Remarque sur le principe d'Heisenberg

G. Noguez

Université Pierre et Marie Curie
Tour 55 - 2ème étage 4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. L'application du principe d'Heisenberg aux transformations Galiléennes permet de distinguer trois groupes commutatifs de transformations réciproques (ie : $T_u^{-1} = T_{-u}$) : les transformations de Galilée, les transformations duales (ie : $x' = x$, $t' = t - x/v$) et les transformations de Lorentz de même direction. Ces trois groupes sont conjugués et, pour une même direction, les commutateurs associés sont tous proportionnels à une même transformation de conjugaison qui "compense" les mouvements rectilignes et uniformes. Les trois groupes de transformations correspondent à trois façons complémentaires de mesurer l'ensemble "Espace-Temps". Le principe de Heisenberg peut alors s'expliquer autrement.

NOTATIONS

Transformation de Galilée

$$G_u = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \end{array}$$

Transformation duale

$$N_v = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \end{array}$$

Transformation de Lorentz

$$L_u = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma/v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \end{array}$$

$$u \cdot v = c^2 \quad , \quad \gamma = (1 - u/v)^{-1/2}$$

Commutation

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \end{array}$$

Identité

$$I = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \end{array}$$

INTRODUCTION

L'observation simultanée ... du principe d'Heisenberg et du principe de Relativité incite à penser qu'il devrait exister deux groupes distincts de repères pour l'observation d'un phénomène caractérisé par deux grandeurs conjuguées, c'est-à-dire deux grandeurs non observables par le même observateur.

Les repères d'un groupe seraient équivalents pour l'observation d'une des deux grandeurs et ceux de l'autre groupe seraient équivalents pour l'observation de la deuxième grandeur. La correspondance qui associe un repère d'un groupe à un repère de l'autre groupe devrait elle aussi vérifier le principe de Relativité qui est postulé dans le raisonnement.

Il resterait à connaître, si de tels groupes distincts de repères existent, leur nombre et leurs relations, sachant qu'ils se rapportent tous au même phénomène spatio-temporel observé.

1 Groupes commutatifs réciproques (G), (L) et (N)

1.1 Pour des mouvements rectilignes et uniformes de même direction (OX), chacune des transformations (G_u), (L_u) ou (N_v) engendre un *groupe* (G), (L) ou (N) (cf. les NOTATIONS).

- La loi de composition *interne* est le produit des transformations ; la loi associée de composition des mouvements est :
- pour (G) : $(u + u')$,
- pour (L) : $(u + u')/(1 + uu'/c^2)$,
- pour (N) : $(1/v + 1/v')$.
- L'élément neutre est la transformation Identité (I).
- Chaque transformation (T_u) possède une transformation inverse notée (T_u^{-1}).

1.2 Les trois groupes (G), (L) et (N) sont *commutatifs.*

$$\forall G_u, G'_u \in (G) \ : \ G_u \cdot G_{u'} - G_{u'} \cdot G_u = 0$$

$$\forall L_u, L'_u \in (L) \ : \ L_u \cdot L_{u'} - L_{u'} \cdot L_u = 0$$

$$\forall N_v, N'_v \in (N) \ : \ N_{v'} \cdot N_v - N_{v'} \cdot N_v = 0$$

1.3 Les trois groupes (G), (L) et (N) sont *réciproques.*

Nous définissons la réciprocité par la propriété suivante :

$$\forall T_u \in (E) \ : \ T_u^{-1} = T_{-u} \quad ; \quad E \in (G, N, L)$$

2 Propriété commune de non commutativité des groupes (G), (L) et (N)

Les trois groupes (G), (L) et (N) ne sont pas commutatifs entre eux, cependant les commutateurs sont toujours proportionnels à une même transformation (C).

$$G_{u'} \cdot L_u - L_u \cdot G_{u'} = -\gamma \cdot \frac{uu'}{c^2} \cdot C$$

$$L_u \cdot N_{v'} - N_{v'} \cdot L_u = -\gamma \cdot \frac{u}{v'} \cdot C$$

$$N_v \cdot G_{u'} - G_{u'} \cdot N_v = \frac{u'}{v} \cdot C$$

La transformation (C) est telle que :

Si $(dx, dy, dz, dt) = C(x, y, z, t)$

alors : $dx/dt = -x/t$ et $dy = dz = 0$.

Autrement dit, si le point de départ (x, y, z, t) est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (w) de même direction (OX), alors à tout écart d'une grandeur (pex : dt, resp : dx) correspond un écart de l'autre grandeur (pex : $dx = +w.dt$, resp : $dt = +dx/w$).

Cet écart est "compensé" par la transformation (C) qui introduit l'écart inverse (pex : $dx = -w.dt$, resp : $dt = -dx/w$). Les différences deviennent alors indiscernables.

3 Propriété de réciprocité commune des groupes (G), (L) et (N)

La transformation (P_{12}) qui permet d'associer les transformés $(P1)$ et $(P2)$ d'un même point (P) par deux transformations (T_{u1}) et (T_{u2}) de deux groupes différents n'est pas réciproque car les transformations (T_{u1}) et (T_{u2}) ne commutent pas :

$$P_{12} = T_{u2} \cdot T_{u1}^{-1} = T_{u2} \cdot T_{-u1}$$

$$P_{12}^{-1} = T_{u1} \cdot T_{u2}^{-1} = T_{u1} \cdot T_{-u2} \neq T_{-u2} \cdot T_{u1}$$

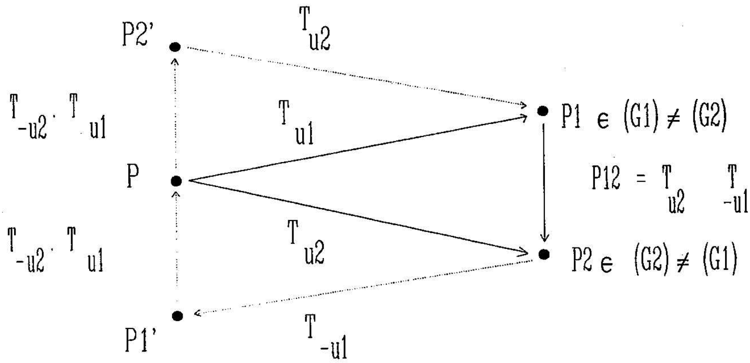

Figure 1.

Cependant, le principe de réciprocité est bien vérifié pour chacun des transformés ($P1$) et ($P2$) par rapport au point commun (P).

Le principe de relativité est bien vérifié ... au détriment du principe de retour inverse ($P1 \neq P1'$ et $P2 \neq P2'$).

TERMINOLOGIE

Il est important, pour la suite, de spécifier les notions de repère et de mesure (ie : d'observation) évoquées dans l'introduction.

La mesure est prise dans son sens mathématique (1). Ainsi, un *espace mesuré* est un triplet (X, B, m) où

- X est l'ensemble à mesurer,
- B (la *référence*) est une tribu de parties de X (une tribu est un anneau de Boole qui contient les réunions finies ET dénombrables de parties de l'ensemble de base, ici X),
- m (la *mesure* est une application de (B) dans l'ensemble des valeurs de mesure (ie: dans l'"échelle de mesure" R^+) ; cette application est "dénombrablement additive".

Par définition, un élément (O) de la référence (B) peut être qualifié d'*origine.* Un *repère* se définit alors comme une référence munie d'une origine. Il en découle deux types de changement de repère :

- les *changements d'origine*, pour une référence donnée ;
- les *changements de référence.*

Il résulte de la définition de la mesure que, si l'on postule qu'un ensemble (X) peut être mesuré, on postule implicitement qu'une tribu (B) peut être définie sur l'ensemble (X). De plus, la définition d'une tribu (B) ne peut logiquement s'appuyer sur une autre mesure définie sur cette même tribu (B).

D'un point de vue physique, une méthode de définition d'une référence peut être proposée pour un phénomène caractérisé par plusieurs grandeurs $(p_1 \ldots p_i \ldots p_n)$. Si, par rapport à une grandeur (p_i), le phénomène possède une quantité dénombrable de *discontinuités* (le terme reste à définir), alors une partition dénombrable peut être fondée sur ces discontinuités. Une valeur de mesure des autres grandeurs $(p_j, j \neq i)$ peut être affectée à chacune des parties de la partition. Aucune valeur de mesure de la grandeur (p_i) n'est, par contre, affectée aux différentes parties qui peuvent alors être toutes qualifiées d'*unitaires* par rapport à la grandeur (p_i).

Un changement d'origine permet d'établir une relation entre deux valeurs de mesure d'une grandeur $(p_j, j \neq i)$. Les variations $q_i(p_j)$ [1]. de la grandeur (p_j) peuvent alors être mesurées par rapport à la grandeur de référence (p_i). De façon plus précise : par rapport au dénombrement des discontinuités de (p_i). Une mesure des variations secondes $q_i^n(p_j)$ des grandeurs $(p_j, j \neq i)$ peut être définie de la même façon.

La méthode qui est décrite postule que les grandeurs $(p_j, j \neq i)$ et les variations $q_i(p_j)$ sont mesurables (par rapport à la référence définie à l'aide de la grandeur (p_i)). Ces grandeurs peuvent être mesurées dans n'importe quel ordre : d'abord les grandeurs (p_j) puis leur variation $q_i(p_j)$; ou bien l'inverse. Cette possibilité découle de la définition de la mesure :

– 1) la mesure d'une union de parties peut être déduite de la mesure des parties :

$$m(\bigcup_{k \in N} (P_k)) = \sum_{k \in N} (m(P_k)) \ ;$$

– 2) réciproquement, la mesure d'une partie peut être déduite de la mesure des unions :

$$m(P_1) = m(\bigcup_k (P_k)) - m(\bigcup_{k \neq 1} (P_k)).$$

[1] Les variations (q_i) de la variable (p_i) n'ont ici aucun sens.

Les opérateurs de mesure associés doivent donc être *commutatifs*, lorsqu'un changement d'origine est défini entre les différentes parties de la référence.

La notion de repère qui est évoquée ici est distincte de celle de repère lié au centre de gravité. Elle se rapproche plus des changements de repère implicites effectués dans le calcul des potentiels retardés (ces changements de repère correspondent aux transformations duales).

La décomposition d'un signal *périodique* en une série de Fourier devrait pouvoir être considérée comme une illustration de cette méthode de définition d'une référence de mesure.

CONCLUSION

Les trois groupes de transformations (G), (L) et (N) correspondent à trois manières de mesurer l'Espace-Temps caractérisé par deux grandeurs indépendantes : l'Espace et le Temps.

1) Transformations de Galilée (G_u)

Ces transformations correspondent à des *changements d'origine* sur une *référence temporelle* $R_G(t)$.

Les opérateurs de position (x) et de variation par rapport au temps $(d\cdot/dt)$ commutent, pourvu que $dx/dt = 0$ pour l'origine et que $dx/dt = u_j$ pour la partie (P_j) :

$$(x', \frac{d\cdot}{dt'}) = (x', \frac{d\cdot}{dt}) = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt} + u_j.$$

2) Transformations duales (N_v)

Ces transformations correspondent à des changements d'origine sur une *référence directionnelle d'espace* $R_N(x)$.

Les opérateurs de date (t) et de variation par rapport à la direction $(d\cdot/dx)$ commutent, pourvu que $dt/dx = 0$ pour l'origine et que $dt/dx = 1/v_j$ pour la partie (P_j) :

$$(t', \frac{d\cdot}{dx'}) = (t', \frac{d\cdot}{dx}) = -\frac{dt'}{dx} = -\frac{dt}{dx} + \frac{1}{v_j}.$$

3) Transformations de Lorentz (L_u)

Ces transformations correspondent à des changements d'origine sur une *référence double* $R_L(x, t)$ temporelle (t) et directionnelle d'espace (x).

Les grandeurs de référence (t) et (x) échappent à la mesure. Par contre, les opérateurs de variation $\partial \cdot /\partial t$ et $\partial \cdot /\partial x$ ont tous les deux à la fois un sens.

La mesure complète de toutes les grandeurs spatio-temporelles d'un phénomène devrait donc avoir recours aux trois références (R_G), (R_L) et (R_N). Deux changements de référence sont alors nécessaires. La correspondance entre les mesures partielles est établie à travers la mesure des variations. La référence (R_L) joue alors un rôle pivot. Ainsi,

– la référence (R_G) permet de mesurer simultanément la position (x) et les variations temporelles ($d \cdot /dt$) ;

– la référence (R_L) permet de mesurer simultanément les variations temporelles ($\partial \cdot /\partial t$) et les variations spatiales ($\partial \cdot /\partial x$) ;

– enfin, la référence (R_N) permet de mesurer simultanément les variations spatiales ($d \cdot /dx$) et la date (t).

Chaque changement de référence entraînerait une incertitude de mesure caractérisée par la propriété de non commutativité décrite précédemment. La quantification de cette incertitude est *inhérente* à la définition de la mesure. La mesure a été définie comme *dénombrablement* additive. Dans ce cas, une quantification est inéluctable.

Références

[1] A. Revuz *Intégration et Mesure* in Encyclopedia Universalis, vol. 8, pp. 1072-1076.

Manuscrit reçu le 26 avril 1987, modifié le 4 septembre 1987