

Remarques sur les théories de champs à bosses : équations du mouvement d'une particule, onde et moment magnétique associés à une particule

J. LAMEAU

ENSM, 1 rue de la Noë,
44072 Nantes Cedex

RESUME. On étudie le problème de la Dynamique d'une particule, dans les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld. On est amené à étudier tout d'abord le problème de la stabilité d'une particule, conçue comme une bosse du champ électromagnétique. Cette étude permet de proposer une interprétation du moment magnétique des particules, et de leur aspect ondulatoire. Les résultats obtenus montrent que les bosses de champ ne sont pas stables dans ce genre de théorie. Mais la méthode utilisée pourrait s'appliquer aux autres théories non linéaires de champs à bosses. On étudie aussi le problème du caractère probabiliste de la Dynamique des particules.

Dans la théorie de la double solution, Louis de Broglie considère les particules comme de très petits domaines où une onde, régie par une équation aux dérivées partielles non linéaire, a une amplitude extrêmement élevée.

Dans la théorie de la Relativité Générale, Einstein considère les particules neutres comme des singularités du champ de gravitation. Au voisinage du centre d'une particule, l'intensité du champ tend vers l'infini. Mais, contrairement à ce qui est admis en théorie de la double solution, le champ propre d'une particule n'est pas ici oscillant. Il en est de même dans les théories unitaires, où les particules sont conçues comme des singularités d'un champ unifié dont les champs gravifique et électromagnétique sont deux manifestations différentes.

Enfin, dans les théories électromagnétiques non linéaires telles que les théories de Born-Infeld ou de Mie [1], les particules électriquement chargées sont considérées comme des bosses du champ électromagnétique, c'est-à-dire comme de très petits domaines où l'intensité de ce champ est extrêmement

élevée, tout en restant cependant bornée en tout point et à tout instant. De même qu'en Relativité Générale, le champ propre d'une particule n'est pas oscillant. Une particule immobile, soustraite à toute action d'origine extérieure, est représentée par la solution statique à symétrie sphérique des équations fondamentales du champ.

Dans chacune de ces théories, que le champ propre d'une particule soit borné ou non, qu'il soit oscillant ou non, les particules sont considérées comme n'étant pas distinctes du champ. Elles ne sont rien d'autre que de petits domaines où le champ est extrêmement intense. En d'autres termes, champ et particules sont deux manifestations différentes d'une substance unique.

1. Le problème des équations du mouvement en théorie électromagnétique non linéaire

Le travail ici présenté a pour origine la recherche de la solution du problème des équations du mouvement dans les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld. Il s'agit de déduire des équations aux dérivées partielles du champ électromagnétique les équations de la Dynamique d'une particule placée dans un champ donné.

Rappelons brièvement les équations fondamentales auxquelles obéit le champ électromagnétique dans ces théories.

$\vec{E}$ désigne le champ électrique, $\vec{B}$ l'induction magnétique, $\vec{D}$ l'induction électrique, $\vec{H}$ le champ magnétique. Ces champs obéissent à un système d'équations aux dérivées partielles déduit d'un principe variationnel associé au lagrangien $L(F, G, \beta)$. F et G sont les deux invariants fondamentaux de la théorie :

$$F = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \quad , \quad G = -\vec{B} \cdot \vec{E}$$

β est une constante de valeur très petite, qui ne dépend que du système d'unités choisi, et telle que, pour $\beta = 0$, on retrouve le lagrangien de la théorie linéaire de Maxwell. Les équations aux dérivées partielles déduites du principe variationnel sont identiques à celles de Maxwell pour le cas où les densités de charge et de courant sont nulles :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{D} = 0 \quad (1)$$

Champs et inductions sont liés par les relations non linéaires

$$\vec{D} = \frac{\partial L}{\partial F} \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \vec{B} \quad , \quad \vec{H} = \frac{\partial L}{\partial F} \vec{B} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \vec{E} \quad (2)$$

Une particule immobile, soustraite à toute influence d'origine extérieure, est représentée par la solution statique à symétrie sphérique (*SSSS* dans la suite) des équations du champ. Cette solution s'obtient sans difficulté à partir de l'équation $\text{div } \vec{D} = 0$. On constate que toute solution à symétrie sphérique est nécessairement statique. $\vec{B}$ est nul, donc $G = 0$. Si q représente la charge électrique de la particule, et r la distance d'un point quelconque au centre de cette particule, la norme de l'induction électrique est donnée par l'égalité

$$D = \frac{q}{r^2}$$

Quel que soit le lagrangien $L(F, G, \beta)$, l'invariant fondamental F est donné par l'équation algébrique

$$F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^2 + \frac{q^2}{r^4} = 0$$

Le champ électrique $\vec{E}$, radial comme $\vec{D}$, a pour intensité

$$E = \frac{q}{\frac{\partial L}{\partial F} r^2}$$

On utilisera aussi dans la suite les équations aux variations associées aux équations fondamentales (1). Considérons deux solutions, très voisines, du système (1), auxquelles correspondent les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ pour la première, et $\vec{E} + \delta \vec{E}$, $\vec{B} + \delta \vec{B}$, $\vec{D} + \delta \vec{D}$, $\vec{H} + \delta \vec{H}$ pour la seconde. On admet que les variations $\delta \vec{E}$, $\delta \vec{B}$, $\delta \vec{D}$, $\delta \vec{H}$ sont, en tout point et à tout instant, extrêmement faibles. En raison de leur petitesse, ces variations sont solutions des équations variationnelles que l'on obtient par différentiation de (1) et (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\delta \vec{B})}{\partial t} \quad , \quad \text{rot } \delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\delta \vec{D})}{\partial t} \\ \text{div}(\delta \vec{B}) = 0 \quad , \quad \text{div}(\delta \vec{D}) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\delta \vec{D} = M \delta \vec{E} + N \delta \vec{B} \quad , \quad \delta \vec{H} = P \delta \vec{E} + Q \delta \vec{B} \quad (4)$$

M, N, P, Q sont des matrices associées à la solution $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H})$. On trouvera leur expression dans [2].

Ces préliminaires étant rappelés, essayons d'étudier le problème de la Dynamique d'une particule.

Dans ces théories électromagnétiques non linéaires, le champ d'une particule n'étant pas oscillant, on ne peut pas s'inspirer de la méthode employée par Louis de Broglie en théorie de la double solution, méthode qui, comme on le sait, aboutit à la formule du guidage.

On pourrait penser à la méthode des singularités, qui a été utilisée en théorie de la Relativité Générale par Darmon, Einstein et Grommer. En raison de la non-linéarité des équations fondamentales du champ de gravitation, la somme de deux solutions n'est généralement pas solution de ces équations. En particulier, si l'on considère une solution singulière du champ, représentant une particule, la somme de cette solution et d'un champ extérieur n'est une solution des équations fondamentales que si la singularité parcourt une géodésique de l'espace-temps riemannien associé au champ extérieur. Mais cette méthode ne peut pas se transposer en théorie électromagnétique non linéaire, car les particules y sont considérées non pas comme des singularités, où le champ est infini, mais comme des bosses de champ où l'intensité du champ, bien que très élevée, reste bornée.

Il est également impossible d'utiliser la méthode du tenseur d'énergie-impulsion, car cela ne peut se faire que si les particules sont considérées comme étant d'une nature radicalement différente de celle du champ. On est alors dans la version dualiste de la Relativité Générale. Or, les théories électromagnétiques non linéaires sont non dualistes, les particules y étant considérées comme n'étant en rien distinctes du champ électromagnétique.

Donc, en théorie électromagnétique non linéaire, si l'on veut déduire des équations fondamentales du champ électromagnétique les équations de la Dynamique d'une particule électriquement chargée, il est nécessaire d'imaginer une méthode radicalement différente de celles que l'on emploie en théorie de la double solution et en Relativité Générale. On est amené à étudier d'une manière approfondie l'influence d'un champ extérieur sur une bosse de champ.

2. Le problème de la stabilité des bosses de champ

En théorie électromagnétique non linéaire, une particule immobile, soustraite à toute action extérieure, est représentée par la *SSSS* des équations fondamentales du champ. La gravitation est généralement négligée, bien qu'au voisinage du centre d'une particule, la très grande intensité du champ électromagnétique doit probablement entraîner l'existence d'un champ de gravitation non négligeable [3]. On peut d'ailleurs incorporer les théories du type Born-Infeld dans la Relativité Générale et calculer la *SSSS* correspondante [4]. Cependant, on négligera ici la gravitation, et l'on restera dans le cadre des théories de champ électromagnétique pur.

Considérons donc une particule, conçue comme n'étant rien d'autre qu'une bosse du champ électromagnétique, soumise à l'action d'un champ extérieur donné. Ce dernier est supposé faible, du même ordre de grandeur que les variations $\delta\vec{E}$, $\delta\vec{B}$, $\delta\vec{D}$, $\delta\vec{H}$ du paragraphe précédent. Ce n'est qu'au voisinage du centre d'une particule que la non-linéarité des équations du champ se traduit par des effets appréciables. En raison de la non-linéarité des équations aux dérivées partielles du champ électromagnétique, la somme d'une *SSSS* et d'un champ extérieur n'est pas solution de ces équations. L'action du champ extérieur, en général, se traduira d'une part par la disparition de la symétrie sphérique de la bosse de champ, d'autre part par sa mise en mouvement accéléré. Il n'est d'ailleurs même pas certain que la bosse de champ continue d'exister. On conçoit que, dans certains cas, l'action du champ extérieur provoque un étalement de cette bosse, ce qui entraînera au bout d'une durée plus ou moins longue sa disparition pure et simple, l'énergie qu'elle contenait se dispersant ainsi dans l'espace environnant. Avant d'étudier la Dynamique du mouvement de la bosse de champ, on est donc nécessairement amené à étudier le problème de sa permanence, c'est-à-dire de sa stabilité. Dans ces théories de champ pur, où tout doit se déduire uniquement des équations aux dérivées partielles qui régissent la structure et l'évolution du champ, il est clair que la stabilité d'une bosse ne saurait être absolue. Cela serait d'ailleurs contraire à l'expérience, qui montre que toute particule peut être détruite par une interaction suffisamment intense.

Dans ce cadre des théories non linéaires, il serait extrêmement difficile, et même pratiquement impossible, de donner une représentation analytique exacte de l'interaction de deux particules, c'est-à-dire de deux bosses de champ. En effet, en raison de la non-linéarité des équations fondamentales

du champ, on ne connaît, comme solutions analytiques, que les solutions à symétrie sphérique et les solutions du type "onde plane". On est donc contraint de se limiter à l'étude de la stabilité d'une bosse de champ soumise à l'action d'un champ extérieur assez faible, du même ordre de grandeur que les variations $\delta\vec{E}$, $\delta\vec{B}$, etc., qui sont solutions des équations variationnelles (3). Dans le cas où ce champ extérieur met la bosse en mouvement accéléré, la non-linéarité des équations empêche encore de trouver une solution analytique. On doit donc finalement se limiter au cas où l'action de ce champ ne met pas la bosse en mouvement, c'est-à-dire au cas où cette action ne produit rien de plus qu'une déformation de la bosse, en lui faisant ainsi perdre sa symétrie sphérique.

En général, l'action d'un champ électromagnétique met une particule électriquement chargée en mouvement accéléré. Il n'existe qu'un seul cas où une telle particule reste immobile dans un tel champ : c'est celui d'une particule immobile dans un champ magnétique indépendant du temps, le champ électrique étant nul. On pourra donc étudier, pour simplifier les calculs, l'influence d'un champ magnétique uniforme et indépendant du temps sur une bosse de champ. A l'échelle d'une particule, un champ extérieur macroscopique, s'il ne varie pas trop vite d'un point à un autre, peut être considéré comme pratiquement uniforme dans un voisinage assez grand de cette particule. Cette étude sera donc suffisante pour évaluer la stabilité d'une bosse de champ relativement à l'action d'un champ magnétique indépendant du temps. En raison de la non-linéarité des équations fondamentales, si l'on ajoute la *SSSS* de ces équations et le champ magnétique uniforme, on n'obtient pas une troisième solution. Pour obtenir une nouvelle solution, il faut ajouter à la somme de ces deux solutions particulières un troisième champ, qui représente l'interaction de la particule et du champ extérieur qu'elle subit. Tout comme le champ magnétique uniforme qui agit sur la particule, ce champ d'interaction sera supposé faible. Sans cette hypothèse, la non-linéarité empêcherait de résoudre le problème. La somme du champ magnétique uniforme et du champ d'interaction ne peut toutefois pas être considérée comme une solution des équations de Maxwell, car elle se superpose à la *SSSS* qui représente la particule, et pour laquelle, en raison de la très grande intensité du champ propre de la particule, la non-linéarité joue un rôle essentiel. C'est pourquoi cette somme du champ magnétique uniforme et du champ d'interaction sera traitée comme une solution des équations aux variations associées à la *SSSS*. Grâce à cette linéarisation,

le problème peut être entièrement résolu. On trouvera le détail des calculs dans [2]. Rappelons-en brièvement les résultats, en changeant quelque peu les notations.

3. Action d'un champ magnétique uniforme sur une particule

On désigne par $\vec{h}$ le champ magnétique associé à l'induction magnétique uniforme $\vec{b}$ que l'on superpose à la *SSSS*. Pour simplifier les calculs, on se place dans le cas où $\partial L / \partial G = 0$. Cette relation, évidemment vérifiée dans toutes les théories où L ne dépend pas de G , l'est aussi pour la *SSSS* de certaines autres, en particulier pour la deuxième version de la théorie de Born-Infeld. Ainsi, l'induction électrique associée au champ $\vec{b}$ est nulle. Le champ uniforme $\vec{b}$ n'est pas solution des équations variationnelles associées à la *SSSS*. Pour obtenir une solution de ces équations, il faut ajouter à $\vec{b}$ un champ d'interaction, pour lequel on utilise les notations $\vec{e}'$, $\vec{b}'$, $\vec{d}'$, $\vec{h}'$. On a donc

$$\delta \vec{E} = \vec{e}' \quad , \quad \delta \vec{D} = \vec{d}' \quad , \quad \delta \vec{B} = \vec{b} + \vec{b}' \quad , \quad \delta \vec{H} = \vec{h} + \vec{h}' \quad (5)$$

ainsi que les équations variationnelles

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{e}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{b} + \vec{b}') \quad , \quad \text{rot}(\vec{h} + \vec{h}') = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{d}'}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{b} + \vec{b}') &= 0 \quad , \quad \text{div } \vec{d}' = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Les relations (4) donnent

$$\vec{d}' = M\vec{e}' + N(\vec{b} + \vec{b}') \quad , \quad \vec{h} + \vec{h}' = P\vec{e}' + Q(\vec{b} + \vec{b}') \quad (7)$$

De plus, pour la *SSSS*, on trouve $N = P = 0$.

La solution cherchée étant statique, et $\vec{b}$ uniforme, le système (6) se sépare en deux systèmes indépendants :

$$\text{rot } \vec{e}' = 0 \quad , \quad \text{div}(M\vec{e}') = 0 \quad (8)$$

$$\text{rot}[Q(\vec{b} + \vec{b}')] = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{b}' = 0 \quad (9)$$

Si la linéarisation effectuée est légitime, le champ d'interaction doit être proportionnel à b , norme de $\vec{b}$. Comme (8) ne contient pas b , la seule solution

acceptable pour $\vec{e}'$ est $\vec{e}' = 0$. La deuxième des équations (9) montre que $\vec{b}'$ dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$. On peut le choisir de telle sorte que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, relativement au repère naturel associé aux coordonnées sphériques utilisées ($x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$), θ étant la colatitute et ϕ la longitude. On pose

$$A_3 = R(r)r \sin^2 \theta$$

D'après la première des équations (9), la fonction $R(r)$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial L}{\partial F} R'' + r \left[2 \frac{\partial L}{\partial F} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) \right] R' + \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) - 2 \frac{\partial L}{\partial F} \right] R \\ = -br^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) \end{aligned}$$

Pour pousser plus loin les calculs, il faut choisir un lagrangien particulier, par exemple celui de la première version de la théorie de Born-Infeld :

$$L = \frac{2}{\beta} \left[\sqrt{1 + \beta F} - 1 \right] \quad (10)$$

On obtient alors

$$E = \frac{q}{\sqrt{\beta q^2 + r^4}} \quad (11)$$

L'autre lagrangien proposé par Born et Infeld, où figure G , donnerait les mêmes résultats, puisque $G = 0$ dans le cas de la $SSSS$. (9) donne alors

$$R'' + \frac{2r^3}{\beta q^2 + r^4} R' - \frac{2(2\beta q^2 + r^4)}{r^2(\beta q^2 + r^4)} R = \frac{2\beta b q^2}{r(\beta q^2 + r^4)} \quad (12)$$

Si l'on cherche une solution de cette équation sous forme de développement en série, on trouve que l'unique solution proportionnelle à b est

$$R(r) = -\frac{b}{2}r$$

Pour avoir la solution générale de (12), il faut ajouter à cette solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre. Or le

premier membre de (12) ne contient pas b . Il en est donc de même pour la solution générale de l'équation sans second membre. La seule solution physiquement acceptable de (12) est donc $R(r) = -b/2r$. Si l'on calcule l'induction magnétique associée à cette solution, on trouve $\vec{b}' = -\vec{b}$. C'est une solution évidente du système (9), mais, par le calcul que l'on vient de faire, on a montré qu'elle est la seule qui soit proportionnelle à b . On aboutit donc au résultat suivant : la présence du champ extérieur $\vec{b}$ provoquerait l'apparition d'un champ d'interaction $\vec{b}' = -\vec{b}$ qui annulerait le champ extérieur jusqu'à l'infini. Ce serait manifestement absurde, et cela prouve que la *SSSS* de la théorie de Born-Infeld ne peut pas représenter une particule stable. On aboutit au même résultat avec les autres lagrangiens proposés dans les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld.

On pourrait penser à chercher une solution statique à symétrie axiale. La non-linéarité de la théorie de Born-Infeld ne permet malheureusement pas d'obtenir une telle solution.

On pourrait aussi penser à reprendre le problème en tenant compte de la gravitation, dans le cadre de la Relativité Générale. De plus, il serait intéressant d'employer la méthode ici présentée dans le cadre des théories électromagnétiques non linéaires qui ne sont pas du type Born-Infeld, la théorie de Mie par exemple, où le lagrangien fait intervenir le potentiel-quadrivecteur du champ électromagnétique.

4. Moment magnétique d'une bosse de champ

Dans une théorie électromagnétique non linéaire où la *SSSS* représenterait une particule stable, on pourrait donner une interprétation assez simple du moment magnétique d'une particule. Considérons en effet, comme dans le paragraphe précédent, la superposition de la *SSSS* et d'un champ magnétique uniforme, faible et indépendant du temps. La bosse de champ étant déformée, la particule est représentée par la somme de la *SSSS* et du champ d'interaction qui a été désigné par $\vec{b}'$. Il s'agit donc alors d'un objet qui n'a plus la symétrie sphérique, mais seulement la symétrie axiale de révolution. Il en est de même, en théorie électromagnétique linéaire, pour le champ d'un dipôle, aussi bien électrique que magnétique. En théorie électromagnétique non linéaire, l'action d'un champ magnétique extérieur a donc pour effet de faire apparaître un moment magnétique induit. Peut-être pourrait-on ainsi donner une interprétation du spin.

Désignons par $T_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique, et par $f_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur champ électromagnétique. Un indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3, avec, pour la coordonnée temporelle, $x^0 = ct$. L'expression de $T_{\alpha\beta}$ en fonction du champ se déduit d'une manière bien connue du lagrangien associé aux équations fondamentales. En différentiant cette expression, on obtient une expression de la forme

$$\delta T_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta,\mu\nu} \delta f^{\mu\nu}$$

Dans le cas étudié ici, $\Theta_{\alpha\beta,\mu\nu}$ correspond à la *SSSS*, et $\delta f^{\mu\nu}$ à la somme du champ extérieur et du champ d'interaction. En désignant par $\delta T'_{\alpha\beta}$ et $\delta f'_{\alpha\beta}$ ce qui correspond au champ d'interaction, on a donc

$$\delta T'_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta,\mu\nu} \delta f'^{\mu\nu}$$

L'énergie d'interaction sera donnée par

$$\delta W = \int \int \int_E \delta T'_{oo} dv = \int \int \int_E \Theta_{oo,\alpha\beta} \delta f'^{\alpha\beta} dv,$$

dv désignant l'élément de volume dans l'espace à 3 dimensions E . Le champ d'interaction étant proportionnel à l'intensité b du champ extérieur, il en est de même pour $\delta f'^{\alpha\beta}$, et donc pour δW . On pourra donc mettre δW sous la forme suivante :

$$\delta W = Mb,$$

M étant une constante associée à la *SSSS*, et qui se calcule à partir de l'expression des composantes $\Theta_{oo,\alpha\beta}$. Or, l'énergie magnétique d'un dipôle de moment magnétique $\vec{M}$, placé dans un champ d'induction magnétique $\vec{b}$, est égale au produit scalaire $\vec{M} \cdot \vec{b}$. On peut donc interpréter M comme la grandeur du moment magnétique induit par l'action du champ extérieur $\vec{b}$, le vecteur "moment magnétique" $\vec{M}$ étant colinéaire à $\vec{b}$.

Dans les théories du type Born-Infeld, on constate que $\Theta_{oo,\alpha\beta} = 0$, d'où $\delta W = 0$. Par contre, dans des théories d'un autre type, il est possible qu'on trouve un résultat différent, plus conforme à la réalité physique.

5. Problème de Cauchy et stabilité d'une particule

Le problème de la stabilité d'une particule, conçue comme une bosse de champ, peut aussi être abordé de la manière suivante. Considérons

une bosse de champ, dont l'état, à l'instant $t = 0$, correspond à une *SSSS* légèrement déformée. On peut admettre que cette déformation a été provoquée par une action extérieure subie avant l'instant $t = 0$. Admettons aussi qu'après cet instant initial, la particule est soustraite à toute action d'origine extérieure. Dans la plupart des cas, la bosse ainsi déformée ne possède plus aucune symétrie. Etudions, avec de telles conditions initiales, l'évolution ultérieure de la particule. Mathématiquement, cela revient à l'étude du problème de Cauchy relatif aux équations fondamentales du champ, avec les conditions initiales indiquées. Il se peut que la particule soit instable, et qu'elle disparaisse plus ou moins rapidement. Dans le cas où elle est stable, définissons son centre comme le point où l'intensité du champ est maximum. Pour un champ électromagnétique, on pourra choisir le maximum de la densité d'énergie. Si la structure initiale de la bosse de champ n'est pas symétrique par rapport à son centre, il n'y a aucune raison pour que celui-ci reste fixe, puisque les équations fondamentales du champ contiennent toujours des dérivées partielles de celui-ci par rapport au temps. Dans la plupart des cas, ce centre aura un mouvement plus ou moins compliqué. Ainsi, même en l'absence de champ extérieur agissant sur elle, la particule pourra avoir un mouvement accéléré et décrira alors une trajectoire déterminée par sa structure initiale. Ce comportement est bien différent de celui de la particule classique, qui obéit au principe d'inertie : si elle ne subit aucune force, elle a un mouvement rectiligne uniforme, et elle reste immobile si elle l'est à l'instant initial.

Dans le cas où la structure initiale de la bosse de champ est symétrique par rapport à son centre, et où elle est stable, elle n'a aucune raison de se mettre en mouvement dans une direction plutôt que dans une autre. Dans ce cas, le centre de la bosse reste fixe. Mais la structure de cette bosse ne reste pas nécessairement statique. Il se peut qu'elle évolue plus ou moins vite, tout en conservant ses propriétés de symétrie.

Ces considérations sont évidemment valables pour toutes les théories de champs à bosse, et pas seulement pour les théories électromagnétiques non linéaires. Pour simplifier, désignons par U le champ fondamental de la théorie. Il pourra s'agir d'un champ scalaire, vectoriel ou tensoriel. Soit U_S le champ correspondant à la *SSSS* qui représente une particule, et u le champ complémentaire qui correspond à la déformation de cette bosse de champ. La structure initiale de la bosse, qui correspond aux conditions de Cauchy, est représentée par le champ $U_S + u_0$, u_0 désignant le champ u à

l'instant $t = 0$. Dans bien des cas, le champ complémentaire u dépendra du temps t . On le désignera donc par $u(P, t)$, P étant un point quelconque. Notons aussi que, suivant l'ordre et le type du système d'équations aux dérivées partielles qui régit le champ, les conditions de Cauchy pourront faire intervenir non seulement les valeurs initiales du champ, mais aussi celles de ses dérivées par rapport au temps.

Ce problème du comportement d'une bosse de champ déformée a été étudié dans [5], pour le cas des théories électromagnétiques du type Born-Infeld. Rappelons-en brièvement les résultats.

6. Evolution de la déformation d'une bosse de champ, en théorie du type Born-Infeld

On prend, comme état initial du champ électromagnétique, la *SSSS* des équations fondamentales, légèrement déformée. On admet que ce champ déformé possède un centre de symétrie, qui coïncide avec le centre de la *SSSS*. Ainsi le centre de la bosse de champ reste fixe. Si la déformation est assez petite, son évolution sera déterminée par les équations aux variations associées à la *SSSS*. Posons

$$\delta \vec{E} = \vec{e} \quad , \quad \delta \vec{B} = \vec{b} \quad , \quad \delta \vec{D} = \vec{d} \quad , \quad \delta \vec{H} = \vec{h}.$$

Les équations variationnelles s'écrivent alors

$$\text{rot } \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad , \quad \text{rot } \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \quad , \quad \text{div } \vec{b} = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{d} = 0 \quad (13)$$

avec

$$\vec{d} = M\vec{e} + N\vec{b} \quad , \quad \vec{h} = P\vec{e} + Q\vec{b} \quad (14)$$

M, N, P, Q sont les matrices déjà utilisées pour l'étude de l'action d'un champ magnétique uniforme. On explicite le système (13) en utilisant les coordonnées sphériques associées à la *SSSS*. On constate que les coefficients du système ont des propriétés qui permettent de le résoudre par une méthode qui généralise la méthode de Bromwich, par laquelle on peut obtenir les solutions fondamentales des équations de Maxwell [6]. La solution du problème de Cauchy s'obtiendra en combinant linéairement les solutions fondamentales. On obtient les résultats suivants.

a) *Onde transverse magnétique*

$b_1 = 0$. On définit les fonctions $P(r, \theta, \phi, t)$ et $V(r, \theta, \phi, t)$ telles que

$$e_2 = \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad , \quad e_3 = \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial F} P = \frac{\partial V}{\partial r}$$

$V(r, \theta, \phi, t)$, en fonction de laquelle on peut exprimer $\vec{e}$ et $\vec{b}$, est déterminée par l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^{-1} \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \epsilon(r) \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right] \\ = \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^{-1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

dans laquelle $M_{11} = \epsilon(r)$.

Cette équation se résout par séparation des variables. Pour t, θ, ϕ , on obtient les mêmes solutions que pour les équations de Maxwell. Pour r , on a une équation différentielle assez compliquée. Comme en théorie de Maxwell, toutes les fréquences sont admissibles. On ne voit pas apparaître de fréquence propre, ce qui permettrait d'associer une onde stationnaire de fréquence bien déterminée à une bosse de champ dont le centre est immobile.

b) *Onde transverse électrique*

$e_1 = 0$. On définit les fonctions $Q(r, \theta, \phi, t)$ et $W(r, \theta, \phi, t)$ telles que

$$b_2 = \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad , \quad b_3 = \frac{\partial Q}{\partial \phi} \quad , \quad Q = \frac{\partial W}{\partial r}.$$

$W(r, \theta, \phi, t)$, en fonction de laquelle on peut exprimer $\vec{e}$ et $\vec{b}$, est déterminée par l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial L}{\partial F} \frac{\partial W}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right] \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

On peut faire les mêmes remarques que dans le cas de l'onde transverse magnétique. On ne voit pas apparaître de fréquence propre.

7. Onde associée à une particule, et stabilité d'une bosse de champ

Reprenons l'étude du paragraphe précédent, relative au problème de Cauchy, dans le cas où la structure initiale de la bosse de champ possède un centre de symétrie, et où ce centre reste fixe. Désignons encore par U le champ fondamental, par U_S la $SSSS$, et par u_0 le champ complémentaire de déformation, à l'instant initial. Admettons que la déformation soit petite, ce qui permet l'emploi des équations variationnelles pour étudier l'évolution de la déformation $u(P, t)$. Si la $SSSS$ correspond à un état de stabilité de la bosse de champ, non seulement $u(P, t)$ restera petit, mais sa valeur oscillera autour de zéro, avec ou sans amortissement, ou bien tendra vers zéro avec une décroissance d'allure exponentielle. Cette évolution de $u(P, t)$ est tout à fait comparable à celle des grandeurs caractéristiques d'un système dynamique en équilibre stable, en Mécanique classique : si l'on écarte légèrement ce système de sa configuration d'équilibre, ces grandeurs oscillent autour de la valeur zéro, ou bien tendent exponentiellement vers zéro.

Or, pour que la bosse de champ corresponde à la réalité physique, il faut qu'on puisse lui associer d'une manière simple une onde, puisqu'une particule se présente à la fois sous un aspect corpusculaire et sous un aspect ondulatoire. Si la particule est immobile, cette onde doit être stationnaire.

Dans une théorie de champ pur, cette association d'une particule et d'une onde doit se faire sans ajouter de postulat supplémentaire. Dans une telle théorie, tout doit se déduire uniquement des équations fondamentales du champ. L'étude de la stabilité d'une bosse de champ fournit précisément un procédé simple pour associer une onde à une particule.

Dans le cas d'une bosse de champ dont le centre reste fixe en raison de la symétrie de sa structure, la déformation $u(P, t)$ évoluera soit d'une manière oscillante, soit d'une manière exponentielle. Pour qu'on puisse associer une onde stationnaire à une particule immobile, le seul cas physiquement acceptable est celui du régime oscillant, sans amortissement. Dans ce cas, on aura

$$u(P, t) = a(P)\phi(t),$$

$a(P)$ étant une amplitude qui dépend du point courant P , et $\phi(t)$ une fonction périodique du temps t , qui, dans le cas où la linéarisation permise par la petitesse de u est valable, est une fonction sinusoïdale.

Bien entendu, pour que le modèle de particule soit conforme à la réalité physique, il faut que la fonction $\phi(t)$ ait une fréquence bien déterminée. On a vu qu'il n'en est pas ainsi dans les théories du type Born-Infeld. Examinons donc d'autres théories non linéaires.

On peut étudier l'équation de Klein-Gordon complétée par un terme non linéaire

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + F(U) = 0$$

La fonction $U(P, t)$ représente ici un champ physique, et n'a rien à voir avec une densité de probabilité. L'équation variationnelle associée à la $SSSS$ U_S est

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F'(U_S)u = 0$$

Cherchons une solution du type "onde stationnaire"

$$u(P, t) = a(P)e^{i\omega t}.$$

L'amplitude $a(P)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla^2 a + \left[\frac{\omega^2}{c^2} + F'(U_S) \right] a = 0$$

Si l'on a pu résoudre l'équation de Klein-Gordon non linéaire, $F'(U_S)$ est une fonction connue de la coordonnée radiale r . L'équation vérifiée par $a(P)$ est donc du même type mathématique que l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires. On sait que le spectre de celle-ci est discret pour les valeurs négatives de l'énergie. Malheureusement, ω^2/c^2 , qui remplace ici l'énergie E , est positif. On n'a donc pas de fréquence propre bien déterminée.

On peut aussi considérer le cas de l'équation de Schrödinger non linéaire [7], que l'on écrira pour simplifier sous la forme

$$i \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2 U + F(U)$$

Cette équation a été étudiée par différents auteurs, qui ont cherché des solutions de la forme

$$U(P, t) = u(P)e^{i\omega t},$$

ω étant réel. A cause du terme non linéaire, de telles solutions ne peuvent exister que si

$$F(U) = UG(|U|).$$

Par contre, même si $F(U)$ n'a pas cette forme, il peut y avoir des solutions statiques qui vérifient l'équation $\nabla^2 U_S + F(U_S) = 0$.

L'équation variationnelle associée à la $SSSS$ est alors

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + F'(U_S)u$$

Cherchons encore une solution du type "onde stationnaire", sous la forme

$$u(P, t) = a(P)e^{i\omega t}$$

L'amplitude $a(P)$ vérifie l'équation

$$\nabla^2 a + [\omega + F'(U_S)]a = 0$$

On obtient encore une équation du même type mathématique que l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires. Pour les valeurs négatives de ω , on a un spectre discret. Mais, quel que soit le signe de ω , on a toujours une onde stationnaire. Donc, là encore, on n'obtient pas de fréquence propre bien déterminée.

8. Indéterminisme et champs à bosses

Pour qu'une théorie de champ à bosses donne une interprétation correcte des théories quantiques, il ne suffit pas qu'elle permette d'associer une onde à une particule, il faut aussi que la Dynamique qui découle de cette théorie ait un caractère probabiliste. On va voir qu'il est bien ainsi, dans toute théorie de champ à bosses, pour deux raisons tout à fait différentes.

Tout d'abord, comme cela a été souligné dans l'étude de l'action d'un champ extérieur sur une bosse de champ, celle-ci ne peut pas être considérée comme un objet indéformable. En raison de la non-linéarité des

équations fondamentales du champ, la somme de deux solutions n'est pas solution de ces équations, et, sous l'action d'un champ extérieur, non seulement la particule se met généralement en mouvement accéléré, mais elle subit aussi une déformation plus ou moins importante qui lui fait perdre sa symétrie sphérique. Le champ créé par cette particule déformée n'est donc pas celui qui accompagne un objet à symétrie sphérique. En théorie électromagnétique non linéaire, à une distance de la particule suffisamment grande pour que l'approximation maxwellienne soit valable, ce champ est celui qui accompagne un objet porteur non seulement d'une charge électrique, mais aussi de moments dipolaire, quadrupolaire, etc.

Réciproquement, la force exercée par le champ extérieur sur la particule déformée dépendra non seulement de sa charge électrique, mais aussi de sa forme, c'est-à-dire de tous ces moments multipolaires, électriques ou magnétiques. L'expérience ne permettant pas de les mesurer et de suivre leur évolution au cours du temps, la dynamique de la particule aura nécessairement un caractère probabiliste, bien qu'elle découle d'équations aux dérivées partielles déterministes.

Pour déterminer le mouvement d'une particule à partir des conditions initiales, il faudrait connaître non seulement sa position et sa vitesse initiales, ou plus exactement la position et la vitesse initiales de son centre, mais connaître aussi sa forme initiale. Dans les théories de champs à bosse, les conditions initiales ne sont plus constituées d'un nombre fini de valeurs numériques ; elles correspondent aux valeurs prises en chaque point de l'espace par un certain champ, qui représente la forme initiale de la bosse. La détermination de la forme initiale d'une bosse de champ étant évidemment irréalisable par l'expérimentateur, la dynamique des particules est nécessairement probabiliste. Par ailleurs, comme une particule électriquement chargée en mouvement accéléré peut émettre un rayonnement, il faudrait aussi résoudre, dans le cadre des théories électromagnétiques non linéaires, le problème de l'émission du rayonnement. En raison de la non-linéarité des équations fondamentales, ce problème est extrêmement difficile, et ne semble d'ailleurs pas avoir été abordé jusqu'à maintenant.

Une autre raison très simple fait que la Dynamique d'une bosse de champ est nécessairement probabiliste. En toute rigueur, la *SSSS* des équations fondamentales du champ ne peut représenter qu'un univers dont le contenu se réduirait à une particule unique éternellement immobile. Dans

la réalité, l'environnement, proche ou lointain, de toute particule fait qu'elle est constamment soumise à un champ (ou à des champs, électromagnétiques, gravitationnels, etc.) qui varie de manière aléatoire. Ce champ, comparable à une sorte de bruit de fond, peut être très faible, mais il n'est jamais nul. Sa présence doit être prise en compte pour évaluer la stabilité d'une bosse de champ, car, tout comme en Dynamique classique, toute perturbation, aussi faible soit-elle, peut détruire un équilibre instable, c'est-à-dire, pour une bosse de champ, provoquer son étalement dans l'espace environnant. Ce champ aléatoire est comparable au champ de zéro (CDZ) de l'électrodynamique stochastique ; sa présence aura un effet comparable à celui du milieu subquantique de L. de Broglie, et donnera à toute particule une sorte de mouvement brownien qui se superposera au mouvement provoqué par l'action éventuelle d'un champ extérieur non stochastique.

9. Choix des équations fondamentales du champ

Pour progresser dans la voie esquissée dans les pages qui précèdent, il faudra évidemment choisir tout d'abord le type de champ (scalaire, vectoriel, ...) dont les particules sont des bosses, puis choisir les équations aux dérivées partielles non linéaires qui régissent la structure et l'évolution de ce champ.

Les théories électromagnétiques du type Born-Infeld ne semblent pas convenir, comme on l'a vu lors de l'étude de la stabilité des bosses de champ. Peut-être pourrait-on envisager une théorie telle que celle de Mie [1], où le potentiel quadrivecteur du champ électromagnétique intervient dans les équations fondamentales. Le champ électromagnétique joue dans la nature un rôle d'une telle importance qu'il intervient sans aucun doute dans les équations fondamentales que l'on cherche.

Le champ de gravitation intervient probablement aussi d'une manière importante en raison de la très grande intensité du champ au voisinage du centre d'une particule [3].

Quel que soit le type de champ qui convient, et quelles que soient les équations aux dérivées partielles auxquelles il obéit, il est évident que l'étude de la stabilité des bosses de champ est fondamentale. Il est vraisemblable que c'est elle qui peut fournir l'explication de la quantification de la charge électrique, de la masse et du moment magnétique des particules élémentaires. Elle devrait aussi permettre d'associer d'une manière simple une onde stationnaire de fréquence bien déterminée à une particule immo-

bile, en utilisant la méthode qui a été employée dans cet article pour les théories électromagnétiques du type Born-Infeld.

Des résultats très intéressants ont été obtenus [8] sur la stabilité des bosses de champ du type entièrement ondulatoire $u(P, t) = a(P)e^{i\omega t}$, pour les équations de Schrödinger, de Klein-Gordon et de Dirac non linéaires. Les méthodes employées dans ces travaux devraient permettre d'obtenir aussi des résultats intéressants pour l'étude des champs à bosse où la partie principale du champ est statique, et où la partie ondulatoire est constituée par la fluctuation qui obéit aux équations variationnelles associées à la partie statique.

Références

- [1] M.-A. Tonnelat, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, p. 75.
- [2] J. Lameau, C.R. Acad. Soc., 1977, **A**, **285**, p. 585.
- [3] Th. Kahan, *Précis de Physique théorique*, Presses Universitaires de France, t. II, p. 670.
- [4] J. Lameau, C.R. Acad. Sc., 1957, **A**, **245**, p. 2208.
- [5] J. Lameau, C.R. Acad. Sc., 1977, **A**, **t. 285**, p. 645.
- [6] Angot, *Compléments de Mathématiques à l'usage des ingénieurs des télécommunications*, Editions de la Revue d'Optique.
- [7] I. Bialynicki-Birula et J. Mycielski, *Physica Scripta*, **20**, 1979, p. 539.
- [8] H. Berestycki et T. Cazenave, C.R. Acad. Sc., 1981, **I**, **293**, p. 489.

(Manuscrit reçu le 27 juillet 1987)