts. L'onde à bosse est censée être solution d'une équation d'ondes non linéaire afin de pouvoir rendre compte de la multitude des phénomènes quantiques. Quant au soliton gravitationnel, il est d'abord conçu et défini dans son système de référence propre dont l'origine est placée au centre du corpuscule. Il faudrait ensuite étudier son mouvement sans négliger son étendue spatiale, ce qui pose des problèmes délicats. En outre il faudrait enrichir la notion de départ, qui se rapporte à la symétrie sphérique, afin de prendre en considération des situations plus réalistes.

4. La fonction de propagation et la métrique canonique

Revenons à la forme générale (2.6) des métriques $\Theta(4)$ -invariantes qui définissent les champs des sources $\Theta(4)$ -invariantes en déformation. A une telle source on associe d'abord les deux fonctions du temps, $\sigma(\tau) = \| x(\tau) \|$ et $\zeta(\tau)$, qui représentent respectivement le rayon et le rayon de courbure de son bord sphérique. Etant donné que la gravitation se propage de proche en proche, les changements dans la matière se répercutent dans le champ extérieur à travers ce bord sphérique, de sorte que les états non stationnaires du champ extérieur se réalisent durant les intervalles de temps sur lesquels les dérivées $\sigma'(\tau)$ et $\zeta'(\tau)$ ne s'annulent pas. Ainsi l'ébranlement gravitationnel pour le champ extérieur s'identifie au couple $(\sigma'(\tau), \zeta'(\tau))$. L'annulation simultanée de $\sigma'(\tau)$ et $\zeta'(\tau)$ sur un intervalle de temps entraîne le passage du bord dans un état d'équilibre et –à moins de diffusion d'ondes– il s'établit alors un état stationnaire du champ extérieur. Les fonctions $\sigma(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ doivent être supposées suffisamment ou mieux indéfiniment dérivables, mais ne peuvent pas être analytiques (puisque leurs dérivées s'annulent sur des intervalles sans être identiquement nulles sur $\mathbf{R}$).

Cela dit, les fonctions $\sigma(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ étant prises pour conditions initiales, nous allons nous occuper de la détermination du champ extérieur moyennant les équations d'Einstein dont la solution sera en conséquence recherchée sur le fermé

$$\{(\tau, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 | \parallel x \parallel \geq \sigma(\tau)\}$$

relativement à la métrique (2.6). Bien entendu lorsque la source est chargée, on y adjoindra les équations du champ électromagnétique sous leur forme relativiste à l'extérieur de la matière. Ainsi posé, notre problème n'est pas encore suffisamment précisé, car la coordonnée temporelle figure dans (2.6) de façon purement formelle sans pouvoir discerner son rôle dans la loi de propagation de la gravitation à l'extérieur de la source. En fait, compte tenu de la $\Theta(4)$ -invariance de (2.6), les ébranlements gravitationnels se propagent radialement, mais on ne connaît pas d'avance leur loi de propagation. Malgré une opinion assez répandue, les équations d'Einstein, comme l'avait déjà remarqué Max Born [10], n'entraînent pas forcément que la gravitation se propage à la vitesse de la lumière. D'après Léon Brillouin [7], tout ce qu'on peut affirmer en principe est que la gravitation se propage à une vitesse inférieure ou égale à la vitesse c de la lumière. Nous allons discuter ce problème fondamental en nous fondant sur un formalisme adéquat. En effet, la vitesse c admet une définition précise dans le cadre de l'espace homogène et isotrope de la Relativité Restreinte, mais, par rapport à la métrique spatio-temporelle générale ds^2, l'expression "propagation radiale à la vitesse de la lumière" doit être remplacée par : "propagation radiale satisfaisant à la condition $ds^2 = 0$". D'autre part la loi de propagation des ébranlements gravitationnels doit être établie sur la base des propriétés de la métrique spatio-temporelle indépendamment des équations d'Einstein.

Notre étude sera basée essentiellement sur la condition $|h| \leq l$ (cf. (2.7)) dont la validité est indispensable afin de pouvoir caractériser la coordonnée temporelle dans la métrique (2.6) et attribuer ainsi à celle-ci une signification physique. Si l'on ne respecte pas cette condition, on se heurte tout de suite à des non-sens, et en particulier on ne peut pas concevoir les mouvements radiaux des photons. En effet, l'annulation de ds^2 sur une demi-géodésique radiale issue du bord de la source,

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 = \alpha_1 \rho \quad , \quad x_2 = \alpha_2 \rho \quad , \quad x_3 = \alpha_3 \rho \quad ,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad , \quad \rho \geq \sigma(\tau)\},$$

donne

$$(f(\tau,\rho)d\tau + h(\tau,\rho)d\rho)^2 = (l(\tau,\rho))^2 \, d\rho^2,$$

d'où l'on tire les deux équations différentielles

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) \pm l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)} \tag{4.1}$$

qui définissent les mouvements radiaux des photons. Supposons maintenant que la condition $|h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho)$ ne soit pas partout satisfaite. Alors si l'on avait partout $|h(\tau,\rho)| > l(\tau,\rho)$, compte tenu de $f(\tau,\rho) > 0$ et $l(\tau,\rho) > 0$, il en résulterait

$$\frac{-h(\tau,\rho) \pm l(\tau,\rho)}{l(\tau,\rho)} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{-h(\tau,\rho) \pm l(\tau,\rho)}{l(\tau,\rho)} > 0$$

suivant que $h(\tau,\rho) > l(\tau,\rho)$ ou $-h(\tau,\rho) > l(\tau,\rho)$. Dans le premier (resp. deuxième) cas, les équations (4.1) entraîneraient toutes les deux $d\tau/d\rho < 0$ (resp. $d\tau/d\rho > 0$), de sorte qu'il ne pourrait pas alors exister des mouvements tels que $d\tau/d\rho > 0$ (resp. $d\tau/d\rho < 0$), c'est-à-dire qu'il ne pourrait pas exister des photons s'éloignant de (resp. se dirigeant vers) la source radialement. D'autre part, si l'on avait $|h(\tau,\rho)| > l(\tau,\rho)$ non pas partout, mais sur un ouvert de $\{(\tau,\rho) \in \mathbf{R}^2 | \rho \geq \sigma(\tau)\}$, la situation serait encore plus déraisonnable, car elle entraînerait des mouvements de photons aller et retour sur des segments de géodésiques à l'extérieur de la matière. En conclusion on constate que la validité de la condition $|h| \leq l$ est une nécessité absolue pour pouvoir attribuer à la métrique (2.6) une signification physique.

Cela dit, la propagation de la lumière servant de référence, nous devons d'abord établir la loi de propagation des ébranlements électromagnétiques qui s'éloignent radialement de la matière ou, ce qui revient au même, la loi du mouvement des photons émis radialement du bord sphérique de la source. Dans la suite nous utilisons toujours l'expression abrégée "propagation de la lumière (resp. des photons)" au lieu de : "propagation de la lumière émise (resp. des photons émis) radialement du bord de la matière".

a) Fonction de propagation de la lumière

A titre indicatif considérons d'abord les photons dans l'espace homogène et isotrope de la Relativité Restreinte. Leurs mouvements sont alors définis par la fonction de propagation $\tau - \rho/c$ qui s'écrit mieux $\tau - (\rho - \sigma_0)/c$ en supposant que les photons soient émis radialement du bord sphérique d'une boule stationnaire de rayon σ_0. Pour toute valeur fixée $t \in \mathbf{R}$, l'équation

$$\tau - \frac{\rho - \sigma_0}{c} = t$$

détermine le mouvement d'un photon émis à l'instant t. En faisant varier t, on obtient, dans le plan de (τ,ρ), un feuilletage du demi-plan $\rho \geq \sigma_0$ par des demi-droites parallèles de pente c. Notons que la fonction de propagation ainsi introduite

$$\tau - \frac{\rho - \sigma_0}{c}$$

est une fonction strictement croissante par rapport à τ et strictement décroissante par rapport à ρ. Cette propriété aura son pendant dans le cas général, mais la décroissance par rapport à ρ ne sera pas forcément toujours stricte.

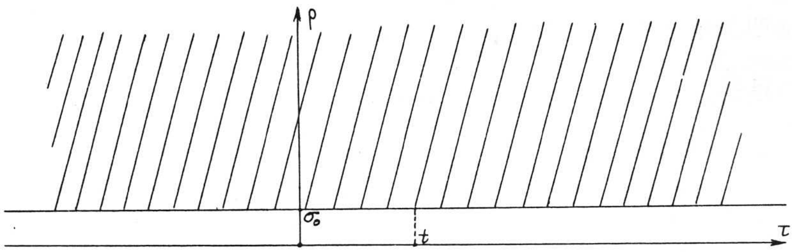

Figure 1.

Considérons maintenant les mouvements radiaux des photons relativement à (2.6). L'annulation de ds^2 sur une demi-géodésique issue du bord de la matière donne (4.1), c'est-à-dire les deux équations

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) + l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)} \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) - l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)},$$

lesquelles, compte tenu de $|h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho)$, définissent les mouvements des photons qui, respectivement, s'éloignent radialement de la source et se dirigent radialement vers la source. Puisqu'il s'agit de comparer la propagation des ébranlements gravitationnels, qui se propagent en s'éloignant de la source, au mouvement des photons, nous avons à retenir uniquement la première équation

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) + l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)}. \tag{4.2}$$

Notre premier problème est alors le suivant : *Fixons une valeur $t \in \mathbf{R}$ et considérons un point $x \in \mathbf{R}^3$ atteint par le bord de la source en déformation quand l'horloge qui se trouve en x indique l'instant t. Déterminer le mouvement d'un photon* [1] *émis radialement du point du bord qui coïncide avec x à l'instant t.*

[1]L'émission d'un photon isolé perturbe la symétrie sphérique sur laquelle sont basés tous nos calculs. En fait il est sous-entendu que l'on considère l'émission radiale simultanée de photons de tous les points du bord.

En d'autres termes : *Déterminer la solution de* (4.2) *qui prend la valeur* t *pour* $\rho = \sigma(t)$.

Puisque la vitesse radiale $|\sigma'(t)|$, calculée à l'instant t, du bord de la matière sera petite par rapport à la vitesse de fuite $v(t)$ du photon au même instant, et que

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{-h(t,\sigma(t)) + l(t,\sigma(t))}{f(t,\sigma(t))},$$

on aura l'inégalité stricte

$$\frac{-h(t,\sigma(t)) + l(t,\sigma(t))}{f(t,\sigma(t))}\,|\sigma'(t)| < 1 \tag{4.3}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

La fonction $\sigma : \mathbf{R} \to]0,+\infty[$ étant supposée donnée une fois pour toutes, soient maintenant

$$W = \{(\tau,\rho) \in \mathbf{R}^2 | \rho > \sigma(\tau)\} \quad \text{et} \quad F = \{(\tau,\rho) \in \mathbf{R}^2 | \rho = \sigma(\tau)\},$$

ce qui entraîne $\overline{W} = W \cup F$. Les fonctions $f(\tau,\rho)$, $h(\tau,\rho)$, $l(\tau,\rho)$ sont supposées définies et indéfiniment dérivables sur $\overline{W}$, mais, puisque nous cherchons la solution de (4.2) pour des conditions initiales prises sur la frontière F, nous sommes amenés à prolonger

$$q(\tau,\rho) = \frac{-h(\tau,\rho) + l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)}$$

en une fonction indéfiniment dérivable sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ contenant $\overline{W}$. En fait on peut démontrer, et nous l'acceptons, que la solution obtenue de (4.2) ne dépend pas du prolongement choisi pour $q(\tau,\rho)$. D'autre part, les fonctions $f(\tau,\rho)$, $h(\tau,\rho)$, $l(\tau,\rho)$ n'étant pas choisies spécialement, la solution de l'équation différentielle (4.2) ne pourra en principe être que de nature locale. De façon précise on obtient le résultat suivant, admis aussi sans démonstration.

Proposition 4.1. *La condition* (4.3) *étant supposée vérifiée sur* $\mathbf{R}$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* F *dans* $\overline{W}$ *donnant lieu aux propriétés suivantes:*

(a) *V est feuilleté par des arcs de courbes intégrales de* (4.2) *issus des points de F (et contenus en conséquence entièrement dans $\overline{W}$).*

(b) *Il existe une surjection indéfiniment dérivable $\pi : V \to \mathbf{R}$ telle que*

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau} > 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho} \leq 0 \quad \textit{pour tout} \quad (\tau,\rho) \in V,$$

et que l'arc de courbe intégrale issu de $(t, \sigma(t)) \in F$ *s'obtienne en résolvant par rapport à* τ *l'équation* $\pi(\tau, \rho) = t$*, et cela pour toute valeur fixée de* $t \in \mathbf{R}$. (La fonction $\pi(\tau, \rho)$ est donc une intégrale première de (4.2) sur V).

On ne saurait s'attendre à un résultat général plus fin, car l'existence de solutions globales de (4.2) n'est envisageable que pour des choix convenables de $f(\tau, \rho)$, $h(\tau, \rho)$, $l(\tau, \rho)$. Ainsi la solution $\xi(t, \rho)$ de (4.2), qui s'obtient en résolvant l'équation $\pi(\tau, \rho) = t$, sera en général définie sur un intervalle borné $[\sigma(t), \rho_1(t)[$. Or la métrique (2.6) sera dépourvue de signification physique, si elle n'assure pas la propagation de la lumière sur toute l'étendue de l'espace à l'extérieur de la matière. Par conséquent les fonctions f, h, l qui figurent dans (2.6), doivent être telles que la solution $\tau = \xi(t, \rho)$ de (4.2) qui prend la valeur t pour $\rho = \sigma(t)$ soit définie sur $[\sigma(t), +\infty[$, et cela quelle que soit la valeur $t \in \mathbf{R}$. La courbe intégrale correspondante se trouve entièrement dans $\overline{W}$ (et sa restriction à $]\sigma(t), +\infty[$ se trouve dans W), de sorte que, lorsque t parcourt $\mathbf{R}$, on obtient un feuilletage de $\overline{W}$ par des courbes intégrales de (4.2) issues des points de F.

L'inégalité stricte $\partial\xi(t, \rho)/\partial t > 0$ est alors valable sur $\overline{W}$ et l'équation $\xi(t, \rho) = \tau$ se résout globalement sous la forme $\pi(\tau, \rho) = t$ avec

$$\pi(\tau, \sigma(\tau)) = \tau \quad , \quad \frac{\partial\pi(\tau, \rho)}{\partial\tau} > 0, \quad \frac{\partial\pi(\tau, \rho)}{\partial\rho} \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad (\tau, \rho) \in \overline{W} \quad (4.4)$$

Ainsi nous avons l'énoncé suivant.

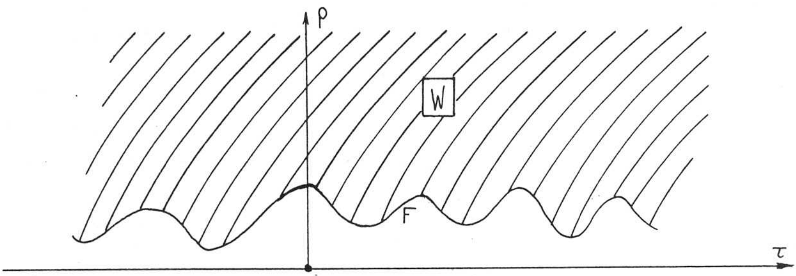

Figure 2.

Proposition 4.2. *Si la métrique* (2.6) *est susceptible d'avoir une signification physique à l'extérieur de la matière, alors la condition* (4.3) *est valable pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *et l'équation différentielle* (4.2) *admet une intégrale première* $\pi : \overline{W} \to \mathbf{R}$ *satisfaisant aux conditions* (4.4) *et telle que* $\pi(\overline{W}) = \mathbf{R}$ *et que, pour tout* $(\tau, x) \in \{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 | \parallel x \parallel \geq \sigma(\tau)\}$*, la valeur* $\pi(\tau, \rho) = \pi(\tau, \parallel x \parallel)$ *soit l'instant d'émission radiale d'un photon qui atteint la sphère* $\parallel x \parallel = \rho$ *à l'instant* τ.

La surjection $\pi : \overline{W} \to \mathbf{R}$ est alors la fonction de propagation de la lumière relativement à la métrique (2.6).

Proposition 4.3. *Si* $\pi : \overline{W} \to \mathbf{R}$ *est la fonction de propagation définie ci-dessus, alors en posant* $\Gamma(\tau, \rho) = (\pi(\tau, \rho), \rho) = (t, \rho)$, *on obtient un difféomorphisme* $\Gamma : \overline{W} \to \overline{W}$ *qui laisse les points de* F *fixes et qui, pour tout* $t \in \mathbf{R}$, *transforme la courbe intégrale* $\{(\tau, \rho) \in \overline{W} | \tau = \xi(t, \rho)\}$ *de* (4.2) *issue de* $(t, \sigma(t)) \in F$ *en une demi-droite issue du même point et parallèle à l'axe des* ρ. *En outre il transforme la métrique* (2.6) *en une autre métrique* $\Theta(4)$ *-invariante par rapport à laquelle la fonction de propagation de la lumière se réduit à la coordonnée temporelle.*

Démonstration. L'application Γ est bijective et de plus son déterminant jacobien est égal à $\partial\pi(\tau, \rho)/\partial\tau$, donc partout strictement positif. Par conséquent Γ est un difféomorphisme. D'autre part chaque courbe intégrale de (4.2) est définie par une valeur fixée $t \in \mathbf{R}$, de sorte que sa transformée est une demi-droite issue de $(t, \sigma(t))$ et parallèle à l'axe des ρ. Finalement puisque

$$\tau = \xi(t, \rho) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{-h + l}{f},$$

il en résulte

$$f d\tau + h \frac{x dx}{\rho} = \left(f \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) dt + \left(f \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + h \right) \frac{x dx}{\rho} = \left(f \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) dt + l \frac{x dx}{\rho}$$

avec

$$f = f(\xi(t, \rho), \rho), \quad h = h(\xi(t, \rho), \rho), \quad l = l(\xi(t, \rho), \rho).$$

Par conséquent nous avons $h = l$ dans la métrique transformée. Mais alors l'équation (4.2) relative à celle-ci se réduit à

$$\frac{dt}{d\rho} = 0,$$

d'où $t = Cte$, et la fonction de propagation se réduit bien à t. (Cela résulte aussi du fait que la transformée de $\pi(\tau, \rho)$ par Γ est la fonction $\pi(\xi(t, \rho), \rho) = t$).

Remarque 4.1. Puisque le difféomorphisme Γ laisse les points de F fixes, il ne modifie pas les conditions initiales $\sigma(\tau)$ et $\zeta(\tau)$.

En écrivant maintenant $f(t, \rho)$, $l(t, \rho)$, $g(t, \rho)$ respectivement au lieu de $f(\xi(t, \rho), \rho)$, $l(\xi(t, \rho), \rho)$, $g(\xi(t, \rho), \rho)$, la métrique transformée, appelée désormais *canonique*, prend la forme

$$(4.5)\qquad ds^2 = \left(f(t,\rho)dt + l(t,\rho)\frac{xdx}{\rho}\right)^2 - \left[\left(\frac{g(t,\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left((l(t,\rho))^2 - \left(\frac{g(t,\rho)}{\rho}\right)^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right].$$

La simplification introduite par l'égalité $h = l$ est considérable : La fonction de propagation de la lumière se réduisant à t, elle est indépendante aussi bien des fonctions inconnues f, l, g que des conditions initiales $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$. Le mouvement d'un photon émis radialement du bord à l'instant t_0 est défini maintenant par l'égalité $t = t_0$, qui, lorsque t_0 parcourt $\mathbf{R}$, donne lieu à un feuilletage de $\overline{W}$ par des demi-droites issues des points de F et parallèles à l'axe des ρ. Cela précise la signification physique de la coordonnée temporelle qui figure dans la métrique canonique: Un instant quelconque du temps des différents observateurs sur une demi-géodésique radiale issue du bord de la matière sera marquée par le passage d'un même photon.

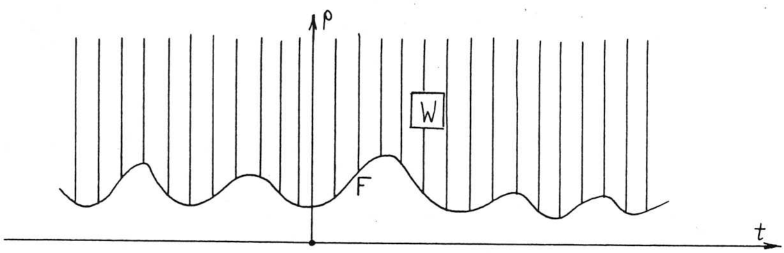

Figure 3.

Notons que la métrique canonique est conçue sur $\{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 |\ \| x \| \geq \sigma(t)\}$, c'est-à-dire à l'extérieur de la matière, et qu'il est impossible de lui attribuer une validité universelle. On le voit déjà en se rapportant à la définition des fonctions h et l (§2). En effet, l est partout strictement positive, tandis que h s'annule pour $\rho = 0$, de sorte que l'égalité $h(\tau, \| x \|) = l(\tau, \| x \|)$ est impossible lorsque x parcourt un certain voisinage de l'origine.

Proposition 4.4. *Toute métrique de la forme* (2.6), *à savoir*

$$(4.6)\qquad ds^2 = \left(\hat{f}(\tau,\rho)d\tau + \hat{h}(\tau,\rho)\,\frac{xdx}{\rho}\right)^2$$

$$-\left[\left(\frac{\hat{g}(\tau,\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2+\left((\hat{l}(\tau,\rho))^2-\left(\frac{\hat{g}(\tau,\rho)}{\rho}\right)^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right]$$

susceptible de définir le champ à l'extérieur de la source, résulte d'une métrique canonique (4.5), *si l'on y remplace la coordonnée temporelle par une surjection indéfiniment dérivable* $\pi:\overline{W}\to\mathbf{R}$ *telle que*

$$\pi(\tau,\sigma(\tau))=\tau, \tag{a}$$

$$\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau}>0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}\le 0 \quad \text{pour tout} \quad (\tau,\rho)\in\overline{W}, \tag{b}$$

$$\left|\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}\right|\le\frac{2l(\pi(\tau,\rho),\rho)}{f(\pi(\tau,\rho),\rho)}. \tag{c}$$

Démonstration. Supposons que la métrique (4.6) soit admissible, ce qui entraîne en particulier $|\hat{h}(\tau,\rho)|\le\hat{l}(\tau,\rho)$ et permet de définir la fonction de propagation $\pi(\tau,\rho)$ de la lumière. Alors $\pi:\overline{W}\to\mathbf{R}$ est une surjection indéfiniment dérivable satisfaisant aux conditions (a) et (b) . En outre l'application $\Gamma:\overline{W}\to\overline{W}$ définie par: $\Gamma(\tau,\rho)=(\pi(\tau,\rho),\rho)=(t,\rho)$, est un difféomorphisme transformant (4.6) en une métrique canonique (4.5), d'après la proposition 4.3. Par conséquent (4.6) résulte de (4.5) moyennant l'application inverse Γ^{-1}, c'est-à-dire en remplaçant t par $\pi(\tau,\rho)$, ce qui donne

$$\hat{f}(\tau,\rho)=f(\pi(\tau,\rho),\rho)\,\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau},$$

$$\hat{h}(\tau,\rho)=f(\pi(\tau,\rho),\rho)\,\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}+l(\pi(\tau,\rho),\rho),$$

$$\hat{l}(\tau,\rho)=l(\pi(\tau,\rho),\rho),$$

$$\hat{g}(\tau,\rho)=g(\pi(\tau,\rho),\rho),$$

et puisque $|\hat{h}(\tau,\rho)|\le\hat{l}(\tau,\rho)$, on en déduit aussi la condition (c).

Nous voyons maintenant que la fonction de propagation de la lumière figurera comme fonction arbitraire dans la solution globale des équations d'Einstein relatives à la métrique générale (2.6), et par conséquent nous avons le droit d'utiliser la métrique canonique par rapport à laquelle cette fonction prend la forme la plus simple possible en se réduisant à la coordonnée temporelle. Ainsi les conditions physiques du problème conduisent à une simplification considérable dont on ne saurait d'ailleurs se passer. Si l'on partait directement de la métrique générale (2.6) sans tenir compte de la fonction de propagation de la lumière, on se trouverait tout de suite face à des difficultés techniques insurmontables.

b) Fonction de propagation des ébranlements gravitationnels

Dans certaines conditions générales dont il semble impossible de se passer, on va établir que la fonction de propagation de l'ébranlement gravitationnel (ou éventuellement de tout autre ébranlement qui se propage radialement en s'éloignant de la source dans le vide macroscopique) est identique à celle de la lumière.

L'ébranlement gravitationnel pour le champ extérieur étant produit par la déformation du bord de la source, il s'identifie au couple $(\sigma'(t), \zeta'(t))$. Pour chaque valeur $t \in \mathbf{R}$, nous dirons que $(\sigma'(t), \zeta'(t))$ est l'ébranlement gravitationnel produit sur le (ou émis du) bord à l'instant t.

Considérons maintenant la propagation de l'ébranlement gravitationnel par rapport à la métrique canonique (4.5). Elle s'exprimera par une modification de proche en proche de la métrique, modification qu'il reste d'ailleurs à déterminer moyennant les équations d'Einstein après avoir défini la fonction de propagation correspondante. Cela dit, l'instant d'émission étant t, soit $\tau = \xi(t, \rho)$ l'instant d'arrivée de l'ébranlement sur la sphère $\| x \| = \rho$, ce qui entraîne en particulier $\xi(t, \sigma(t)) = t$. Nous supposons que la propagation soit assez rapide de façon que l'ébranlement émis à l'instant t ne soit jamais rattrapé par le bord de la source, lorsque celle-ci se trouve en expansion, ce qui implique $(\xi(t, \rho), \rho) \in W$ pour tout $\rho > \sigma(t)$. De cette façon l'ébranlement se propage de proche en proche sur toute l'étendue de l'espace à l'extérieur de la matière. En ce qui concerne la fonction $\xi(t, \rho)$, elle doit manifestement être strictement croissante par rapport à t, ce qui amène à introduire la condition $\partial\xi(t, \rho)/\partial t > 0$ pour tout $(t, \rho) \in \overline{W}$. Résolvant alors l'équation $\xi(t, \rho) = \tau$ par rapport à t, on trouve $t = \pi(\tau, \rho)$, de sorte que $\pi(\tau, \rho)$ est la fonction de propagation de l'ébranlement par rapport à la métrique canonique (4.5). En outre en posant $D(t, \rho) = (\xi(t, \rho), \rho) = (\tau, \rho)$, nous définissons un difféomorphisme $D : \overline{W} \to \overline{W}$ laissant fixes les points de la frontière F, et nous supposons finalement que la transformée de (4.5) par D soit une métrique admissible.

Proposition 4.5. *Les hypothèses formulées ci-dessus entraînent que la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels est identique à celle de la lumière.*

Démonstration. Puisque les valeurs de la coordonnée temporelle t dans (4.5) s'identifient aux instants d'émission des ébranlements, la transformée de (4.5) par D s'obtient en y remplaçant t par $\pi(\tau, \rho)$, ce qui donne la métrique (4.6) avec

$$\hat{f}(\tau, \rho) = f(\pi(\tau, \rho), \rho) \, \frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \tau},$$

$$\hat{h}(\tau, \rho) = f(\pi(\tau, \rho), \rho) \, \frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \rho} + l(\pi(\tau, \rho), \rho),$$

$$\hat{l}(\tau, \rho) = l(\pi(\tau, \rho), \rho), \hat{g}(\tau, \rho) = g(\pi(\tau, \rho), \rho).$$

Dans la nouvelle métrique (4.6), la signification de la coordonnée temporelle τ est la même que celle du temps $\tau = \xi(t, \rho)$ par rapport à (4.5), c'est-à-dire que chaque valeur de τ est l'instant d'arrivée sur la sphère $\| x \| = \rho$ de l'ébranlement émis à l'instant t. Par conséquent $\pi(\tau, \rho)$ est encore la fonction de propagation de l'ébranlement par rapport à (4.6).

Nous distinguons maintenant deux cas:

1er cas. La dérivée $\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \rho$ est identiquement nulle sur $\overline{W}$. Alors, compte tenu de $\tau = \xi(\pi(\tau, \rho), \rho)$, ce qui donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \pi}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = 0,$$

la dérivée $\partial \xi(t, \rho)/\partial \rho$ est aussi identiquement nulle. En d'autres termes $\xi(t, \rho)$ ne dépend pas de ρ, de sorte que $\xi(t, \rho) = \xi(t, \sigma(t)) = t$ pour tout $\rho \geq \sigma(t)$. En conséquence l'ébranlement émis à l'instant t se propage suivant la loi $\tau = t$, c'est-à-dire qu'il se propage comme la lumière par rapport à (4.5), donc aussi par rapport à toute transformée admissible de (4.5).

2ème cas. $\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \rho$ ne s'annule pas identiquement. Alors la fonction de propagation $\pi(\tau, \rho)$ de l'ébranlement est distincte de celle de la lumière par rapport à la métrique canonique (4.5), donc aussi par rapport à la métrique transformée (4.6). Or celle-ci étant admissible, d'après nos hypothèses, on a $|\hat{h}(\tau, \rho)| \leq \hat{l}(\tau, \rho)$, de sorte que la fonction de propagation de la lumière s'obtient en intégrant l'équation différentielle

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-\hat{h}(\tau, \rho) + \hat{l}(\tau, \rho)}{\hat{f}(\tau, \rho)} = -\frac{\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \rho}{\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \tau}$$

ce qui donne $\big(\partial\pi(\tau,\rho)/\partial\tau\big)d\tau + \big(\partial\pi(\tau,\rho)/\partial\rho\big)d\rho = 0$, d'où $\pi(\tau,\rho) = Cte$. Par conséquent $\pi(\tau,\rho)$ est aussi la fonction de propagation de la lumière par rapport à (4.6). Cette contradiction montre que la dérivée

$$\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}$$

doit être identiquement nulle, ce qui entraîne, d'après le 1er cas, l'identité des deux fonctions de propagation.

La proposition 4.5 est d'une importance capitale, car elle nous autorise à utiliser directement (4.5) pour l'étude du champ gravitationnel à l'extérieur de la matière.

5. Intégration des équations d'Einstein relatives à la métrique canonique

a) Equations d'Einstein associées à la métrique générale (2.6)

Afin de réduire au minimum les calculs, nous introduisons les coordonnées sphériques ρ, ϕ, θ (considérées sur leur domaine de validité), ce qui est légitime, car les tenseurs se déterminent en général par des opérations locales. D'autre part nous tenons compte des deux propositions suivantes.

Proposition 5.1. *(a) Le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire relatifs à la métrique générale* $\Theta(4)$ *-invariante* (2.6) *sont aussi* $\Theta(4)$ *-invariants. (b) Si un tenseur d'impulsion-énergie vérifie les équations d'Einstein associées à la métrique* $\Theta(4)$ *-invariante* (2.6), *il est aussi* $\Theta(4)$ *-invariant.*

Nous acceptons cette proposition sans démonstration.

Proposition 5.2. *Soit* $\hat{V}_{\alpha\beta}(x_0, x), (x = (x_1, x_2, x_3); \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, *un champ de tenseurs* $\Theta(4)$ *-invariant covariant symétrique de degré 2 sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, *et notons* $V_{\alpha\beta}$ *ses composantes par rapport aux coordonnées* τ, ρ, ϕ, θ. *Alors les composantes* $V_{00}, V_{01}, V_{11}, V_{33}$ *dépendent uniquement de* (τ, ρ), *et en outre*

$$V_{22} = V_{33} \sin^2\theta \quad , \quad V_{02} = V_{03} = V_{12} = V_{23} = V_{31} = 0.$$

En effet, mis à part les questions de signature, les composantes $\hat{V}_{\alpha\beta}(x_0, x)$ sont données par des expressions analogues à celles explicitées dans le théorème 2.1, de sorte que, en transformant en coordonnées sphériques la forme quadratique $\sum \hat{V}_{\alpha\beta}(x_0, x) dx_\alpha \, dx_\beta$, on s'assure aussitôt de la validité de l'énoncé.

Cela dit, soient maintenant $\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\beta\alpha}$ les composantes du tenseur métrique qui définit (2.6), $\hat{R}_{\alpha\beta} = \hat{R}_{\beta\alpha}$ les composantes du tenseur de Ricci correspondant, et posons

$$\hat{E}_{\alpha\beta} = \hat{R}_{\alpha\beta} - \left(\frac{\hat{R}}{2} + 3\lambda\right) \hat{g}_{\alpha\beta} + \frac{8\pi k}{c^4} \hat{T}_{\alpha\beta} = \hat{E}_{\beta\alpha}$$

où $\hat{R}$ est la courbure scalaire et $\hat{T}_{\alpha\beta} = \hat{T}_{\beta\alpha}$ sont les composantes du tenseur d'impulsion-énergie. Alors les équations d'Einstein par rapport à (2.6) s'écrivent:

$$\hat{E}_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

D'après la proposition 5.1, $\hat{E}_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant covariant symétrique de degré 2 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Par conséquent, si $E_{\alpha\beta}$ sont les composantes de ce champ par rapport aux coordonnées τ, ρ, ϕ, θ, alors, d'après la proposition 5.2, $E_{00}, E_{01}, E_{11}, E_{33}$ dépendent uniquement de (τ, ρ), et en outre

$$E_{22} = E_{33}\, sin^2\theta \quad , \quad E_{02} = E_{03} = E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0.$$

Ainsi les équations d'Einstein se réduisent à un système de quatre équations, à savoir

$$E_{00} = 0 \quad , \quad E_{01} = 0 \quad , \quad E_{11} = 0 \quad , \quad E_{33} = 0,$$

par rapport à la métrique

$$ds^2 = f^2\, d\tau^2 + 2fh d\tau\, d\rho + (h^2 - l^2) d\rho^2 - g^2\, sin^2\theta\, d\phi^2 - g^2\, d\theta^2, \tag{5.1}$$

transformée de (2.6) dans les coordonnées τ, ρ, ϕ, θ. D'autre part le tenseur de Ricci (resp. le tenseur d'impulsion-énergie) étant $\Theta(4)$ -invariant, ses composantes $R_{\alpha\beta}$ (resp. $T_{\alpha\beta}$) par rapport à (5.1) sont telles que

$$R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{23} = R_{31} = 0 \quad , \quad R_{22} = R_{33} \sin^2\theta,$$

$$(\text{resp. } T_{02} = T_{03} = T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0 \quad , \quad T_{22} = T_{33} \sin^2\theta),$$

et que $R_{00}, R_{01}, R_{11}, R_{33}$ (resp. $T_{00}, T_{01}, T_{11}, T_{33}$) dépendent uniquement de (τ, ρ). Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Le système des équations d'Einstein par rapport à* (2.6) *se transforme, par passage aux coordonnées τ, ρ, ϕ, θ , en un système de quatre équations, à savoir*

$$R_{00} - \left(\frac{R}{2} + 3\lambda\right) f^2 + \frac{8\pi k}{c^4} T_{00} = 0,$$

$$R_{01} - \left(\frac{R}{2} + 3\lambda\right) fh + \frac{8\pi k}{c^4} T_{01} = 0,$$

$$R_{11} - \left(\frac{R}{2} + 3\lambda\right) (h^2 - l^2) + \frac{8\pi k}{c^4} T_{11} = 0,$$

$$R_{33} + \left(\frac{R}{2} + 3\lambda\right) g^2 + \frac{8\pi k}{c^4} T_{33} = 0,$$

dans lequel ne figurent pas les coordonnées géographiques ϕ, θ.

En définitive, pour établir les équations d'Einstein, nous n'avons qu'à calculer les composantes $R_{00}, R_{01}, R_{11}, R_{33}$ du tenseur de Ricci et les composantes $T_{00}, T_{01}, T_{11}, T_{33}$ du tenseur d'impulsion-énergie par rapport à la métrique (5.1).

b) Equations d'Einstein associées à la métrique canonique (4.5)

Pour $h = l$, l'utilisation des coordonnées t, ρ, ϕ, θ conduit à la métrique transformée

$$ds^2 = f^2\, dt^2 + 2fl\, dt\, d\rho - g^2\, sin^2\theta\, d\phi^2 - g^2\, d\theta^2, \tag{5.2}$$

par rapport à laquelle le tenseur métrique possède uniquement quatre composantes covariantes non nulles,

$$a_{00} = f^2, a_{01} = fl, a_{22} = -g^2\, sin^2\theta, a_{33} = -g^2$$

$$a_{02} = a_{03} = a_{11} = a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0,$$

et aussi uniquement quatre composantes contravariantes non nulles

$$a^{01} = \frac{1}{fl}, a^{11} = -\frac{1}{l^2}, a^{22} = -\frac{1}{g^2\, sin^2\theta}, a^{33} = -\frac{1}{g^2},$$

$$a^{00} = a^{02} = a^{03} = a^{12} = a^{23} = a^{31} = 0.$$

Cela permet d'obtenir les symboles de Christoffel sous une forme particulièrement simple, et ensuite un calcul facile donne les quatre composantes utiles du tenseur de Ricci par rapport à (5.2):

$$\begin{aligned} R_{00} =& \frac{1}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \rho} + \frac{f}{l^2}\frac{\partial^2 l}{\partial t \partial \rho} - \frac{f}{l^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{f}{l^3}\frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial l}{\partial \rho} \\ &+ \frac{f}{l^3}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial l}{\partial \rho} - \frac{1}{fl}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{2}{lg}\frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{2}{fg}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} \\ &+ \frac{2}{lg}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{2f}{l^2 g}\frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{2f}{l^2 g}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial g}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

$$R_{01} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{fl}\,\frac{\partial (fl)}{\partial \rho}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{l}\,\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{2}{g}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \rho} - \frac{2}{lg}\,\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\frac{\partial g}{\partial \rho},$$

$$R_{11} = 2\left(\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial \rho}\,\frac{1}{fl}\,\frac{\partial (fl)}{\partial \rho}\right),$$

$$R_{33} = -\frac{2g}{fl}\,\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \rho} + \frac{g}{fl^2}\,\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{g}{l^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \frac{g}{l^3}\,\frac{\partial l}{\partial \rho}\,\frac{\partial g}{\partial \rho} - 1$$
$$+ \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)^2 - \frac{2}{fl}\,\frac{\partial g}{\partial t}\,\frac{\partial g}{\partial \rho}.$$

Pour ce qui concerne le tenseur d'impulsion-énergie à l'extérieur de la matière, il sera le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique. En général les composantes mixtes de ce dernier tenseur vérifient la condition

$$\sum_{0}^{3} T_\alpha^\alpha = 0,$$

de sorte qu'en utilisant les équations d'Einstein et en contractant on trouve la relation

$$R = -12\lambda$$

qui facilite beaucoup les calculs.

Dans notre cas particulier, en vertu de la $\Theta(4)$ -invariance, "le champ magnétique" est nul, et il ne reste en conséquence que le tenseur antisymétrique du "champ électrique" dont les composantes par rapport à (5.2) seront notées $P_{\alpha\beta}$. Or, à l'exception de P_{01} et $P_{10} = -P_{01}$, qui dépendent d'ailleurs uniquement de (t, ρ), toutes les autres composantes $P_{\alpha\beta}$ sont nulles, et la formule bien connue nous donne, par un calcul facile, les composantes utiles du tenseur d'impulsion-énergie correspondant par rapport à (5.2):

$$T_{00} = \frac{P_{01}^2}{8\pi l^2} \quad , \quad T_{01} = \frac{P_{01}^2}{8\pi fl} \quad , \quad T_{11} = 0 \quad , \quad T_{33} = \frac{g^2 P_{01}^2}{8\pi f^2 l^2}.$$

Tenant compte de $R = -12\lambda$ et $h = l$, ainsi que de la proposition 5.3, on voit alors que le système des équations d'Einstein se réduit au système suivant:

$$R_{00} = -3\lambda f^2 - \frac{k}{c^4}\,\frac{P_{01}^2}{l^2},$$

$$R_{01} = -3\lambda fl - \frac{k}{c^4}\,\frac{P_{01}^2}{fl},$$

$$R_{11} = 0,$$

$$R_{33} = 3\lambda g^2 - \frac{k}{c^4}\,\frac{g^2 P_{01}^2}{f^2 l^2},$$

qui se simplifie considérablement si l'on élimine P_{01} d'abord entre les deux premières équations, et ensuite entre la deuxième et la quatrième, ce qui donne respectivement

$$lR_{00} - fR_{01} = 0 \quad \text{et} \quad g^2 R_{01} - flR_{33} + 6\lambda flg^2 = 0.$$

D'autre part l'équation $R_{11} = 0$ s'intègre manifestement sous la forme

$$fl = \alpha\,\frac{\partial g}{\partial \rho},$$

α étant une fonction strictement positive de t. Or on peut introduire la nouvelle coordonnée temporelle

$$u = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} \alpha(v)dv$$

et écrivant ensuite de nouveau t au lieu de u, on fait en sorte que α soit remplacé par c dans l'équation précédente. Ce changement, d'ailleurs tout à fait anodin, n'est pas motivé par la simplification qui en résulte. Il est indispensable pour assurer le lien entre les états non stationnaires et les états stationnaires. En effet, lorsque le champ passe dans un état stationnaire, les fonctions f, l, g dépendent uniquement de ρ, de sorte que α doit être égale à la vitesse c de la lumière. En définitive nous sommes conduits au système ci-après

$$fl = c\,\frac{\partial g}{\partial \rho}, \tag{5.3}$$

$$g^2 R_{01} - flR_{33} + 6\lambda flg^2 = 0, \tag{5.4}$$

$$lR_{00} - fR_{01} = 0, \tag{5.5}$$

$$R_{33} = 3\lambda g^2 - \frac{k}{c^4}\,\frac{g^2 P_{01}^2}{f^2 l^2}, \tag{5.6}$$

dont l'intégration nécessite la prise en considération de la fonction

$$F = -g^2 + \frac{g^2}{l^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)^2 - \frac{2g^2}{c}\,\frac{\partial g}{\partial t} - \lambda g^4.$$

Alors, compte tenu de (5.3) et des expressions de R_{01} et R_{33}, (5.4) donne, après un calcul plus ou moins long,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -2\gamma_1 \frac{\partial g}{\partial \rho},$$

γ_1 étant une fonction de la seule variable t, de sorte que

$$F = -2\gamma_1 g + \gamma_2,$$

γ_2 étant aussi une fonction de la seule variable t. Il en résulte

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(-1 + \frac{2\gamma_1}{g} - \frac{\gamma_2}{g^2} - \lambda g^2 + \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)^2\right).$$

En utilisant cette expression de $\partial g/\partial t$, ainsi que l'expression de f donnée par (5.3), on arrive à une simplification considérable de (5.5), à savoir

$$2g{\gamma'}_1 - {\gamma'}_2 = 0,$$

et puisque g dépend non seulement de t mais aussi de ρ, on en déduit que ${\gamma'}_1 = {\gamma'}_2 = 0$, c'est-à-dire que γ_1 et γ_2 sont des constantes. Ensuite l'expression de R_{33} donne

$$R_{33} = -\frac{\gamma_2}{g^2} + 3\lambda g^2$$

et comparant à (5.6) on obtient

$$P_{01}^2 = \frac{c^4\gamma_2}{k}\,\frac{f^2 l^2}{g^4}.$$

La constante γ_2 est donc positive et en posant $\gamma_2 = \nu^2$, on trouve

$$P_{01} = \frac{c^2\nu}{\sqrt{k}}\,\frac{fl}{g^2} = \frac{c^3\nu}{\sqrt{k}}\,\frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial \rho}.$$

Notons que le tenseur du champ électromagnétique doit vérifier les équations relativistes du champ électromagnétique. Or seules les composantes P_{01} et $P_{10} = -P_{01}$ de ce tenseur sont nulles. En outre P_{01} dépend uniquement de (t, ρ). Par conséquent les équations du premier groupe

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial u^s} + \frac{\partial P_{js}}{\partial u^i} + \frac{\partial P_{si}}{\partial u^j} = 0$$

sont identiquement vérifiées. En ce qui concerne les équations du deuxième groupe, leurs deuxièmes membres s'annulent, puisque les densités de charge et de courant sont nulles à l'extérieur de la matière, de sorte que nous avons

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}(\sqrt{-G}\, P^{ij}) = 0 \quad \text{avec} \quad G = -f^2\, l^2\, g^4\, sin^2\theta.$$

Or seules les composantes contravariantes

$$P^{01} = -\frac{P_{01}}{f^2 l^2} \quad , \quad P^{10} = -P^{01}$$

sont non nulles. Nous n'avons donc qu'à considérer les équations

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(g^2 \sin\theta\, \frac{P_{01}}{fl}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(g^2 \sin\theta\, \frac{P_{01}}{fl}\right) = 0,$$

qui se réduisent aussi à des identités en vertu de l'expression obtenue de P_{01}.

Cela dit, soient P_0, P_1, P_2, P_3 les composantes du potentiel électromagnétique. Alors

$$P_{01} = -c\, \frac{\partial P_0}{\partial \rho} \quad , \quad P_1 = P_2 = P_3 = 0,$$

et puisque

$$P_{01} = -\frac{c^3 \nu}{\sqrt{k}}\, \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{g}\right),$$

en introduisant la constante $e = c^2\nu/\sqrt{k}$, on trouve

$$P_0 = \frac{e}{g} = \frac{e}{g(t,\rho)}. \tag{5.7}$$

Posons $\gamma_1 = \mu$. Alors on constate en définitive que les équations d'Einstein se ramènent à un système de deux équations, à savoir

$$fl = c\, \frac{\partial g}{\partial \rho}, \tag{5.8}$$

$$\frac{2}{c}\, \frac{\partial g}{\partial t} + Q(g) = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)^2, \tag{5.9}$$

avec

$$Q(g) = 1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2.$$

En outre elles déterminent le potentiel électrique par la formule (5.7). Les constantes μ et ν étant indépendantes de l'état du champ, elles ont les valeurs associées aux états stationnaires. En fait e est la charge de la source et en outre $\mu = km/c^2$, m étant la masse totale.

6. Solutions stationnaires et solutions statiques

Supposons $\partial g/\partial t = 0$, en d'autres termes supposons que g dépende uniquement de ρ lorsque t parcourt un intervalle compact $I = [t_1, t_2]$ ou éventuellement une demi-droite $I = [t_1, +\infty[$. Alors, d'après (5.9), on a

$$\frac{1}{l^2}\left(\frac{dg}{d\rho}\right)^2 = Q(g), \tag{6.1}$$

de sorte que l dépend aussi uniquement de ρ lorsque t parcourt I, et il en est de même de f en raison de l'équation (5.8). Ainsi l'annulation de la dérivée $\partial g/\partial t$ sur I entraîne l'établissement d'un état stationnaire. D'après (6.1), on a $Q(g) \geq 0$, et puisque l'annulation de $\partial g/\partial \rho$ est exclue en raison de (5.8), les valeurs admissibles de g sont telles que $Q(g) > 0$, et alors

$$\frac{dg}{d\rho} = l\sqrt{Q(g)} \tag{6.2}$$

et aussi, compte tenu de (5.8),

$$f = c\sqrt{Q(g)} \quad , \quad (f = f(\rho), g = g(\rho)). \tag{6.3}$$

Comme nous l'avons constaté lors de l'étude des états statiques [26], la valeur de λ doit être non négative. En effet, si $\lambda < 0$, $Q(g)$ est strictement négative sur une demi-droite $]\beta, +\infty[$ avec $\beta > 0$ et $Q(\beta) = 0$, ce qui donne des métriques dégénérant pour $g = \beta$, donc des métriques auxquelles il est impossible d'attribuer une signification physique. Aussi allons-nous supposer $\lambda \geq 0$ constamment dans la suite.

Cela dit, durant l'intervalle de temps I, le bord sphérique de la matière se trouve en équilibre, son rayon et son rayon de courbure gardent des valeurs constantes, notées respectivement σ_0 et ζ_0, de sorte que les fonctions $f(\rho), l(\rho), g(\rho)$ sont définies pour tout $\rho \geq \sigma_0$ et qu'il existe une constante strictement positive α telle que $Q(g) \geq \alpha$ pour tout $g \geq \zeta_0$. L'équation (6.2) donne alors

$$\int_{\zeta_0}^{g(\rho)} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \int_{\sigma_0}^{\rho} l(u)du.$$

Or la fonction $l(\rho)$ possède une borne inférieure strictement positive, donc l'intégrale

$$\int_{\sigma_0}^{\rho} l(u)du$$

est une fonction strictement croissante de ρ tendant vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$. L'intégrale

$$\int_{\zeta_0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}}$$

est aussi une fonction strictement croissante de g tendant vers $+\infty$ lorsque $g \to +\infty$. Par conséquent $g(\rho)$ est une fonction strictement croissante de ρ tendant vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$.

Proposition 6.1. *Si $\partial g(t,\rho)/\partial t = 0$ pour tout $t \in I$, avec $I = [t_1, t_2]$ ou $I = [t_1, +\infty[$ alors la métrique canonique* (4.5) *est stationnaire durant l'intervalle de temps I. En outre elle se transforme en métrique statique moyennant une fonction de propagation de la forme $\tau - \psi(\rho)$ avec $\rho \geq \sigma_0$ et $\tau - \psi(\rho) \in I$. La fonction $\psi(\rho)$ qui y figure est positive et strictement croissante, et l'on a*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \psi(\rho) = +\infty \text{ ou } \lim_{\rho\to+\infty} \psi(\rho) < +\infty$$

suivant que $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. (En fait, si $\lambda > 0$, l'ordre de grandeur de la valeur finie $\lim_{\rho\to+\infty} \psi(\rho)$ est tellement élevé qu'il s'agit là encore pratiquement d'une valeur infinie).

Démonstration. Si $\partial g(t,\rho)/\partial t = 0$ pour tout $t \in I$, les fonctions f, l, g dépendent uniquement de ρ durant l'intervalle de temps I, et, compte tenu de (6.3), la métrique canonique (4.5) se réduit à la métrique stationnaire

$$\text{(6.4)} \qquad ds^2 = \left(c\sqrt{Q(g(\rho))}dt + l(\rho)\frac{xdx}{\rho}\right)^2 - \left[\left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left((l(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right].$$

En introduisant maintenant la nouvelle coordonnée temporelle $\tau = t + \psi(\rho)$, c'est-à-dire en remplaçant t par la fonction de propagation $\tau - \psi(\rho)$ avec

$$\tau - \psi(\rho) \in I \quad \text{et} \quad \psi(\rho) = \frac{1}{c}\int_{\sigma_0}^{\rho} \frac{l(u)du}{\sqrt{Q(g(u))}},$$

nous avons

$$c\sqrt{Q(g(\rho))}\,dt + l(\rho)\,\frac{xdx}{\rho} = c\sqrt{Q(g(\rho))}dt + l(\rho)d\rho = c\sqrt{Q(g(\rho))}d\tau,$$

ce qui donne la métrique statique

$$ds^2 = c^2Q(g(\rho))d\tau^2 - \left[\left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left((l(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right].$$

La fonction $\psi(\rho)$ est manifestement positive et strictement croissante sur la demi-droite $[\sigma_0, +\infty[$. D'autre part, compte tenu de (6.2), nous avons

$$\frac{l(\rho)}{\sqrt{Q(g(\rho))}} = \frac{g'(\rho)}{Q(g(\rho))},$$

ce qui permet d'écrire

$$\psi(\rho) = \frac{1}{c}\int_{\zeta_0}^{g(\rho)} \frac{du}{Q(u)}$$

avec $Q(u) = 1 - 2\mu/u + \nu^2/u^2 + \lambda u^2 \geq \alpha$ pour tout $u \geq \zeta_0$ et $1 + \lambda u^2 \geq Q(u)$ pour tout $u \geq \nu^2/2\mu$ (On sait déjà et l'on vérifiera à nouveau que $\mu > 0$).

En premier lieu supposons $\lambda = 0$. Alors $1/Q(u)$ est minorée par 1 sur la demi-droite $[\nu^2/2\mu, +\infty[$, et par conséquent $\lim \psi(\rho) = +\infty$ lorsque $g(\rho) \to +\infty$ donc aussi lorsque $\rho \to +\infty$.

En deuxième lieu supposons $\lambda > 0$. Soient ζ_1 la borne inférieure des valeurs u pour lesquelles

$$1 + \lambda u^2 \geq Q(u) \geq \frac{1}{2} + \lambda u^2 \quad \text{et} \quad \zeta_2 = \sup(\zeta_0, \zeta_1).$$

Alors en posant

$$\alpha_1 = \frac{1}{c}\int_{\zeta_0}^{\zeta_2} \frac{du}{Q(u)},$$

on obtient

$$\alpha_1 + \frac{1}{c}\int_{\zeta_2}^{g(\rho)} \frac{du}{1 + \lambda u^2} < \psi(\rho) < \alpha_1 + \frac{1}{c}\int_{\zeta_2}^{g(\rho)} \frac{du}{\frac{1}{2} + \lambda u^2}$$

ou encore

$$\alpha_1 + \frac{1}{c\sqrt{\lambda}}(\operatorname{arctg}(g(\rho)\sqrt{\lambda}) - \operatorname{arctg}(\zeta_2\sqrt{\lambda})) < \psi(\rho)$$
$$< \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\lambda}}(\operatorname{arctg}(g(\rho)\sqrt{2\lambda}) - \operatorname{arctg}(\zeta_2\sqrt{2\lambda}))$$

d'où, en faisant tendre ρ vers $+\infty$,

$$\alpha_1 + \frac{1}{c\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\zeta_2\sqrt{\lambda})\right) < \lim_{\rho\to+\infty} \psi(\rho) < \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\zeta_2\sqrt{2\lambda})\right)$$

Si l'on prend pour λ la valeur estimée dans [26], à savoir $10^{-54}cm^{-2}$, on voit que $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \psi(\rho)$ est de l'ordre de

$$\frac{3}{c\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{3\times 10^{10} \times 10^{-27}} = 10^{17}\text{sec.}$$

Corollaire 6.1. *Si le champ se trouve dans un état stationnaire durant l'intervalle de temps $I = [t_1, t_2]$ (resp. $I = [t_1, +\infty[$), alors la métrique statique correspondante se réalise de proche en proche autour du bord en équilibre. De façon plus précise, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ tel que $\| x \| = \rho > \sigma_0$, l'état statique s'établit en x lorsque le temps local τ parcourt l'intervalle*

$$[t_1 + \psi(\rho), t_2 + \psi(\rho)] \quad (\textit{resp.} \quad [t_1 + \psi(\rho), +\infty[).$$

D'habitude quand on utilise une métrique statique, on la considère implicitement comme *universellement statique*, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il existe un intervalle de temps $J = [\tau_1, \tau_2]$ (resp. $J = [\tau_1, +\infty[$) tel que la métrique soit valable pour tout $(\tau, x) \in J \times \mathbf{R}^3$. Le corollaire 6.1 montre que de telles métriques sont inconcevables même dans le cas, manifestement irréalisable physiquement, où I est une demi-droite $[t_1, +\infty[$, étant entendu qu'il existe $t'_1 < t_1$ tel que le champ soit non stationnaire durant l'intervalle $]t'_1, t_1[$. En effet, si l'on suppose $\lambda = 0$, alors, étant donné que $\psi(\rho)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$, quel que soit $\tau_1 > t_1$, il existe $\rho_1 > \sigma_0$ tel que $t_1 + \psi(\rho_1) > \tau_1$. Cela est encore valable pour les valeurs τ_1 accessibles physiquement lorsque $\lambda > 0$, car la valeur $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \psi(\rho)$ est alors pratiquement infinie. Pour ce qui concerne le cas réaliste où I est un intervalle compact $[t_1, t_2]$, le même raisonnement est valable, mais il y a plus:

Si l'on choisit $\rho_1 > \sigma_0$ tel que $t_1 + \psi(\rho_1) > t_2$, alors l'état stationnaire (dont le temps est le même que celui de l'état statique sur le bord de la matière) ne subsiste plus durant l'intervalle de temps $[t_1 + \psi(\rho_1), t_2 + \psi(\rho_1)]$.

En définitive les états universellement statiques sont des états abstraits qui ne peuvent pas s'insérer dans le devenir du champ gravitationnel. Celui-ci est défini de façon adéquate uniquement par la métrique canonique (4.5) qui assure le passage d'un état non stationnaire à un état universellement stationnaire et vice-versa. Cependant les métriques statiques présentent parfois des avantages, surtout lorsqu'il s'agit de comparer les solutions des équations d'Einstein avec les potentiels classiques. Dans de telles situations il est indispensable de préciser bien les conditions de leur utilisation. Nous allons voir comment on peut s'en servir pour déterminer les constantes μ et ν.

Remarques sur la détermination des constantes μ et ν

Les valeurs $\mu = km/c^2$ et $\nu = e\sqrt{k}/c^2$ nous sont déjà connues [26] et leur détermination repose sur la comparaison de la solution des équations d'Einstein avec le potentiel de Newton et le potentiel de Coulomb. Une telle comparaison présuppose $\lambda = 0$ et n'est possible que si l'on prend pour coordonnée radiale la distance géodésique de $O \in \mathbf{R}^3$ à $x \in \mathbf{R}^3$. Or l'introduction de cette distance géodésique est inconcevable durant les états non stationnaires du champ, car la fonction l dépend alors non seulement de ρ mais aussi du temps. C'est pourquoi on est obligé de fonder ses calculs sur la prise en considération des états stationnaires. En fait un tel état est défini par la métrique (6.4) qui n'est pas valable à l'intérieur de la source (ne serait-ce que parce que l'égalité $h = l$ est impossible sur un voisinage du centre), de sorte que l'on est amené à baser la détermination des constantes μ et ν sur les métriques statiques en supposant $\lambda = 0$. Cependant, d'après le corollaire 6.1, une métrique universellement statique est inconcevable dans le devenir du champ gravitationnel, et c'est pourquoi un raisonnement rigoureux doit prendre en considération une région bornée, mais suffisamment grande, de l'espace autour de la source.

De façon précise, supposons que la métrique stationnaire (6.4) soit réalisée durant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ pour lequel $t_2 - t_1 > \psi(\rho_1)$ où $\rho_1 > \sigma_0$ est une valeur telle que (6.4) soit susceptible d'approximation par une métrique pseudo-euclidienne déjà pour des valeurs de ρ inférieures à ρ_1. Soient

$$B_0 = \{x \in \mathbf{R}^3 | \parallel x \parallel < \sigma_0\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbf{R}^3 | \parallel x \parallel < \rho_1\}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ pour lequel $\sigma_0 < \rho = \| x \| < \rho_1$, la métrique statique est réalisable en x durant l'intervalle de temps $[t_1 + \psi(\rho), t_2 + \psi(\rho)]$, de sorte que, en vertu de la condition $t_2 - t_1 > \psi(\rho_1)$, l'état statique peut être conçu globalement sur $B - B_0$ durant l'intervalle de temps $[t_1 + \psi(\rho_1), t_2]$. (Bien entendu, pour $t > t_2$, la métrique statique n'a aucun sens, car l'ébranlement gravitationnel reprend et la métrique stationnaire (6.4) cesse d'être valable). D'autre part le bord de la source étant en équilibre entre les instants t_1 et t_2 on admet que toute la matière passe dans un état d'équilibre durant un intervalle de temps $[t'_1, t'_2]$ tel que

$$t_1 < t'_1 < t'_2 < t_2 \quad \text{et} \quad]t'_1, t'_2[\cap]t_1 + \psi(\rho_1), t_2[= \hat{I} \neq \emptyset.$$

On admet en outre que le champ stationnaire sur B_0, entre les instants t'_1 et t'_2, est définissable par une métrique statique. La détermination de celle-ci nous est inconnue, mais quoi qu'il en soit, on peut concevoir de cette façon une métrique statique sur B durant l'intervalle de temps $\hat{I}$, et cela permet d'introduire la distance géodésique

$$\delta = \int_0^\rho l(u)du$$

comme coordonnée radiale et, en prenant $\lambda = 0$ (ou en supposant que l'influence de λ soit négligeable par rapport à l'ordre de grandeur des valeurs de δ prises en considération), d'établir ensuite de la façon connue [26] l'approximation

$$f^2 \simeq c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{\delta} + \frac{\nu^2}{\delta^2}\right)$$

à l'extérieur de la matière pour les grandes valeurs de ρ, ce qui donne

$$\mu = \frac{km}{c^2}, \quad \nu = \frac{e\sqrt{k}}{c^2},$$

m et e étant respectivement la masse et la charge de la source.

7. Solutions non stationnaires - Solitons de Huyghens

a) Solution générale

Le problème que l'on s'est posé est de déterminer la métrique canonique (4.5) à l'extérieur de la matière, ou, en d'autres termes, de déterminer sur le fermé

$$\overline{W} = \{(t, \rho) \in \mathbf{R}^2 | \rho \geq \sigma(t)\}$$

les fonctions inconnues $f(t,\rho), l(t,\rho), g(t,\rho)$ moyennant les équations d'Einstein et les équations relativistes du champ électromagnétique, ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites. Pour ce qui concerne les conditions initiales, on les a déjà définies. Ce sont le rayon $\sigma(t)$ et le rayon de courbure $\zeta(t)$ du bord sphérique de la matière. D'autre part par le terme *conditions aux limites* nous entendons les conditions suivantes:

En premier lieu les ondes gravitationnelles engendrées par la propagation des ébranlements gravitationnels disparaissent à l'infini. De façon plus précise, toutes les dérivées partielles de f, l, g dans lesquelles figurent des dérivations par rapport à t tendent uniformément vers zéro sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$. Ainsi, pour des valeurs de ρ d'ordre de grandeur suffisamment élevé, la métrique se comporte pratiquement comme une métrique stationnaire.

En deuxième lieu ce comportement à l'infini présente des caractéristiques différentes suivant que $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, les fonctions

$$\frac{f(t,\rho)}{c}, \quad l(t,\rho), \quad \frac{g(t,\rho)}{\rho}$$

tendent toutes les trois uniformément vers 1 sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$, ce qui entraîne que la métrique tend vers la métrique pseudo-euclidienne (mais non minkowskienne)

$$ds^2 = \left(cdt + \frac{xdx}{\rho}\right)^2 - dx^2$$

dans les mêmes conditions. Si $\lambda > 0$, les fonctions

$$g(t,\rho) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{g(t,\rho)}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho}$$

tendent uniformément vers $+\infty$ et 1 respectivement sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$, ce qui entraîne en particulier que $l(t,\rho)$ tend vers 1 dans les mêmes conditions, en conformité avec l'étude déjà faite des états statiques [26].

En troisième lieu, si, durant un certain intervalle de temps, le champ passe dans un état stationnaire, et si l'on associe à celui-ci l'état statique correspondant sur une région d'espace autour de la source, comme il a été expliqué plus haut, alors en posant $\lambda = 0$ et en prenant la distance au centre pour coordonnée radiale ρ, on obtient, pour les grandes valeurs de ρ, l'approximation

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2km}{c^2\rho} + \frac{ke^2}{c^4\rho^2}\right) d\tau^2 - dx^2.$$

(Cette approximation a été déjà utilisée pour la détermination des constantes μ et ν).

Les constantes μ et ν étant connues, la solution sera donnée par les deux équations (5.8) et (5.9) qui contiennent les trois fonctions inconnues f, l, g. Celles-ci ne pourront donc pas être complètement déterminées, mais une telle situation est plutôt avantageuse, car la richesse de la solution permet d'aborder une grande diversité de problèmes éventuels. Dans le cas des champs statiques, l'annulation de la dérivée $\partial l(t,\rho)/\partial t$ nous a permis d'introduire comme coordonnée radiale la distance de $O \in \mathbf{R}^3$ à $x \in \mathbf{R}^3$, et de déterminer ensuite f et g en tant que fonctions de cette distance. Cela n'est plus possible lorsque le champ se trouve dans un état non stationnaire. Il n'est pas non plus possible d'obtenir g en intégrant l'équation aux dérivées partielles (5.9) car la fonction l qui y figure est inconnue. Plutôt que de nous livrer à des calculs fastidieux et inutiles, nous allons faire dépendre f et l de g. En effet, (5.8) et (5.9) entraînent respectivement

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g) > 0,$$

de sorte que, si la fonction $g = g(t,\rho)$ est donnée, alors $l = l(t,\rho)$ s'obtient par (5.9) et ensuite $f = f(t,\rho)$ par (5.8),

$$f = c\sqrt{\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)} \quad , \quad l = \frac{\partial g/\partial \rho}{\sqrt{\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)}}. \tag{7.1}$$

Les conditions générales auxquelles doit satisfaire le choix de g sont les suivantes:

(7.2) Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $g(t,\sigma(t)) = \zeta(t)$, et pour tout

$$(t,\rho) \in \overline{W} = \{(t,\rho) \in \mathbf{R}^2 | \rho \geq \sigma(t)\} \quad \text{on a}$$

$$g(t,\rho) > 0 \quad , \quad \frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho} > 0 \quad , \quad \frac{2}{c}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} + Q(g(t,\rho)) > 0.$$

(7.3) Si $\lambda = 0$ (resp. si $\lambda > 0$), alors les fonctions

$$\frac{g(t,\rho)}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho} \quad (\text{resp.} \quad g(t,\rho) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{g(t,\rho)}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho})$$

tendent toutes les deux uniformément vers 1 (resp. tendent uniformément vers $+\infty$ et 1 respectivement) sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$.

(7.4) Toute dérivée partielle de $g(t, \rho)$ comportant des dérivations par rapport à t tend uniformément vers zéro sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$.

Alors les conditions initiales et les conditions aux limites du problème sont satisfaites. En particulier, compte tenu de (7.3) et (7.4), (7.1) entraîne que, pour $\lambda = 0$, $f(t, \rho)/c$ et $l(t, \rho)$ tendent uniformément vers 1 sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$. En outre la prise en considération de (7.4) montre que toute dérivée partielle de f ou g comportant des dérivations par rapport à t tend uniformément vers zéro sur tout intervalle compact de valeurs de t lorsque $\rho \to +\infty$.

D'habitude, en se basant sur le caractère tensoriel des équations d'Einstein, c'est-à-dire sur une propriété locale purement algébrique, on se croit en droit de transformer leurs solutions moyennant n'importe quel changement local de coordonnées, ce qui conduit à d'énormes confusions rendant impossibles les interprétations physiques. Cela ne pourrait jamais se produire si l'on formulait chaque fois correctement le problème avant d'établir les équations d'Einstein, en précisant la variété qui y intervient ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites. Regardons de plus près la situation relative à notre solution (7.1). Compte tenu de la forme canonique de la métrique et des conditions aux limites, nous constatons tout d'abord qu'aucun changement de coordonnée temporelle

$$t = \xi(\tau, \| x \|)$$

n'est autorisé. D'autre part il est hors de question d'envisager un difféomorphisme induisant un changement de coordonnée radiale (cf. (2.8)),

$$t = \tau, \quad x_i = \frac{\gamma(\tau, \| y \|)}{\| y \|} y_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

car nous sommes partis de la forme générale de la métrique canonique, de sorte que toutes les déterminations admissibles relatives aux coordonnées spatiales sont déjà contenues dans l'ensemble des divers choix possibles de $g(t, \rho)$ conformément aux conditions du problème. C'est uniquement dans le cas d'un état stationnaire que l'on peut définir $g(\rho)$ par rapport à une coordonnée radiale spécifique, à savoir par rapport à la distance géodésique

$$\delta(\rho) = \int_0^\rho l(u)\,du,$$

mais, même dans ce cas particulier, cette détermination de $g(\rho)$ n'est certainement pas la meilleure (cf. [26], p. 321).

Les formules (7.1) avec les conditions (7.2), (7.3) et (7.4) définissent tous les états non stationnaires susceptibles de se réaliser à l'extérieur de la matière conformément aux équations d'Einstein. Nous savons qu'un tel état résulte de la propagation des ébranlements gravitationnels qui, suivant la proposition 4.5, se propagent comme les ondes électromagnétiques. Celles-ci sont considérées d'habitude dans l'espace homogène et isotrope de la Relativité Restreinte, et sont alors définies par des solutions, appelées *potentiels retardés*,

$$\phi(t,x) = \int\int\int \frac{\epsilon(y, t - \frac{\|x-y\|}{c})}{\| x - y \|} dy_1 dy_2 dy_3,$$

$$\vec{A}(t,x) = \int\int\int \frac{\vec{j}(y, t - \frac{\|x-y\|}{c})}{\| x - y \|} dy_1 dy_2 dy_3,$$

des équations d'ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 4\pi\epsilon, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Bien que celles-ci ne soient d'aucune utilité pour notre problème –car elles se trouvent remplacées par des équations beaucoup plus riches, à savoir par les équations d'Einstein et accessoirement par les équations relativistes du champ électromagnétique– il convient de retenir deux caractéristiques essentielles des potentiels retardés:

(a) Le temps y intervient par l'intermédiaire de la fonction de propagation classique $t - \| x - y \| /c$.

(b) La fonction de propagation figure exclusivement dans les expressions des densités de charge et de courant.

Quitte à remplacer $t - \| x - y \| /c$ par t, la caractéristique (a) se retrouve dans (7.1), car la coordonnée temporelle s'identifie à la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels (ou de la lumière) par rapport à la métrique canonique. En ce sens la solution générale (7.1) est une *solution du type des* *potentiels retardés.* Cependant on ne trouve plus dans (7.1) la caractéristique (b). Celle-ci implique que la propagation des ondes électromagnétiques dans $\mathbf{R}^3$ se réalise sans diffusion, c'est-à-dire qu'elle satisfait au principe de Huyghens, car les ébranlements électromagnétiques sont commandés par les variations en fonction du temps des densités de charge et de courant. Nous savons d'ailleurs que, quelle que soit la nature du phénomène, les solutions de l'équation des ondes dans $\mathbf{R}^3$ définissent des ondes se propageant sans diffusion. Tel n'est plus le cas pour tout champ gravitationnel non stationnaire défini par (7.1). En effet, si l'ébranlement gravitationnel $(\sigma'(t), \zeta'(t))$ disparaît durant un intervalle de temps I, c'est-à-dire si les fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ se réduisent à des constantes lorsque t parcourt I, cela n'entraîne forcément pas que la fonction $g(t, \rho)$ cesse de dépendre de t durant l'intervalle de temps I. Ainsi l'annulation de $(\sigma'(t), \zeta'(t))$ sur I n'implique en général pas l'établissement d'un état stationnaire, en d'autres termes il y a en général diffusion d'ondes gravitationnelles. Est-ce qu'une telle situation correspond à la réalité ? A priori on n'en sait absolument rien. Toutefois la propagation sans diffusion semble plus conforme à notre idée intuitive du phénomène, et en tout cas on ne peut pas se passer de son étude.

b) Solitons de Huyghens

Supposons que la fonction $g(t, \rho)$ qui définit la solution (7.1) se réduise à une fonction indépendante de t sur tout intervalle de temps sur lequel l'ébranlement $(\sigma'(t), \zeta'(t))$ s'annule. Il en est alors de même de $f(t, \rho)$ et $l(t, \rho)$, et le champ gravitationnel qui en résulte sera appelé *soliton gravitationnel de Huyghens* ou simplement *soliton de Huyghens.* Dans un tel champ les ébranlements gravitationnels se propagent sans diffusion.

Nous savons déjà que la solution générale (7.1) est du type des potentiels retardés, c'est-à-dire qu'elle possède le pendant de la caractéristique (a). Afin d'en déduire les solitons de Huyghens, il faut que la fonction à utiliser $g(t, \rho)$ possède aussi le pendant de la caractéristique (b). Or, au lieu des densités de charge et de courant, nous avons maintenant les fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$, dont les variations engendrent les ébranlements gravitationnels, et puisque la fonction de propagation se réduit à t, g doit être fonction de $(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$. Lorsque le bord de la matière passe dans un état d'équilibre, les fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ se réduisent à des constantes positives σ_0 et ζ_0, de sorte que nous obtenons la solution stationnaire comme fonction de $(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$. Il en résulte l'énoncé suivant.

Proposition 7.1. *La fonction g qui définit les solitons de Huyghens, résulte de la fonction g qui définit la solution stationnaire générale, considérée comme* *fonction de* $(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$*, si l'on y remplace les constantes positives* σ_0 *et* ζ_0 *par les conditions initiales* $\sigma(t)$ *et* $\zeta(t)$.

En effet, si g est une fonction de $(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$, alors, d'après (7.1), f et l seront fonctions de $(\sigma(t), \zeta(t), \sigma'(t), \zeta'(t), \rho)$.

Remarque 7.1. Nous nous attachons à la définition la plus simple possible de la fonction g. Or rien n'empêche de faire dépendre g non seulement de $\sigma(t)$, $\zeta(t)$ et ρ, mais aussi des dérivées de $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ jusqu'à un certain ordre n. Alors les fonctions f et l dépendront des dérivées de $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ jusqu'à l'ordre $n+1$.

La fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ qui définit les solitons de Huyghens est susceptible d'une infinité de déterminations. Bien entendu, en vue des applications, on pourra envisager certaines déterminations spécifiques de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$, conformément aux conditions qui seront établies tout de suite, mais de toute façon l'idée d'une forme canonique pour $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ n'est pas défendable. Il ne faut pas surtout se rapporter à la détermination de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ qui s'obtient en choisissant pour coordonnée radiale ρ la distance au centre –ce qui est en principe possible pendant les états stationnaires. En effet, cette détermination de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ est à proscrire de l'étude des états non stationnaires, car les dérivées

$$\frac{\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)}{\partial \sigma_0}, \quad \frac{\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)}{\partial \zeta_0}$$

ne tendent pas alors vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$ (cf. proposition 7.2).

Nous allons préciser maintenant les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$.

On remarque tout d'abord que, les valeurs σ_0 et ζ_0 étant fixées, $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ définit un état stationnaire, et puisque (5.8) entraîne

$$\frac{\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)}{\partial \rho} > 0,$$

on a, en raison de (5.9), la condition

$$Q(g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)) > 0.$$

Celle-ci est en fait moins lourde qu'elle ne le paraît, car elle se traduit par une inégalité

$$g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > \alpha$$

où $\alpha \geq 0$ est une valeur dépendant de (λ, μ, ν). En effet, considérons la fonction

$$J(u) = u^2 Q(u) = \lambda u^4 + u^2 - 2\mu u + \nu^2,$$

qui est strictement convexe et possède un minimum absolu [26] qui se réalise pour une valeur u_1 appartenant à l'intervalle $]0, \mu]$. Alors on distingue trois cas:

1er cas. Si $J(u_1) < 0$, $J(u)$ s'annule pour une valeur $u_0 > u_1$ et est strictement positive sur la demi-droite $]u_0, +\infty[$. Puisque les valeurs de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ pour $\rho \geq \sigma_0$ sont strictement positives et parcourent une demi-droite, la condition $Q(g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)) > 0$ sera remplacée par l'inégalité

$$g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > u_0$$

(En particulier si $\lambda = 0$ et $\nu = 0$, on a $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > 2\mu$).

2ème cas. Si $J(u_1) = 0$, on aura évidemment l'inégalité

$$g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > u_1$$

3ème cas. Si $J(u_1) > 0$, alors $J(u)$ est partout strictement positive, de sorte que l'inégalité $Q(g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)) > 0$ n'impose aucune condition à la fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > 0$.

Cela dit, étant donné que $g(\sigma_0, \zeta_0, \sigma_0) = \zeta_0$, l'ensemble de définition de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$, noté Y, est déterminé de la façon suivante:

$$Y = \{(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in \mathbf{R}^3 | \sigma_0 > 0, \zeta_0 > u_0, \rho \geq \sigma_0\} \quad \text{si} \quad J(u_1) < 0,$$

$$Y = \{(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in \mathbf{R}^3 | \sigma_0 > 0, \zeta_0 > u_1, \rho \geq \sigma_0\} \quad \text{si} \quad J(u_1) = 0,$$

$$Y = \{(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in \mathbf{R}^3 | \sigma_0 > 0, \zeta_0 > 0, \rho \geq \sigma_0\} \quad \text{si} \quad J(u_1) > 0.$$

Toutefois, pour la commodité des calculs dans les applications, il sera préférable de considérer $g : Y \rightarrow]0, +\infty[$ comme restriction à Y d'une fonction indéfiniment dérivable définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ contenant l'adhérence de Y. Bien entendu le choix de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ ne peut pas être arbitraire. Il est assujetti à certaines conditions qui sont explicitées ci-dessous.

Proposition 7.2. *Toute fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ définissant un soliton de Huyghens satisfait aux conditions suivantes:*

(a) $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > u_0$ *pour tout* $(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in Y$ *si* $J(u_1) < 0$,
$g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > u_1$ *pour tout* $(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in Y$ *si* $J(u_1) = 0$,
$g(\sigma_0, \zeta_0, \rho) > 0$ *pour tout* $(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in Y$ *si* $J(u_1) > 0$.

(b) *$g(\sigma_0, \zeta_0, \sigma_0) = \zeta_0$ avec $\sigma_0 > 0$ et $\zeta_0 > u_0$ ou $\zeta_0 > u_1$ ou $\zeta_0 > 0$ suivant que $J(u_1) < 0$ ou $J(u_1) = 0$ ou $J(u_1) > 0$.*

(c) *$\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)/\partial\rho > 0$ pour tout $(\sigma_0, \zeta_0, \rho) \in Y$.*

(d) *Si $\lambda = 0$ (resp. $\lambda > 0$), les fonctions $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)/\rho$ et $\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)/\partial\rho$ (resp. les fonctions $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \dfrac{1}{g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)} \dfrac{\partial g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)}{\partial\rho}$) tendent toutes les deux uniformément vers 1 (resp. tendent uniformément vers $+\infty$ et 1 respectivement) lorsque $\rho \to +\infty$ et que (σ_0, ζ_0) parcourt un compact quelconque fixé dans $]0, +\infty[\times]u_0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[\times]u_1, +\infty[$ ou $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ suivant que $J(u_1) < 0$ ou $J(u_1) = 0$ ou $J(u_1) > 0$.*

(e) *Toute dérivée partielle de $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ comportant des dérivations par rapport aux paramètres σ_0 et ζ_0 tend uniformément vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$ sur tout compact défini comme ci-dessus.*

La validité de cet énoncé est évidente. En particulier les conditions (d) et (e) sont indispensables afin d'assurer la réalisation des conditions aux limites relatives à la solution non stationnaire définie par la fonction $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$.

Considérons maintenant une fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ remplissant les conditions de la proposition 7.2. Alors $g = g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$ doit tout d'abord vérifier (5.9), ce qui donne

$$\frac{2}{c}\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\sigma'(t) + \frac{\partial g}{\partial\zeta}\zeta'(t)\right) + Q(g) = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)^2 > 0.$$

Par conséquent l'ébranlement gravitationnel $(\sigma'(t), \zeta'(t))$ doit être tel que

$$\frac{2}{c}\left(\frac{\partial g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)}{\partial\sigma}\sigma'(t) + \frac{\partial g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)}{\partial\zeta}\zeta'(t)\right) + Q(g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)) > 0. \tag{7.5}$$

Proposition 7.3. *Si la fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ vérifie les conditions de la proposition (7.2) et si les fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ satisfont à la condition (7.5), alors la fonction $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$ définit un soliton de Huyghens, et les deux autres fonctions*

$$f = f(\sigma(t), \zeta(t), \sigma'(t), \zeta'(t), \rho)$$

et

$$l = l(\sigma(t), \zeta(t), \sigma'(t), \zeta'(t), \rho)$$

s'obtiennent par les formules

$$f = c\sqrt{\frac{2}{c}\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\sigma'(t) + \frac{\partial g}{\partial \zeta}\zeta'(t)\right) + Q(g)}$$

et

$$l = \frac{\partial g/\partial \rho}{\sqrt{\frac{2}{c}\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\sigma'(t) + \frac{\partial g}{\partial \zeta}\zeta'(t)\right) + Q(g)}}$$

où l'on écrit g au lieu de $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$.

En effet, il est alors évident que les conditions (7.2), (7.3) et (7.4) sont satisfaites. En outre l'annulation de l'ébranlement gravitationnel sur n'importe quel intervalle de temps entraîne l'établissement d'un état stationnaire.

Références

[1] L.S. Abrams, *Alternative space-time for the point mass,* Phys. Rev. vol. 20, no. **10**, pp. 2474-2479, 15 November 1979.

[2] P. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity,* New York, Prentice-Hall, 1942.

[3] G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics,* p. 253, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1923.

[4] W.B. Bonnor, *On Birkhoff's theorem,* Recent Developments in General Relativity, PWN Warsaw, Pergamon Press, 1962.

[5] P.W. Bridgman, *Reflections of a Scientist,* Philosophical Library, New York, 1955.

[6] P.W. Bridgman, *A Sophisticate's Primer of Relativity,* Wesleyan University Press, Middletown, Connecticut, 1962.

[7] L. Brillouin, *Relativity Reexamined,* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1970.

[8] L. de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire,* Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[9] J. Droste, *Het van een enkel centrum in Einstein's theorie der zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld,* Versl. gewone Vergad. Akad. Amst., **25**, pp. 163-180, 1916.

[10] A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems,* Phys. Zeit. **14**, pp. 1249-1262, discussion pp. 1262-1266, 1913.

[11] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation,* Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, **II**, pp. 844-847, 25 November 1915.

[12] A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie,* Annalen der Physik, **49**, pp. 769-822, 1916.

[13] F.W. Hehl, *Fermions and gravity* dans *Einstein 1879-1955, Colloque du centenaire, Collège de France, 6-9 Juin 1979,* pp. 119-148, Editions du C.N.R.S., Paris, 1980.

[14] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik: Zweite Mitteilung,* Göttingen Nach., pp. 53-76, 1917.

[15] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
[16] M.D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric,* Phys. Review, vol. **119**, September 1, pp. 1743-1745, 1960.
[17] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs,* éditions Mir, Moscou, 1970.
[18] T. Levi-Civita, Atti della R. Acc. dei Lincei, 2 sem., vol. **5**, pp. 164-171, 1896.
[19] S. Mavridès, *Les concepts de la physique dans la cosmologie contemporaine* dans *La pensée physique contemporaine,* édité par S. Diner, D. Fargue, G. Lochak, Fondation Louis de Broglie, éditions Augustin Fresnel, pp. 59-79, 1982.
[20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation,* W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
[21] N. Rosen, *The Field of a Particle in General Relativity Theory,* Il Nuovo Cimento, vol. **72 B**, N. 1, pp. 51-67, 11 Novembre 1982.
[22] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie,* Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften, **II**, pp. 189-196, 1916.
[23] J.M. Souriau, *Prolongements du champ de Schwarzschild,* Bull. Soc. Math. France, t. 93, Fasc. 3, pp. 193-207, 1965.
[24] N. Stavroulakis, *A Statical Smooth Extension of Schwarzschild's Metric,* Lettere al nuovo Cimento, vol. **11**, N. 8, pp. 427-430, 26 Ottobre 1974.
[25] N. Stavroulakis, *Exact solution for the field of a pulsating source,* Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups, Vol. **1**, pp. 74-75, 9th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, July 14-19, Jena, 1980.
[26] N. Stavroulakis, *Paramètres cachés dans les potentiels des champs statiques,* Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. **6**, no. 4, pp. 287-327, 1981.
[27] N. Stavroulakis, *Space-time metrics related to the generation and propagation of gravitational waves,* Contributed Papers, vol. **1**, pp. 135-137, 10th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, 4-9 July, Padova, 1983.
[28] N. Stavroulakis, *O(n)-invariant and SO(n)-invariant tensor fields in General Relativity,* Abstracts of contributed Papers, vol. **1**, p. 387, 11th Inter. Conf. on General Relativity and Gravitation, July 6-12, Stockholm, 1986.
[29] N. Stavroulakis, *Mathématiques et trous noirs,* Gazette des mathématiciens, no. 31, pp. 119-132, Juillet 1986.
[30] H. Weyl, *Space-time-matter,* First American Printing of the Fourth Edition (1922), Dover Publications, inc.

Manuscrit reçu le 17 avril 1986