Production d'énergie active dans un gaz relativiste de particules en transformation mutuelle

J.P. Terletsky

Dept. Theor. Phys.
Peoples' Friendship University,
Moscow 117302

RÉSUMÉ. On calcule le tenseur impulsion-énergie d'un gaz parfait relativiste de particules se transformant les unes dans les autres, à une température non relativiste. On trouve l'équation de continuité d'un tel gaz qui diffère de l'équation einsteinienne par un terme qui tient compte de la production d'énergie active par transformation mutuelle.

On sait [1] que la loi relativiste de conservation de l'énergie d'un gaz formé de particules se transformant les unes dans les autres peut s'écrire

$$\mathcal{E} + \mu c^2 = E = const, \tag{1}$$

où

$$\mathcal{E} = \sum_i M_i c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}} - 1 \right) + \epsilon_f \tag{2}$$

est l'"énergie active" du système,

$$\mu = \sum_i M_i \tag{3}$$

la "masse sommée", ϵ_f l'énergie de champ de l'interaction, M_i les masses propres des particules. Aussi bien $\mathcal{E}$ que μ ne sont pas des grandeurs définies de façon invariante, mais pour $u_i \ll c$, $\mathcal{E}$ devient la somme de l'énergie cinétique et potentielle, c'est-à-dire l'énergie au sens thermodynamique ordinaire, quant à μ, il devient la masse totale.

D'après (1), quand les particules se transforment les unes dans les autres, la masse sommée μ change et la "production d'énergie active" est égale à :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d}{dt}\mu c^2 \tag{4}$$

En hydrodynamique relativiste, la production d'énergie active n'est pas prise en compte et, d'après Einstein [2], l'équation de continuité pour la densité de masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sigma U^k) = -\frac{dP}{d\tau} \tag{5}$$

où U^k est la quadrivitesse, P la pression et τ le temps propre. Dans cette équation, en raison du second membre, la masse ne se conserve pas ; cependant cette non conservation n'est pas une conséquence de la transformation mutuelle, c'est-à-dire d'un changement de la masse sommée μ.

Pour généraliser l'équation (5) au cas où l'on prend en compte la transformation mutuelle, nous partirons de la loi relativiste générale de conservation sous sa forme tensorielle

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{6}$$

Si les particules du gaz se meuvent avec différentes vitesses, le tenseur énergie-impulsion peut s'écrire sous la forme :

$$T^{ik} = \sum_{(l)} \sigma_{(l)} U^i_{(l)} U^k_{(l)} = \sum_{(l)} T^{ik}_{(l)}, \quad T^{ik}_{(l)} = \sigma_{(l)} U^i_{(l)} U^k_{(l)}, \tag{7}$$

où la sommation sur (l) a le sens d'une sommation par groupes de particules de vitesses $U^k_{(l)}$ et :

$$\sigma_{(l)} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k \in \Delta V} M_k(l), \quad \sigma = \sum_{(l)} \sigma_{(l)} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k \in \Delta V} M_k. \tag{8}$$

Ecrivons (7) sous la forme :

$$T^{ik}_{(l)} = \sigma_{(l)} \frac{U^i_{(l)} U^k_{(l)}}{1 - \frac{U^2_{(l)}}{c^2}}, \tag{9}$$

où :

$$U^k = (c, \vec{u}), \quad u = \mid \vec{u} \mid, \tag{10}$$

c'est-à-dire que $\vec{u}$ est une vitesse tri-dimensionnelle.

Soit $\vec{u}$ la vitesse moyenne dans le volume ΔV, c'est-à-dire :

$$U^k_{(l)} = U^k + v^k_{(l)}, \quad \vec{u}_{(l)} = \vec{u} + \vec{v}_{(l)}, \quad v^0_{(l)} = 0, \quad \sum_{(l)} \vec{v}_{(l)}\sigma_{(l)} = 0. \tag{11}$$

Introduisons maintenant la définition :

$$\overline{v}^2 = \frac{1}{\sigma}\sum_{(l)} \sigma_{(l)} v^2_{(l)}, \quad \overline{v^i v^k} = \frac{1}{\sigma}\sum_{(l)} \sigma_{(l)} v^i_{(l)} v^k_{(l)}$$

En cas d'isotropie, on a évidemment :

$$\overline{v^i v^k} = \overline{v^2}\,\frac{\delta^{ik}}{3}. \tag{12}$$

Considérons seulement le cas $v \ll c$, c'est-à-dire celui où le gaz relativiste a une température non relativiste. Dans ce cas, en développant en série de v/c on a :

$$\frac{1}{1-(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{c})^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left\{1 + \frac{2\vec{u}\vec{v}}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} + \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(1+3\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3} + \cdots\right\} \tag{13}$$

En introduisant la densité du gaz en mouvement

$$\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{14}$$

en faisant dans (9) une moyenne sur (l) et en se limitant à l'ordre v^2/c^2, on trouve :

$$T^{ik} = \frac{\rho U^i U^k}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \tau^{ik}, \tag{15}$$

où :

$$\tau^{00} = \frac{1+3\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3}\sigma\overline{v^2}, \quad \tau^{ik} = \frac{U^k}{c}\tau^{00} + \nu^k, \quad \nu^k = \frac{2}{3}\frac{U^k}{c}\frac{\sigma\overline{v^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3},$$

$$\nu^0 = 0, \quad \tau^{ik} = \frac{\sigma\overline{v^2}}{3} \frac{\left[(1-\frac{u^2}{c^2})\delta^{ik} + \frac{4U^iU^k}{c^2}\right]}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} + \frac{U^iU^k}{c^2}\tau^{00}, i,k > 0 \tag{16}$$

D'après (14), (15), (16), l'équation (6) donne :

$$c^2\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho U^k) + \frac{\partial}{\partial x^k}(WU^k) = -c\frac{\partial \nu^k}{\partial x^k} \tag{17}$$

soit :

$$c^2\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{u}\rho)\right\} = -\left\{\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{u}W)\right\} - c\,\mathrm{div}\,\vec{\nu}, \tag{17'}$$

où

$$W = \rho c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) + c\tau^{00} = \frac{w}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{18}$$

est la densité d'énergie active.

Ainsi, pour des particules en transformation mutuelle, au lieu de l'équation d'Einstein (5) on doit utiliser l'équation (17) qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sigma U^k) = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{c^2}U^k\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \nu^k}{\partial x^k}, \tag{19}$$

Il est facile de voir que pour $\sigma\overline{v^2} \to 0$, c'est-à-dire pour un gaz relativiste froid, cette équation se simplifie et peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sigma U^k) = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{dW}{dt} + W\cdot\nabla\vec{u}\right) \tag{20}$$

puisque dans ce cas $\vec{\nu} = 0$ de même que $P = 0$ dans l'équation (5).

En intégrant (17) sur le volume ΔV en remarquant que $\mu = \int_{\Delta V}\rho dV$, $\mathcal{E} = \int_{\Delta V} W dV$, on obtient pour la production d'énergie active

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\mu c^2) - c\int_{\Delta V}\mathrm{div}\,\vec{\nu}\cdot dV \tag{21}$$

Le second terme du membre de droite de cette équation représente le flux du vecteur $c\vec{\nu}$ à travers la surface enveloppant le volume ΔV.

A partir de l'équation (6) pour $i \neq 0$ on peut obtenir également les équations hydrodynamiques d'un gaz parfait relativiste de particules en transformation mutuelle. De la même manière que pour la déduction de l'équation de continuité, en utilisant (11) – (16), on peut obtenir les équations de l'hydrodynamique dans le cas d'un gaz parfait relativiste à une température non relativiste.

Cependant, dans le présent travail, nous nous limiterons à l'équation de continuité (19) et nous n'analyserons pas plus avant les expressions (16) pour les comparer avec les termes correspondants de l'hydrodynamique relativiste d'Einstein.

Références

[1] Terletsky J.P., Rybakov I.P., *L'électrodynamique*, L'Ecole Supérieure, Moscou, 1980, p. 281 (en russe).

[2] Einstein A., *Quatre conférences sur la théorie de la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1924, p. 48.

Manuscrit reçu le 26 avril 1987