Sur quelques interprétations physiques de la constante de Planck *

A la mémoire de Max Planck,
pour le 130ème anniversaire de sa naissance

Georges LOCHAK

CNRS, Fondation Louis de Broglie,
292 rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03

Si quelqu'un vous dit qu'il sait ce que $E = h\nu$ veut dire, dites lui que c'est un menteur
Albert Einstein [1]

1. Introduction

Tout compte fait, il n'est pas étonnant que, quarante ans après la mort de Max Planck, la crise qu'il a fait éclater en physique dans les dernières semaines du siècle dernier dure encore et soit sans doute appelée à durer encore longtemps. La profondeur de cette crise a été masquée, à l'époque, aux yeux de la plupart des physiciens, parce qu'il était encore possible de croire que la difficulté survenue avec l'échec de la loi du rayonnement thermique d'équilibre de Rayleigh-Jeans n'était que locale et ne concernait qu'un phénomène particulier. Il n'était donc pas facile de comprendre que la réponse paradoxale que Planck donnait à ce problème allait au coeur de la physique et l'engageait tout entière. Aujourd'hui, nous tenons pour évident le caractère crucial du problème du rayonnement noir parce qu'il

⋆Ce travail a été présenté aux "Physikertagung 1987", à Berlin, sous l'égide de la Deutsche Physikalische Gesellschaft et a été publié en français et en allemand dans le tome *Didaktik der Physik* des actes du congrès. Que le Professeur Wilfried Kuhn, éditeur de ce tome, soit ici remercié de nous avoir autorisé à reproduire ce texte.

[1]Cité par Cornelius Lanczos, *The Einstein Decade,* Elek-Science, London, 1974, p. 62.

se trouvait à la rencontre de la mécanique de Newton, de la thermodynamique statistique de Boltzmann, de la théorie des électrons de Lorentz et de l'électromagnétisme de Maxwell. Mais rappelons-nous qu'à la fin du XIXè siècle, la mécanique de Newton était regardée comme universelle et sa mise en doute était scandaleuse, tandis qu'au contraire, la théorie de Boltzmann était encore décriée, au désespoir de son auteur, et le fait qu'elle puisse échouer ne chagrinait pas grand monde [2] ; quant à la théorie de Lorentz, c'était une théorie toute nouvelle dont l'introduction n'avait rien de convaincant [3] ; enfin, la théorie de Maxwell elle-même était loin d'être universellement reconnue (par exemple elle était encore assez peu connue en France).

Comment pouvait-on croire, dans ces conditions, à l'importance de l'idée des quanta ? Il semble bien, d'ailleurs que, momentanément, elle fut vite oubliée puisque Besso, parlant à Einstein de ses fameux mémoires de 1905, pouvait lui écrire :

> *"La manière dont tu as su réveiller une Belle au bois dormant après l'autre tient vraiment du conte de fées. L'expérience de Michelson avec le coefficient d'entraînement de Fresnel, l'hypothèse de Riemann sur la forme de l'espace selon son contenu, la mécanique statistique, et les quanta de Planck qui, tout jeunes encore, étaient déjà tombés dans l'oubli en 1904 : une féérie étrange, merveilleuse, se terminant comme un conte : "la foi ferme et indéfectible dans l'harmonie de notre monde est sans cesse consolidée par les difficultés croissantes qui s'opposent à notre faculté de compréhension".*[4]

Mais, ce que les contemporains de Planck pouvaient difficilement apercevoir c'était que, s'il était vrai (comme ils le croyaient tous) que la physique était parvenue à son zénith, ce sont précisément les immenses progrès qu'elle avait accomplis au XIXè siècle qui portaient en eux la crise. Et la raison en est qu'il n'y avait pas *un* zénith : il y en avait deux ! Parce

---

[2] N'oublions pas que Planck lui-même a longtemps eu des doutes au sujet des théories atomiques et que ses relations avec Boltzmann s'étaient assombries parce qu'il avait soutenu l'objection de Zermelo (Max Planck, *Autobiographie scientifique,* Albin-Michel, Paris 1960).

[3] Ici encore, même Planck ne se fiait pas encore tout à fait à la théorie de Lorentz et essayait de s'en passer (Max Planck, *Initiations à la physique,* Flammarion, Paris, 1941).

[4] Albert Einstein, Michele Besso, Correspondance 1903-1955, Hermann, Paris, 1972 (p. 340).

qu'il y avait deux visions antagonistes du monde qui parvenaient à un haut degré d'achèvement : la vision corpusculaire et la vision ondulatoire et c'est à Planck que revient le mérite historique d'avoir déclenché entre elles l'inévitable conflit.

En effet, malgré les dernières résistances qui empêchaient Boltzmann de croire en sa victoire pourtant si proche et que, tragiquement, il ne devait pas connaître, les théories atomiques étaient bel et bien en train de gagner : aboutissement logique de deux siècles de développement de la mécanique et donc de l'image du monde que nous a léguée Newton, celle d'un espace vide peuplé de *corpuscules matériels en mouvement.* Si les arguments décisifs en faveur de l'existence des atomes n'étaient pas encore connus (notamment les arguments que devaient fournir Einstein, puis Jean Perrin, à partir du mouvement brownien), en revanche la découverte de l'électron et de la radioactivité prouvaient déjà l'existence, dans la nature, de tels corpuscules matériels.

La *vision corpusculaire* pouvait donc légitimement prétendre à un rôle dominant en physique. Mais elle avait une grande rivale, la théorie des ondes et du champ, dont les succès n'étaient pas moins grands. En effet la théorie des ondes avait, grâce à Fresnel, évincé de l'optique les théories corpusculaires, après quoi Faraday et Maxwell avaient su exprimer en termes de *champs continus* tout l'électromagnétisme et enfin, Maxwell était parvenu à sa géniale synthèse de l'électromagnétisme et de l'optique : le tableau des victoires de l'image du monde par champs continus n'était pas moins enviable que celui de l'image du monde par points matériels discontinus et le conflit devait naître de l'*interaction* entre ces deux mondes. En effet, ces deux conceptions de la physique ont existé et ont été rivales de tous temps (depuis l'Antiquité) mais pendant longtemps cette rivalité est restée purement philosophique, puis elle s'est réduite (avec Huygens, Newton, Young et Fresnel) au domaine de l'optique et elles ont alors, successivement, pris le pas l'une sur l'autre : en somme, on peut dire que les physiciens se "débarrassaient" de l'une des deux conceptions au profit de l'autre qui occupait alors tout le terrain.

Avec l'électromagnétisme de Maxwell et surtout avec la théorie des électrons de Lorentz, tout a changé : il n'y avait plus d'échappatoire possible ! Désormais, c'étaient des *points matériels* (les électrons) qui étaient devenus les centres d'émission et d'absorption des *champs continus.* On ne pouvait plus ignorer l'un des deux mondes au profit de l'autre : tôt ou tard, leur interaction était appelée à devenir le problème central de la physique et le génie de Max Planck fut de l'avoir compris, en consacrant tant d'efforts au problème du rayonnement thermique d'équilibre. Mais en même temps qu'il résolvait ce problème, il ouvrait la boîte de Pandore où se trouvaient enfermés depuis deux mille ans les vieux démons de la physique, le fameux antagonisme entre le monde atomique discontinu de Démocrite et l'univers plein et continu (pour nous celui des ondes et des champs), cher à Anaxagore. Et au fond de la boîte, Planck devait découvrir, avec l'espérance qui parait-il s'y trouve toujours et qu'exprimait Besso dans sa lettre à Einstein, cette constante, cette minuscule constante h autour de laquelle allait se cristalliser l'une des plus grandes énigmes de l'histoire des sciences.

2. La constante de Planck comme unité d'invariant adiabatique

Même si Planck ne l'a pas formulé ainsi, c'est ainsi que la constante h apparaît dans ses travaux et ce lien avec l'invariance adiabatique est une explication simple du fait que h a les dimensions d'une action.

On peut le voir, par exemple, à partir de la démonstration de la loi de Wien donnée par Léon Brillouin [5]. En effet, nous savons d'après Kirchhoff que, pour étudier le rayonnement thermique d'équilibre, nous disposons du choix des corps matériels présents dans l'enceinte qui contient le rayonnement et on peut donc choisir le plus simple qui est un ensemble d'oscillateurs linéaires de fréquence ν et d'énergies u_ν. Alors, d'après Planck, la densité d'énergie ρ_ν des rayonnements de fréquences comprises dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ sera (dans le vide) :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} u_\nu. \tag{1}$$

Mais nous savons, d'après Boltzmann, que si l'on modifie un système hamiltonien quelconque de période τ. On lui fournit une quantité de chaleur :

$$dQ = \frac{d\mathcal{A}}{\tau} = 2\frac{d(\tau \overline{E}_{cin})}{\tau} \tag{2}$$

[5] Léon Brillouin, *Les statistiques quantiques,* Presses Universitaires de France, Paris, 1930.

où $\mathcal{A} = \oint pdq$ est l'intégrale d'action de Maupertuis prise sur une période et $\overline{E}_{cin}$ la moyenne de l'énergie cinétique sur cette même période. Or, pour un oscillateur linéaire :

$$2\overline{E}_{cin} = u_\nu. \tag{3}$$

Donc :

$$dQ = \frac{d(\tau u_\nu)}{\tau} = \nu d(\frac{u_\nu}{\nu}). \tag{4}$$

Mais, d'après le principe de Carnot-Clausius, dQ/T est la différentielle (exacte) de l'entropie :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\nu}{T} d(\frac{u_\nu}{\nu}). \tag{5}$$

Donc, nous devons avoir la relation fonctionnelle :

$$\frac{u_\nu}{\nu} = F(\frac{\nu}{T}), \tag{6}$$

ce qui n'est autre que la loi de Wien. Si l'on introduit cette expression dans (5), on voit que l'*entropie* d'un rayonnement de fréquence ν ne dépendra de l'énergie qu'*à travers le rapport* u_ν/ν [6]. Or ceci ne peut avoir un sens physique que si ce rapport est un *invariant adiabatique* ; et c'est précisément ce que nous garantit la formule de Boltzmann (2) puisqu'elle signifie que si l'on agit sur l'oscillateur infiniment lentement et sans flux de chaleur, on aura $dQ = 0$ et donc $\tau\overline{E}_{cin}$ (c.à.d. u_ν/ν) restera constant au cours de la transformation.

Donc quand Planck quantifie l'oscillateur :

$$u_\nu = nh\nu \quad (n \ : \ \text{entier} \tag{7}$$

[6] C'est bien ce que trouve Planck : *The theory of heat radiation*, Dover, New-York, 1959 (§94). La formule qu'il trouve s'écrit, avec nos notations :

$$S = \frac{\nu^2}{c^3} F_1 \left(\frac{c^3 \rho(\nu, T)}{\nu^3} \right).$$

on peut dire (et ce changement n'est pas simplement formel !) qu'il écrit :

$$\frac{u_\nu}{\nu} = nh. \tag{8}$$

Autrement dit, il quantifie les valeurs d'un invariant adiabatique et il se conforme par avance au principe adiabatique d'Ehrenfest selon lequel on n'a pas le droit de quantifier n'importe quelle constante du mouvement, mais seulement une constante telle qu'une transformation infiniment lente ne puisse pas provoquer de transitions quantiques. On sait comment, dans la première théorie des quanta, la formule (8) a été généralisée à n'importe quelle intégrale d'action :

$$J = \oint p dq = nh, \tag{9}$$

tout au moins pour les systèmes non dégénérés (les choses se compliquent un peu en cas de dégénérescence) [7]. Et nous savons que ceci n'est possible qu'en raison du théorème adiabatique qui stipule l'invariance des intégrales d'action J.

On voit donc que la constante h apparait comme l'*unité* en laquelle les intégrales d'action sont mesurées : il s'agit bien, comme le disait Planck, d'un *quantum d'action.* Rappelons que le théorème adiabatique trouve aussi sa place dans la mécanique quantique actuelle et, à vrai dire, le principe adiabatique, auquel est rattachée la constante h, doit être regardé comme l'un des principes fondamentaux de la physique.

Le domaine le plus général auquel s'applique ce principe est sans doute la mécanique statistique, puisqu'il est lié, comme nous l'avons vu, à l'entropie des états d'équilibre. Or, ce point là a été lui aussi aperçu par Planck avec une parfaite sureté de jugement, puisqu'il a quantifié l'oscillateur pour pouvoir *compter des états statistiques* et, pour cela, il a quantifié les *aires* des ellipses représentatives de l'oscillateur dans le plan de phase :

$$u_\nu = \frac{p^2}{2m} + 2\pi^2\nu^2 m q^2 = nh\nu \quad \left(p = m\frac{dq}{dt}\right). \tag{10}$$

[7] Voir par exemple : Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1951, I Band.

Les axes d'une telle ellipse sont égaux à :

$$a = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{nh}{2m\nu}}, \quad b = \sqrt{2m\nu nh}, \tag{11}$$

et l'aire est donc égale à :

$$\pi ab = nh. \tag{12}$$

Mais cette aire, qui est aussi égale à :

$$\oint pdq = \int\int dp\, dq = nh, \tag{13}$$

est, ne l'oublions pas, un cas particulier du *volume d'extension en phase* (il est bien normal, encore une fois que h ait les dimensions d'une action). Mais l'entropie étant fonction de ce volume de phase, ou plutôt, ici, de cette aire, il faut que l'aire en question soit elle aussi invariante adiabatique, ce qui est évident d'après (13) puisqu'elle est égale à l'intégrale d'action. Et ceci légitime le calcul de Planck car la division de l'espace des phases en cellules d'aire élémentaire h est invariante adiabatique. On pourrait de même légitimer dans le cas général la division de l'espace des phases en cellules de volume h^n, mais le problème est plus difficile et ferait intervenir l'*ergodicité* du système.

Malheureusement, si intéressante qu'elle soit, cette interprétation de la constante h fondée sur l'invariance adiabatique des intégrales d'action n'est pas générale parce qu'elle nous limite aux systèmes liés, enfermés dans un certain domaine de phase : en somme, aux *systèmes thermodynamiques.* Dans le cas général d'un système en propagation, le problème se posera différemment, puisque l'*action ne se conserve pas* : elle croît au cours du temps. Mais on pressent que si l'on parvenait à introduire un *élément de périodicité*, le rôle de la constante de Planck reviendrait au premier plan comme dans le cas de l'oscillateur. C'est ce qu'a compris Louis de Broglie.

3. La constante de Planck comme trait d'union entre les ondes et les corpuscules

Rappelons d'abord que dans son mémoire de 1905 sur l'émission et la transformation de la lumière, Einstein [8] a remarqué que la loi du rayonnement de Wien :

$$\rho_W = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{14}$$

qui est la limite asymptotique de la loi de Planck pour $\nu/T \to \infty$, fournit la même répartition statistique de l'énergie, dans un volume donné, qu'un gaz parfait qui serait constitué de "molécules" d'énergie :

$$E = h\nu. \tag{15}$$

C'est le point de départ de la théorie des *quanta de lumière* (les photons) et on voit que cette relation (15) ne se limite plus à la signification d'une énergie émise par un résonateur, mais désigne maintenant l'énergie transportée par des corpuscules de lumière dans lesquels se concentre toute l'énergie lumineuse au lieu qu'elle soit répartie continûment dans l'onde comme on le pensait jusque là. La constante h apparait déjà ici comme un *lien* qui réunit une *grandeur corpusculaire* (l'énergie E concentrée en un point) à une *grandeur ondulatoire* (la fréquence ν).

Beaucoup plus tard, lorsque Einstein aura découvert l'idée de l'émission stimulée de la lumière, il pourra substituer des atomes quantifiés de Bohr aux oscillateurs classiques de Lorentz dans la démonstration de la loi de Planck du rayonnement noir. Et en outre il pourra montrer la compatibilité entre la distribution de Maxwell des vitesses moléculaires d'un gaz et les fluctuations que subissent ces vitesses de la part du rayonnement thermique d'équilibre qui règne dans l'enceinte à l'intérieur de laquelle le gaz est enfermé [9]. C'est alors qu'Einstein montrera que la distribution des vitesses ne se maintient que si l'on admet que chaque photon d'énergie $E = h\nu$ transporte une impulsion $\vec{p}$, telle que l'on ait :

$$p = \frac{h\nu}{c} \text{ ou plutôt : } \vec{p} = h\vec{k} \text{ avec } \mid \vec{k} \mid = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}. \tag{16}$$

[8] A. Einstein, Ann. Phys., *17*, p. 132, 1905. Signalons au passage que le referee des Annalen pour la physique théorique était Max Planck qui, en fait, n'approuvait pas les conceptions d'Einstein sur les quanta de lumière mais qui laissa publier les articles d'Einstein sans même poser une question. Sans doute parce qu'il était Max Planck. D'autres referees pourraient retenir la leçon (voir à ce sujet C. Lanczos *loc. cit.*).

[9] A. Einstein, Mitt. Phys. Ges. (Zürich) no. 18, p. 47, 1916 et Phys. Zeitschrift, *18*, p. 121, 1917.

On voit, ici encore, que h apparait comme la constante de proportionnalité entre l'*impulsion* $\vec{p}$ (grandeur corpusculaire) et le *vecteur d'onde* $\vec{k}$ (grandeur ondulatoire).

Ce sont ces idées que Louis de Broglie devait généraliser à toutes les particules matérielles et mettre à la base de la *mécanique ondulatoire.* Dans ce but, à toute particule de masse propre m_0, il a associé un *élément périodique interne* dont la fréquence ν_0 dans le *système propre* est définie par la relation :

$$m_0 c^2 = h\nu_0. \tag{17}$$

Or cette relation n'est pas covariante relativiste parce que la *fréquence cyclique* interne ν_0 subira le retard des horloges si bien que, dans un autre référentiel, nous aurons au lieu de m_0 et ν_0 :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \nu_c = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{18}$$

et l'égalité (17) ne se maintiendra pas. *C'est de là que vient l'idée de l'onde associée à la particule*, parce que si nous considérons maintenant, dans le système propre de la particule, une onde stationnaire de même fréquence ν_0 que le mouvement interne :

$$e^{2i\pi\nu_0 t_0}, \tag{19}$$

cette onde s'écrira dans un autre système :

$$e^{2i\pi\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t-\frac{vx}{c^2})} \tag{20}$$

Elle apparaîtra donc comme une onde progressive de vitesse de phase V et de fréquence ν, telles que :

$$Vv = c^2, \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{21}$$

et on voit que la nouvelle fréquence ν se transforme *comme la masse*, si bien que la relation (17) est maintenant vraie dans tous les systèmes :

$$mc^2 = h\nu, \tag{22}$$

mais à condition de l'écrire avec *la fréquence* ν *de l'onde* et non plus avec la fréquence ν_c du mouvement interne postulée au départ.

En prenant la vitesse de phase [10] V dans (21) et la fréquence ν dans (22), on trouve aussitôt la fameuse *longueur d'onde* de de Broglie :

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{mv}, \tag{23}$$

où m est la *masse relativiste* donnée en (18).

Mais considérons maintenant *l'impulsion d'univers* p_α de la particule :

$$p_i = mv_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad p_4 = \frac{E}{c} = mc, \tag{24}$$

et le *vecteur d'onde d'univers* k_α de l'onde de de Broglie associée :

$$k_i = \frac{1}{\lambda} n_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad k_4 = \frac{\nu}{c}, \tag{25}$$

où les n_i sont les composantes du vecteur d'onde unité.

On voit que, d'après (22) et (23), on a la relation invariante suivante qui généralise à un corpuscule matériel quelconque les relations (15) et (16) données par Einstein pour le photon :

$$p_\alpha = hk_\alpha. \tag{26}$$

Ici encore, la constante de Planck est la constante universelle qui relie entre elles les propriétés mécaniques de la particule aux propriétés de l'onde associée. C'est cette formule (26) qui a permis à de Broglie d'annoncer que, tout au moins à l'approximation de l'optique géométrique, il est équivalent d'appliquer le *principe de moindre action* au mouvement de la particule ou le *principe de Fermat* à la propagation de l'onde de phase : les *trajectoires* de la mécanique coïncident alors avec les *rayons* de l'onde [11].

---

[10] D'après (21) la vitesse de phase est plus grande que la vitesse de la lumière mais on montre que la vitesse de groupe associée (qui est la vitesse de l'énergie) coïncide avec la vitesse v de la particule.

[11] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta*, Thèse, Paris, 1924. Voir aussi l'article de G. Lochak dans *The Wave-Particle Dualism*, edited by S. Diner, D. Fargue, G. Lochak & F. Selleri, Reidel, Dordrecht, 1984.

On peut néanmoins se demander ce qu'est devenue la fréquence cyclique interne ν_c introduite au début de la théorie par les formules (17) et (18) et qui semble ensuite avoir été abandonnée. En réalité, de Broglie lui a toujours attaché une grande importance et nous allons en dire quelques mots parce que ses idées font jouer un nouveau rôle, à vrai dire très étrange, à la constante de Planck.

Tout d'abord, plaçons nous dans le référentiel d'un observateur galiléen qui voit passer la particule en un point x, à un instant t, avec une vitesse v et calculons la phase ϕ_c du mouvement cyclique interne. Grâce à (17) et (18) et en supposant que $x = 0$ pour $t = 0$, nous aurons :

$$\phi_c = 2\pi\nu_c t = 2\pi\frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{x}{v}. \tag{27}$$

Maintenant, calculons au *même* point et au *même* instant la phase ϕ de l'onde (en nous rappelant que nous avons encore $x = vt$). D'après (17) et (20) nous aurons, en comparant avec (27) :

$$\phi = 2\pi\frac{m_0c^2}{h}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{x}{v}-\frac{vx}{c^2}\right) = 2\pi\frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{x}{v} = \phi_c. \tag{28}$$

Nous obtenons ce que de Broglie appelle la *loi de l'accord des phases* : "Pour tout observateur galiléen, la phase du mouvement cyclique interne de la particule coïncide à chaque instant avec la phase de l'onde au point où se trouve la particule". En somme, la différence entre les fréquences des deux mouvements périodiques est compensée par la différence entre leurs vitesses de propagation. Rappelons que c'est en appliquant cette loi à une trajectoire *fermée* de la particule que de Broglie a retrouvé les fréquences spectrales de Bohr pour l'hydrogène : le principe est donc heuristique.

Mais Louis de Broglie a tenté de développer une autre théorie qui utilise la fréquence cyclique ν_c, qui fait jouer un nouveau rôle très curieux à la constante h et qui nous ramène à d'autres travaux de Planck : ceux sur la dynamique relativiste. En appliquant le principe de relativité à la thermodynamique, Planck a été conduit à la conclusion que l'entropie est un invariant relativiste et que la température et les transferts de chaleur se transforment suivant la même loi suivante [12] :

$$T = T_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad dQ = dQ_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{29}$$

Ces résultats ont été confirmés par Einstein et v. Laue (qui les a exposés dans son fameux traité de relativité) et par la thèse de v. Mosengeil sur la thermodynamique du rayonnement [13]. Les formules (2) ayant été, plus tard, mises en doute, Louis de Broglie a fourni en leur faveur une série d'arguments physiques parce qu'il leur attachait une grande importance [14]. En effet, comparant les formules (18), (21) et (29), il a été frappé par l'analogie suivante : *de même que la fréquence de l'onde ν se transforme comme une masse* (ce qui fut à l'origine de la mécanique ondulatoire), *la fréquence cyclique ν_c se transforme comme une température.* Ceci lui suggéra que la formule suivante, qui est invariante relativiste, pourrait peut-être avoir un sens :

$$h\nu_c = kT, \tag{30}$$

où h et k sont respectivement les constantes de Planck et de Boltzmann [15]. La température ainsi définie est très élevée : environ $6.10^9 K$ dans le système propre d'un électron.

Se tournant alors vers la formule de Boltzmann (2), qui n'est pas relativiste, de Broglie remarqua que si on essayait de l'écrire dans le système propre de la particule et pour le mouvement périodique interne défini par (17), on aurait :

$$dQ_0 = \nu_0 \; d\mathcal{A}_0. \tag{31}$$

Mais alors, d'après (18) et (29), une formule telle que la suivante, écrite dans n'importe quel système, deviendrait une définition invariante

[12] M. Planck, Sitzungber. preuß. Akad. Wiss. XXIX, 1907.
[13] A. Einstein, Jahrb. der Radioaktivität u. Elektronik, *4*, p. 411-462, 1907. M.v. Laue, *La relativité,* Gauthier-Villars, Paris, 1922. K.v. Mosengeil, Ann. Phys., *22*, p. 867, 1907.
[14] On peut trouver les idées de de Broglie et toutes les références dans l'ouvrage collectif : *Louis de Broglie, sa conception du monde physique,* Gauthier-Villars, Paris, 1973.
[15] Comme on le sait, en réalité c'est Planck qui a défini la constante k qui porte néanmoins et à juste titre le nom de Boltzmann.

d'un transfert de chaleur :

$$dQ = \nu_c \, d\mathcal{A}_0. \tag{32}$$

Et si l'on rapproche (32) de la différentielle de l'entropie $dS = dQ/T$ et de la formule (30), on est amené à définir une *entropie* pour la particule grâce à la formule :

$$hS = k\mathcal{A}_0, \tag{33}$$

où $\mathcal{A}_0$ est invariant, puisqu'il est défini dans le système propre, ce qui rend bien S invariant.

Mais on peut poser la question : pourquoi une température associée à la particule et qu'est-ce qui peut bien lui transférer de la chaleur ? Cet article n'est pas le lieu pour développer les idées de de Broglie et de ses élèves à ce sujet (on les trouvera dans l'ouvrage collectif déjà cité) mais disons seulement que l'hypothèse centrale est que ces échanges de chaleur sont supposés s'effectuer avec une sorte d'éther, un *thermostat caché*, qu'ils sont responsables de *variations de la masse propre* de la particule et que ces variations peuvent être calculées à partir de la fonction d'onde de la particule. Le but ultime est de rapprocher le second principe de la thermodynamique du principe de moindre action et du principe de Fermat, lesquels avaient déjà étés réunis par la mécanique ondulatoire [16]. Mais la théorie reste encore inachevée.

On pourra nous objecter que, ce faisant, bien loin d'expliquer la constante de Planck, de Broglie et ses élèves n'ont encore fait qu'ajouter de nouvelles questions déjà posées. A quoi je répondrai qu'une théorie ne se comprend jamais de l'intérieur mais seulement de l'extérieur et que la fuite en avant est la démarche naturelle de la science.

4. La constante de Planck comme quantum de moment cinétique

Il est bien connu qu'en mécanique quantique le quantum de moment cinétique est égal à :

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}.$$

[16]Le rapprochement entre le second principe et le principe de moindre action est un vieux rêve de la physique qui a été développé notamment par Helmoltz et par Boltzmann : la formule (2) se rattache à ce problème. On pourra lire à ce sujet : Louis de Broglie, *La Thermodynamique de la particule isolée,* Gauthier-Villars, Paris, 1964.

A titre d'illustration, rappelons quelques opérateurs de moment cinétique dont les projections sur un axe sont toujours des multiples de $\hbar/2$:

1) Le moment orbital :

$$\vec{L} = -i\hbar\ \vec{r} \times \vec{\nabla}. \tag{34}$$

2) L'opérateur de spin de Pauli :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\ \vec{s}, \quad \vec{s} = s_1, s_2, s_3 \text{ (matrices de Pauli)}. \tag{35}$$

3) Le moment cinétique total de Dirac :

$$\vec{M} = -i\hbar\ \vec{r} \times \vec{\nabla}\ + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad , \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

4) Le moment cinétique d'une toupie quantique, que nous rapportons ici, contrairement à la coutume, non pas aux axes mobiles liés à la toupie mais aux *axes fixes* liés au laboratoire (on comprendra tout de suite pourquoi) :

$$\begin{aligned} R^+ &= R_1 + iR_2 = \hbar\ e^{i\phi}\left[i\ \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\chi}\right] \\ R^- &= R_1 - iR_2 = \hbar\ e^{-i\phi}\left[i\cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\chi}\right] \\ R_3 &= -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{37}$$

Les angles d'Euler utilisés sont :

ϕ = précession, θ = nutation, χ = rotation propre.

5) Le moment orbital d'un *monopôle magnétique* [17] dans un champ

[17] Les formules (38) ne sont pas les formules habituelles parce qu'elles ne comportent pas de constantes additives dans Λ_3. Ceci est obtenu grâce à un meilleur choix de la jauge électromagnétique, Voir à ce sujet : G. Lochak, Int. J. of Th. Phys., *24*, p. 1019, 1985.

électrique coulombien :

$$\begin{aligned}
\Lambda^{+} &= \Lambda_1 + i\Lambda_2 = \hbar\ e^{i\phi}\left[i\cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{D}{\sin\theta}\right] \\
\Lambda^{-} &= \Lambda_1 - \Lambda_2 = \hbar\ e^{-i\phi}\left[i\cot\theta\ \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{D}{\sin\theta}\right] \\
\Lambda_3 &= -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Ces formules sont écrites, comme (37), dans le système du laboratoire. Les angles ϕ et θ sont les mêmes que dans (37) et D est la *constante de Dirac* :

$$D = \frac{eg}{\hbar c}, \tag{39}$$

où e est la charge électrique source du champ coulombien (nous pouvons prendre la charge élémentaire) et g est la *charge magnétique* du monopôle. L'analogie entre (37) et (38) est évidente : on voit même que, si $Z(\theta,\phi)$ est un état propre de Λ_3 et $\overrightarrow{\Lambda}^2$, donc une *fonction angulaire du monopôle*, nous pouvons réintroduire la rotation propre χ en posant :

$$\mathcal{D}(\theta,\phi,\chi) = e^{iD\chi}Z(\theta,\phi). \tag{40}$$

Alors, si $Z(\theta,\phi)$ est un état propre de (38), $\mathcal{D}(\theta,\phi,\chi)$ sera un état propre de (37), c.à.d. que $\mathcal{D}(\theta,\phi,\chi)$ sera une *fonction d'onde de la toupie quantique*. Or, sous la *seule* condition que $\mathcal{D}(\theta,\phi,\chi)$ soit *continue sur le groupe de rotations*, on trouve que les fonctions $\mathcal{D}$ sont les éléments de matrices des représentations irréductibles du groupe (voir G. Lochak loc. cit) :

$$\mathcal{D}_j^{m'm} = e^{i(m'_\chi + m_\chi)} d_j^{m',m}(\cos\theta) \tag{41}$$

où les $d_j^{m',m}(\cos\theta)$ sont des polynômes de Jacobi et :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n}{2} \cdots, m', m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j. \tag{42}$$

De plus, *toutes* les valeurs quantiques sont permises.

Alors, d'après (40), (41) et (42), nous aurons :

$$D = m', \text{ donc } \frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \tag{43}$$

c.à.d. la fameuse condition de Dirac [18]. Mais nous devons plutôt l'écrire :

$$\frac{eg}{c} = m'\hbar, \text{ avec } m' = 0, \frac{1}{2}, 1 \cdots, \frac{n}{2} \tag{44}$$

car $m'\hbar$ est la *projection* du moment cinétique de la toupie sur son *axe de symétrie.* Dans le cas présent, cet axe de symétrie est défini par la droite qui passe par le monopôle et par le centre coulombien et on voit donc que la relation (43) de Dirac signifie simplement que le système monopôle-charge électrique possède la symétrie d'une toupie [19] et que le moment cinétique du système doit être quantifié ; or sa projection sur l'axe se trouve être égale à eg/c.

On voit donc que dans la relation de Dirac, la constante de Planck, ou plutôt $\hbar/2$, joue le rôle d'un *quantum de moment cinétique.*

5. Sur un lien possible entre le quantum d'action et le quantum de moment cinétique

Il n'est pas possible que ce soit un simple fait du hasard si l'action et le moment cinétique ont la même dimension et sont reliés de façon simple à la même constante universelle h. Une première façon simple d'apercevoir un rapport possible est d'écrire l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi \tag{45}$$

dans la représentation hydrodynamique de Madelung en posant [20] :

$$\psi = a\, e^{\frac{i}{\hbar}S}. \tag{46}$$

[18] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc., *A133*, p. 60, 1931.

[19] L'angle de rotation propre χ est absent de l'équation du monopôle parce que le monopôle est ponctuel, si bien que la toupie possède un moment, mais sa dimension spatiale est nulle dans une direction normale à l'axe.

[20] Ne pas confondre ce S avec celui du §3 !

On trouve le système bien connu :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m}\ \frac{\nabla^2 a}{a} = 0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial (a^2)}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{a^2}{m}\ \vec{\nabla} S\right) = 0. \tag{48}$$

On sait que ces équations peuvent être interprétées comme étant celles d'un fluide de densité a^2, dont l'impulsion locale est définie par la *phase de l'onde* :

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{\nabla} S. \tag{49}$$

On voit en outre que pour les mouvements qui sont tels que le dernier terme de (47) soit négligeable (ou, comme on dit abusivement : "quand $\hbar \to 0$"), (47) se réduit à l'équation de Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} S)^2 + V = 0. \tag{50}$$

Mais alors S prend la signification de l'intégrale d'action :

$$S = \oint L\ dt, \tag{51}$$

où L est la fonction de Lagrange et (49) devient alors la formule classique de Jacobi pour l'impulsion $\vec{p}$. On voit donc que l'intégrale d'action de la dynamique classique peut être regardée comme la phase d'une onde, donc comme un *angle*, ce qui nous rattache déjà un peu à une rotation. Mais le rapprochement peut se resserrer encore si on part de l'équation de Dirac et non plus de celle de Schrödinger. En effet, on peut écrire le spineur de Dirac sous la forme :

$$\psi = \sqrt{D}\ e^{i\sigma_4 \frac{A}{2}}\ e^{\alpha_1 \frac{\gamma_1}{2}}\ e^{\alpha_2 \frac{\gamma_2}{2}}\ e^{\alpha_3 \frac{\gamma_3}{2}}\ e^{i\sigma_3 \frac{\phi}{2}}\ e^{i\sigma_1 \frac{\theta}{2}}\ e^{i\sigma_3 \frac{\chi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

où D est une densité invariante, A un certain angle pseudo-scalaire, $\gamma_i = \operatorname{argth} \frac{v_i}{c}$ et ϕ, θ, χ les angles d'Euler ; les α_i et σ_i sont les matrices de Dirac.

On montre alors que l'*impulsion*, analogue à l'impulsion de Madelung (49) s'écrit ici [21] [22] :

$$p_\mu = \frac{-i\hbar}{2D^2}[(\psi^+\alpha_4\psi)(\psi^+[\partial_\mu]\alpha_4\psi) + (\psi^+\alpha_5\psi)(\psi^+[\partial_\mu]\alpha_5\psi)] \tag{53}$$

et, d'après (52), p_μ prend la forme :

$$p_\mu = \frac{\hbar}{2}\,\partial_\mu\chi + \frac{\hbar}{2}\sum_\alpha \xi_\alpha\partial_\mu\eta_\alpha. \tag{54}$$

Dans cette formule, qui est analogue à une décomposition en paramètres de Clebsch en hydrodynamique, le point essentiel est que les grandeurs ξ_α et η_α *ne dépendent pas de l'angle* χ *de rotation propre.* Celui-ci joue donc un rôle privilégié : il définit la partie irrotationnelle de l'impulsion. On montre alors qu'à l'approximation non relativiste de Pauli, la partie spatiale de p_μ se réduit à :

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{2}(\vec{\nabla}\chi + \cos\theta\ \vec{\nabla}\phi) \tag{55}$$

et si, en outre, on impose au spin de s'aligner sur une direction fixe (ici Oz), on obtient l'approximation de Schrödinger :

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\nabla}\chi. \tag{56}$$

Mais alors ceci doit se comparer à (49) et nous aurons donc :

$$S = \frac{\hbar}{2}\chi. \tag{57}$$

Autrement dit, *l'angle de rotation propre* χ *devient la phase de Schrödinger* qui, elle même, tend vers l'*intégrale d'action* à l'approximation de l'optique géométrique.

On voit donc que cette intégrale d'action de la mécanique classique est réellement reliée à un angle de rotation, ce qui explique que la même

[21] G. Jakobi & G. Lochak, Comptes rendus, *243*, p. 234 et p. 357, 1956.
[22] T. Takabayasi, Prog. of Theor. Phys. (Japan) *4*, 1957.

constante universelle h puisse être à la fois un quantum d'action et un quantum de moment cinétique.

Mais ceci montre davantage, puisqu'on voit que la clé du problème est le *spin*. Sans lui on ne comprendrait rien, ce qui incline à croire que h est *d'abord* un quantum de moment cinétique et *ensuite*, par une voie détournée, un quantum d'action. Et comment ne pas se demander également si ce *mouvement interne* qu'imaginait de Broglie et qui lui a fourni une fréquence à partir de laquelle il a découvert l'onde, ne serait pas le spin, tout simplement ? Ceci reste une question ouverte.

Nous allons maintenant examiner rapidement quelques problèmes plus particuliers qui mettront à nouveau en évidence l'importance de la constante de Planck et sa signification en tant que quantum de moment cinétique.

6. La constante de Planck et les états à énergie négative

On sait combien les esprits ont été troublés par l'existence de solutions à énergie négative dans la mécanique quantique relativiste, alors que de tels états sont facilement éliminés de la dynamique relativiste classique. Et on sait comment cette difficulté a finalement tourné au triomphe pour l'équation de Dirac avec la découverte des antiparticules.

Mais pourquoi ces énergies négatives s'imposent-elles en mécanique quantique et non en relativité classique ? On répond généralement que c'est parce que des sauts quantiques sont possibles entre des états à énergie positive et des états à énergie négative, alors qu'ils n'existent pas en mécanique classique. Mais nous préférerons ici un autre argument qui, dans le fond lui est équivalent, et qui consiste à remarquer que l'ensemble des états à énergies positives d'un électron libre ne constitue pas un système complet et que : *si l'on cherche à représenter un paquet d'ondes de dimensions inférieures à la longueur d'onde de Compton* :

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}, \tag{58}$$

l'intégrale de Fourier fera nécessairement intervenir des états à énergie négative [23]. On sait que ce fait est à l'origine du Zitterbewegung de Schrödinger et du paradoxe de Klein [24]. Mais pourquoi en est-il ainsi ?

[23]Voir par exemple : Louis de Broglie, *La théorie des particules de spin* 1/2 *(Electrons de Dirac),* Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[24]L. de Broglie (loc. cit.) et A. Sommerfeld (loc. cit.).

Il est du plus haut intérêt de signaler que la réponse se trouve déjà dans la relativité restreinte et met uniquement en jeu la *rotation propre.*

En effet, dans de très remarquables travaux sur la notion de centre de gravité en relativité, Möller a montré [25] qu'*un système classique qui a une densité d'énergie positive, un moment cinétique interne donné* J *et une masse propre donnée* m_0 *a toujours des dimensions finies qui dans le référentiel du centre de gravité sont donnés par* :

$$r \geq \frac{J}{m_0 c}. \tag{59}$$

Si le système est plus petit, la densité d'énergie ρ *ne peut pas être partout positive dans tous les référentiels.*

Nous ne pouvons pas reproduire ici toute la théorie, mais pour une meilleure compréhension précisons seulement que le système matériel est défini par un tenseur symétrique conservatif $T_{\mu\nu}$; son impulsion-énergie totale est définie dans chaque référentiel par l'intégrale spatiale de $T_{\mu 4}$; le référentiel du centre de gravité est celui dans lequel la partie spatiale de l'impulsion totale s'annule ; le moment cinétique interne est calculé à partir de $T_{\mu\nu}$ dans *ce* référentiel.

On ne peut qu'être impressionné par l'analogie (presque l'identité) entre l'énoncé de Möller et celui que nous venons de citer à propos de l'équation de Dirac. En outre, le *rayon* de Möller (59) se réduit évidemment à la *longueur d'onde de Compton* si $J = \hbar$.

Si on se place au seul point de vue de l'apparition des énergies négatives, il semble donc que, ce que la mécanique quantique introduit de nouveau, à travers la constante de Planck, par rapport à la dynamique du *point* matériel relativiste, c'est la rotation propre, le *spin.* Et la disparition des énergies négatives quand $\hbar \to 0$ est due à la fois au fait que la particule (le paquet d'ondes) peut devenir de plus en plus ponctuel ($\lambda_c \to 0$) et au fait que le moment cinétique interne tend vers zéro. Tout ceci va donc encore une fois dans le sens d'une interprétation de la constante de Planck comme quantum de moment cinétique.

[25] C. Möller, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A no. 5, 1949 et Annales de l'Institut Henri Poincaré, *11*, no. 5, 1949.

7. La constante de Planck et la stabilité de l'atome

Considérons d'abord l'expression des niveaux d'énergie des états liés d'un atome hydrogénoïde de Dirac de charge nucléaire Ze :

$$E_{nj} = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{[n - (j+\frac{1}{2}) + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2 Z^2}]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{60}$$

où $n = 1, 2, ...$ est le nombre quantique principal, $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}...$ est le nombre quantique du moment total et α est la constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,037...} \tag{61}$$

Réécrivons (60) sous la forme :

$$E_{nj} = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{(Ze^2/c)^2}{\left[\hbar k + \sqrt{j(j+1)\hbar^2 - (Ze^2/c^2)^2 + \hbar^2/4}\right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{62}$$

où $k = n - (j + 1/2) = 0, 1, 2...$ est le nombre radial. On voit ainsi figurer, sous la racine, le carré du moment cinétique total (36) :

$$M^2 = j(j+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\,\hbar^2, \frac{15}{4}\,\hbar^2, ... \text{ pour } j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ... \tag{63}$$

et on voit que la racine en question deviendrait imaginaire pour :

$$\frac{Ze^2}{c} > \sqrt{j(j+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{4}} = \sqrt{M^2 + \frac{\hbar^2}{4}}. \tag{64}$$

En particulier, pour $j = 1/2$, ce serait le cas pour $Z > 137$. Ce qui veut dire que l'état fondamental serait instable pour de tels atomes et, Z croissant, les seuls états permis seraient des états de plus en plus excités (donc en fait de plus en plus instables) avec des moments cinétiques de plus en plus élevés. On voit donc que, même en oubliant le problème de la stabilité du noyau, la simple stabilité du cortège électronique limiterait déjà le nombre d'éléments possibles du tableau de Mendeleïev.

Supposons maintenant que la charge élémentaire e et la vitesse de la lumière c nous soient données et imaginons un monde où la constante de Planck serait *plus petite*. On voit tout de suite que la constante α augmenterait et que la *limite supérieure de Z diminuerait : il suffirait que la constante de Planck soit 137 fois plus petite pour obtenir un monde sans atomes* (ou tout au moins avec des atomes tous très excités et instables).

On voit qu'ici encore, la constante h n'intervient qu'en tant que *quantum de moment cinétique*. On pourrait objecter qu'elle n'apparaît ainsi qu'en raison du petit artifice qui nous a fait passer de la formule (60) à la formule (62), mais il n'en est rien. En effet, la propriété mise en évidence sur ces formules quantiques apparaît déjà en dynamique relativiste classique. Considérons en effet l'expression de l'énergie pour le même problème de Kepler, en relativité :

$$W = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m_0^2 c^2} - \frac{Ze^2}{r}, \tag{65}$$

où p_r est l'impulsion radiale et M le moment cinétique (constant) ; on voit tout de suite que si :

$$\frac{Ze^2}{c} > M, \tag{66}$$

l'énergie W pourra rester finie quand $r \to 0$, pourvu que le moment radial $p_r \to \infty$ pour compenser l'infini de $Mc - Ze^2/r$. Autrement dit, la particule peut alors *tomber* sur le noyau et le système est instable. Or on voit que, d'après (63), la condition (66) est exactement celle (*mutatis mutandis*) qui rendait imaginaire la racine dans (62) et c'est bien le *moment cinétique* qui intervient, comme dans (62).

D'ailleurs, on voit encore mieux ce résultat sur la vieille théorie de Sommerfeld (loc. cit.) de l'atome relativiste car le "festonnage" de l'orbite (la précession des ellipses) provient de ce que l'orbite s'écrit :

$$\frac{1}{r} = C + A\cos\gamma\phi, \tag{67}$$

où ϕ est l'angle polaire et A et C des constantes. Or si on écrit γ avec nos notations :

$$\gamma = \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{Mc})^2}\ ; \tag{68}$$

on voit aussitôt que, tout comme les racines qui figurent dans (61) et (62), celle-ci devient imaginaire si on a la relation (66), analogue de la relation (64) fournie par l'équation de Dirac. C'est donc bien le moment cinétique qui joue le rôle important et la constante de Planck joue bien ici le rôle d'un quantum élémentaire de moment cinétique.

Nous pouvons maintenant nous poser, en regard de cela, l'intéressante question suivante : pourrait-il exister des “atomes magnétiques” qui seraient les analogues magnétiques des “atomes électriques” que nous connaissons et qui seraient constitués d'un monopôle lourd autour duquel graviteraient des monopôles légers ?

La réponse est : *non*, en raison de la relation de Dirac (43). En effet, cette relation signifie que les charges magnétiques sont toutes multiples d'une charge élémentaire g_0 qui est telle que :

$$g = ng_0, \quad g_0 = \frac{e}{2\alpha} = 68,5\ e \quad (\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}). \tag{69}$$

On voit donc que la charge magnétique élémentaire est $68,5$ fois plus grande que la charge électrique élémentaire et la constante de structure fine α_m du monopôle sera égale à :

$$\alpha_m = \frac{g^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} \times \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4\alpha} = 34,25. \tag{70}$$

Si un tel atome devait obéir à la mécanique quantique relativiste, l'équation de Dirac serait la même que pour l'électron (car les monopôles s'attirent entre eux suivant la loi de Coulomb) et on voit que la condition (64) s'écrirait ici, d'après (69) :

$$\frac{Zg^2}{c} = \frac{Ze^2}{c} \times 4,7.10^3 > \sqrt{M^2 + \frac{\hbar^2}{4}}. \tag{71}$$

Cette relation s'écrit approximativement

$$\alpha_m Z = 34,25\ Z > j \tag{72}$$

et signifie donc que de tels atomes ne pourraient exister que dans des *états d'excitation* très élevés et donc très instables. Exprimé autrement, cela signifie que les atomes magnétiques constitueraient un monde dans lequel la constante de Planck serait égale à :

$$h_m = 4\alpha^2 h = 2,13.10^{-4}\ h, \tag{73}$$

c.à.d. près de 5000 fois plus petite que celle du monde où nous vivons.

On peut donc affirmer qu'un "atome magnétique" est pour le moins très improbable, sinon impossible. Mais, bien entendu, *cela n'interdit aucunement aux monopôles magnétiques d'exister* ! Ce résultat signifie seulement que s'ils existent, ils ne constitueront pas d'atomes, spontanément, et cela montre bien que, contrairement à une idée un peu simpliste qu'on pourrait soutenir, les monopôles magnétiques ne sont aucunement une sorte de complément simple de l'électron qui viendrait "symétriser" les deux groupes des équations de Maxwell.

Pour terminer, nous allons encore rappeler la façon dont la constante de Planck introduit (à travers la constante de structure fine) une hiérarchie entre les trois longueurs universelles liées à l'électron :

$$r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \quad \text{(rayon classique de l'électron de Lorentz)}$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \text{(longueur d'onde de Compton)}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2} \quad \text{(rayon de la première orbite de Bohr).}$$

On vérifie tout de suite à l'aide de la formule (61) que, α désignant toujours la constante de structure fine :

$$r_0 = \alpha\lambda_c, \quad \lambda_c = \alpha a_0 \text{ et donc } r_0 = \alpha^2 a_0. \tag{74}$$

Autrement dit, l'électron est $1/\alpha \sim 20.000$ fois plus petit que le plus petit atome. C'est parce que la constante de Planck est suffisamment *grande* (et donc α suffisamment petit) que nous pouvons à bon droit affirmer, comme on le fait souvent, que la nature est avant tout faite de "vide". C'est pour la même raison que, la longueur d'onde de Compton étant 137 fois plus petite que l'atome le plus petit, la probabilité d'apparition des paires est *petite*, ce qui a pour conséquence que l'effet Lamb n'est qu'une *petite correction* et que l'atome est *stable.*

Au contraire, tout changerait si la constante de Planck était beaucoup plus petite (par exemple de l'ordre de h_m) : l'électron serait plus grand que l'atome et celui-ci ne serait plus "vide" ; mais surtout, l'atome serait plus petit que la longueur d'onde de Compton, ce qui ferait de la création des paires un effet dominant et l'atome serait instable, ainsi que nous l'avons déjà dit, mais pour une autre raison.