

Une formulation microscopique du second principe de la thermodynamique : information et irréversibilité

M. COURBAGE

Laboratoire de Probabilités

4, place Jussieu, Tour 56

75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ : D'après la dynamique classique ou la mécanique quantique, les états des systèmes physiques obéissent à des lois déterministes symétriques par rapport au temps. D'un autre côté, l'irréversibilité temporelle des processus physiques est non seulement une propriété générale des systèmes macroscopiques mais caractérise aussi de nombreux systèmes quantiques dissipatifs. Les évolutions irréversibles sont généralement décrites par des processus stochastiques. Nous tentons d'exposer ici différentes approches du problème de l'irréversibilité et, en particulier, une nouvelle approche, proposée par Misra, Prigogine et l'auteur, fondée sur les récents développements de la théorie des systèmes dynamiques instables.

1. Introduction.

Les récents progrès des recherches sur les processus irréversibles en physique et en chimie ont permis d'élargir la compréhension de nombreux phénomènes liés à l'apparition de l'ordre et des structures, au changement de structures, à la transition des comportements périodiques de la matière vers le chaos etc. [1], [2], [3]. Dans cette note, il ne s'agira pas de présenter un compte rendu de ces progrès mais plutôt du lien qui peut exister entre ces phénomènes irréversibles et les lois de la dynamique classique. Ces phénomènes, qui interviennent dans la plupart des processus physiques sont essentiellement des processus d'uniformisation (comme la conduction de la chaleur, la diffusion ou la viscosité ...) où un système macroscopique tend vers un état d'équilibre. Au niveau microscopique, on peut citer la tendance de nombreuses particules élémentaires à la désintégration.

Aujourd'hui, une théorie mécanique et statistique générale de ces processus irréversibles fait encore défaut et peu de résultats concrets ont été obtenus depuis les travaux de Maxwell et Boltzmann. Boltzmann, tout comme Gibbs, pensait que les systèmes mécaniques pour lesquels on peut parler d'approche irréversible vers l'équilibre, devraient avoir certaines propriétés d'ergodicité. Aujourd'hui grâce aux progrès des études des systèmes dynamiques, on pense que c'est l'instabilité du mouvement dynamique qui rend nécessaire une description statistique irréversible. Une tentative dans cette direction a été esquissée dans les travaux de Misra, Prigogine, de l'auteur et d'autres, ces dernières années [4] – [8].

Commençons par un résumé de l'évolution des idées sur ces problèmes depuis Boltzmann. Il s'agira de présenter les idées générales évitant autant que possible les techniques (pour plus de détails, on lira l'article fondamental des Ehrenfest [9] ainsi que les écrits de Kac et d'autres [10] – [17]).

2. L'évolution des idées depuis Boltzmann.

Boltzmann voulait démontrer que la distribution des vitesses de Maxwell était l'unique distribution décrivant l'état d'équilibre en montrant qu'elle est la distribution vers laquelle doit tendre toute distribution initiale non maxwellienne. De ce point de vue on peut dire que Boltzmann fut le premier à envisager l'équilibre sous l'angle de l'évolution dans le temps des grandeurs observables d'un système de N molécules. L'intuition de Boltzmann l'a conduit à voir dans les collisions l'origine de cette évolution et ceci l'a amené à établir une équation intégral-différentielle pour la fonction des distributions des vitesses d'un gaz de N molécules, $f(r, v, t)$ définie par :

$Nf(r, v, t)d^3rd^3v$ = nombre de molécules dans l'élément d^3r ayant une vitesse se trouvant dans d^3v autour de v .

Cette équation a la forme suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + m\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_r f = J(f, f) \quad (1)$$

où J est une fonctionnelle non linéaire de f , appelée l'intégrale des collisions. A partir de cette équation, il a réussi à montrer que toute solution de (1) vérifie le fameux théorème H :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3vf(r, v, t) \log f(r, v, t) \leq 0 \quad (2)$$

l'égalité étant uniquement possible si f est maxwellienne :

$$f(v) = \text{const.} \exp(-\alpha v^2) \quad (3)$$

Pour Boltzmann, la décroissance de la fonctionnelle $\mathcal{H}$ définie par :

$$\mathcal{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, v, t) \log f(r, v, t) d^3v \quad (4)$$

signifie que le système approche l'équilibre de manière monotone. Il en a conclu que ce théorème fournit une justification mécanique du second principe de la thermodynamique et a interprété $\mathcal{H}$ comme l'entropie du système. Ce résultat de Boltzmann a suscité des objections. En effet, si ce théorème est pris comme une conséquence exacte de la mécanique, il contredirait la réversibilité de cette dernière. Ce fut l'objection de Loschmidt. Celui-ci a imaginé qu'après une décroissance de $\mathcal{H}$ entre t_0 et $t_1 > t_0$, on pourrait, en inversant les vitesses, remonter la trajectoire du système jusqu'à sa position initiale, ce qui impliquerait une croissance de $\mathcal{H}$ dans cette intervalle de temps ¹. On sait que Boltzmann a répondu en développant des arguments probabilistes dans la théorie cinétique qui peuvent être ainsi résumés :

L'état microscopique du système de N molécules est représenté par ses coordonnées et ses impulsions $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = x$ et l'on appelle espace de phase Γ du système l'ensemble des points x correspondant à une énergie constante $E(x) = E$. Boltzmann considère ensuite l'espace de phase μ à 6 dimensions d'une seule molécule, le subdivise en cellules $(w_1, \dots, w_p)$ d'égal volume C , et retient de chaque configuration x les nombres d'occupation (n_i) où $n_i(x)$ est le nombre de molécules de la configuration x se trouvant à l'intérieur de w_i . Evidemment, il y a de nombreuses configurations différentes dans l'espace Γ correspondant à une même distribution (n_i) . Boltzmann a calculé alors le volume occupé par l'ensemble des configurations ayant une même distribution (n_i) . Ce volume, pour un gaz dilué, est égal à :

$$v(n_1, \dots, n_p) = \frac{N!}{n_1! \dots n_p!} C^N \quad (5)$$

¹ Il y a un autre paradoxe auquel Boltzmann a dû faire face par la suite, c'est le paradoxe de récurrence, dû à Zemerlo. Il s'appuie sur le fait que la trajectoire d'un système borné revient indéfiniment vers un voisinage de tout point initial, ce qui impliquerait une quasi-périodicité de l'entropie et contredirait sa monotonie.

Un tel ensemble associé à la distribution (n_i) est aussi appelé un macro-état. D'après Boltzmann un macro-état est d'autant plus probable qu'il occupe un grand volume dans Γ , ce qui l'a conduit à maximiser la permutableté :

$$P = \frac{N!}{n_1! \dots n_p!} \quad (6)$$

sous les conditions $\sum n_i = N$ et $\sum n_i \varepsilon_i = E$ où ε_i est l'énergie d'une molécule dans l'élément w_i . On sait que $\log P$ est maximal lorsque $n_i = \text{cst } e^{-\varepsilon_i}$, ce qui donne à la distribution de Maxwell le sens de la distribution correspondant à plus grand volume dans Γ ². Boltzmann montre en outre que lorsque les volumes des cellules tendent vers zéro alors $\log P$ tend vers la fonctionnelle $\mathcal{H}(f)$. Il en conclut que l'augmentation de cette entropie signifie l'augmentation de la "probabilité" de la distribution ou du macro-état du système. Boltzmann développe alors des arguments pour expliquer le sens *microscopique* de son théorème. Il émet ici l'hypothèse ergodique selon laquelle quelque soit l'état microscopique initial, x_0 , la trajectoire x_t passera par tout point de Γ et le temps de séjour de x_t dans une région A , $\tau(A)$, entre l'instant initial et un instant T , sera pratiquement proportionnel au volume de cette région, plus précisément :

$$\frac{\tau(A)}{T} \longrightarrow \frac{v(A)}{v(\Gamma)} \quad \text{lorsque } T \longrightarrow \infty \quad (7)$$

Ainsi, d'après Boltzmann, puisque le volume correspondant à la distribution d'équilibre est le plus dominant par rapport à celui des autres distributions, le système qui ne se trouve pas dans ce macro-état s'y acheminera et y passera la plus grande partie du temps; s'il quitte cette distribution, ce ne sera que pour une si courte durée qu'un tel écart n'est pratiquement pas observable. Boltzmann n'a donc pas exclu la possibilité d'une décroissance de son entropie de temps à autre, mais a estimé que ce type d'éventualité est très rare et donc très improbable (pour plus de détails voir l'excellent article de M.J. Klein [10]).

Cet argument mêlant la théorie des probabilités à la dynamique a été admis par beaucoup de physiciens, et, comme l'a noté M. Kac

² Par la même occasion, Boltzmann a donné un fondement purement statistique de la distribution de Maxwell ouvrant le chemin à la théorie de Gibbs et il a simultanément comparé $\log P$ avec l'entropie thermodynamique d'un gaz concluant à leur identité.

[11], “bien que l’argument manque presque entièrement de toute rigueur mathématique, il avait une forte aura de plausibilité”.

Gibbs voulait éviter les écueils de la théorie cinétique (fondée sur l’étude des propriétés de la distribution f dans l’espace μ d’un système de N molécules) et les hypothèses de Boltzmann. Il a voulu décrire l’état d’un tel système d’emblée par une distribution statistique dans Γ . Il pensait qu’un tel système dont les variables *macroscopiques* sont données par des valeurs fixées est compatible avec différentes conditions initiales microscopiques x dans Γ . Il représenta la distribution statistique correspondante par un “nuage” de “points” de Γ ou un “ensemble” de copies. Dans un langage plus moderne, un tel ensemble est décrit par une densité de probabilité $\rho_t(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ dont l’évolution est, comme on le montre aisément, donnée par l’équation de Liouville :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = - \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -[H, \rho]_{c.p.} \quad (8)$$

où $c.p.$ réfère au crochet de Poisson du hamiltonien H et de ρ . Après avoir considéré les ensembles stationnaires de l’équilibre, il formule sa conception de l’approche irréversible dans un sens statistique (non cinétique) de la manière suivante :

Soit un système décrit par des variables dynamiques macroscopiques $(y_1, \dots, y_k)$ définies sur Γ (comme les nombres $n_1, \dots, n_k$ de Boltzmann, par exemple), chacune prenant un nombre fini de valeurs. A chaque k -tuple valeurs fixées correspond une région de Γ et toutes ces régions forment une partition de Γ en un nombre fini de cellules $A_1, \dots, A_n$. Soit $V(A_i)$ le volume de la région A_i . Si le système se trouve initialement décrit par une distribution uniforme portée par une cellule :

$$\rho(x) = \begin{cases} \text{const.}, & \text{si } x \in A_k \\ 0, & \text{si } x \notin A_i \quad \forall i \neq k. \end{cases} \quad (9)$$

et si on laisse évoluer un tel ensemble d’après l’équation de Liouville, alors $\rho_t(x)$ n’est pas nécessairement constant sur chaque cellule A_i . On considère sa moyenne sur chaque cellule, $\tilde{\rho}_t$:

$$\tilde{\rho}_t(x) = \rho_i(t) = \frac{1}{v(A_i)} \int_{A_i} \rho_t(y) dv(y) \quad (10)$$

où x est un point quelconque de la cellule A_i . Une telle densité est dite “grossière” (“coarse-grained”). On notera par $P_i(t)$ la probabilité de A_i :

$$P_i(t) = \int_{A_i} \rho_t(y) dv(y) \quad (11)$$

Gibbs donne alors des arguments pour montrer que $\tilde{\rho}_t$ convergera lorsque $t \rightarrow \infty$ vers la densité microcanonique d'équilibre (attribuant une égale probabilité à des volumes égaux). L'argument de Gibbs est fondé sur une hypothèse dite de “mélange” analogue au mélange de fluides différents, que nous exposerons plus loin. Or, cette hypothèse est plus forte que l'hypothèse ergodique et, par conséquent, plus difficile à démontrer lorsqu'il s'agit d'un système à N corps. Par ailleurs, Gibbs définit une nouvelle notion d'entropie pour remplacer le théorème $\mathcal{H}$ de Boltzmann

$$\Sigma_t = \sum_i (\rho_i(t) \log \rho_i(t)) v(A_i) \quad (12)$$

qui, d'après lui, doit au bout d'un temps très long avoir une valeur inférieure à sa valeur initiale. On sait aujourd'hui que Σ_t vérifie l'inégalité :

$$\Sigma_t \leq \Sigma_{t_0} \quad \forall t \geq t_0 \quad (13)$$

mais cela ne signifie pas que Σ_t soit une fonction *décroissante* et nous allons y revenir plus loin.

Ainsi Gibbs donne une nouvelle formulation purement statistique du principe zéro de la thermodynamique qui stipule que tout système qui se trouve initialement hors de l'état d'équilibre tendra vers cet état, de même qu'une nouvelle formulation du second principe. Il est important de noter ici que sans le “coarse-graining” on ne peut parler de théorème $\mathcal{H}$ puisque les solutions de l'équation de Liouville sont à entropie constante pour tout t :

$$\int_{\Gamma} \rho_t(x) \log \rho_t(x) dv(x) = \int_{\Gamma} \rho_0(x) \log \rho_0(x) dv(x)$$

Cette égalité découle de l'invariance de la mesure d'équilibre sous le flot hamiltonien (c'est le flot S_t qui à x_0 associe x_t :

$$x_0 = (q(0), p(0)) \xrightarrow{S_t} x_t = (q(t), p(t))$$

x_t étant la solution des équations de Hamilton. Il est d'ailleurs clair que l'équation de Liouville incorpore la réversibilité de la dynamique si l'on représente $\rho_0(x)$ par un nuage de points de Γ évoluant conformément aux lois hamiltoniennes réversibles indépendamment l'un de l'autre (figure 1) :

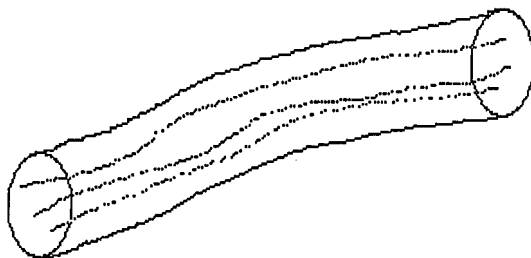


Figure 1.

Telles sont, en résumé, les idées de Boltzmann et de Gibbs.

C'est par un mélange de ces idées que s'est formée ensuite la théorie stochastique des processus irréversibles (voir [18]). D'après cette théorie, si l'on essaie de visualiser la trajectoire du système dans l'espace Γ alors suite aux multiples collisions cette trajectoire apparaîtra comme une ligne brisée et désordonnée et fait alors penser à la trajectoire d'une particule brownienne ou d'une marche aléatoire. Ce sont les Ehrenfest qui, les premiers, ont suggéré qu'en observant seulement des régions dans l'espace Γ on arrive à une analogie avec les processus stochastiques. P. Ehrenfest a ainsi considéré un système de $2N$ particules dans une boîte rectangulaire et a cherché à modéliser le passage des particules de la moitié droite vers la moitié gauche et vice-versa. Appelons N_d et N_g les nombres respectifs des particules dans les moitiés droite et gauche avec : $N_d + N_g = 2N$. Ceci renvoie au modèle de Boltzmann avec deux cellules dans l'espace μ . La variable N_d peut avoir les valeurs $0, 1, \dots, 2N$. A chaque valeur i de N_d correspond tout un ensemble de configurations x de Γ ayant i particules dans la moitié droite ; on appellera cet ensemble A_i et la famille des A_i forme une partition de Γ . Or, le changement des valeurs de N_d au cours du temps est dû à des collisions et ces sauts de valeurs peuvent aussi bien être décrits, d'après Ehrenfest, par une sorte de chaîne de Markov où, à intervalle régulier de temps de l'ordre du temps entre deux collisions, une particule peut soit quitter cette moitié suite à une collision qui s'y produit soit la rejoindre suite à une collision

dans l'autre moitié. Ehrenfest a postulé que les transitions

$$\begin{aligned} N_d(t) &\longrightarrow N_d(t+1) = N_d(t) + 1 \\ N_d(t) &\longrightarrow N_d(t+1) = N_d(t) - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

sont les seules possibles avec des probabilités conditionnelles proportionnelles aux nombres des particules dans chaque moitié, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(N_d(t+1) = m-1 \mid N_d(t) = m) &= \frac{m}{2N} \\ P(N_d(t+1) = m+1 \mid N_d(t) = m) &= \frac{2N-m}{2N} \end{aligned} \quad (15)$$

$N_d(t)$, $t = 1, 2, \dots$, est supposée être une *chaîne de Markov* avec cette probabilité de transition. Ce nouveau point de vue, développé par Ehrenfest afin de clarifier la signification de l'équation de Boltzmann, introduit dans la description un élément stochastique nouveau, non pas via l'hypothèse du chaos moléculaire de Boltzmann, ni les conditions initiales de Gibbs, mais dans les lois d'évolution de la distribution de probabilité de la variable macroscopique $N_d(t)$. Plus exactement, si on note :

$$\tilde{P}_i(t) = \text{Prob}(N_d(t) = i)$$

Alors, cette probabilité est donnée par :

$$\tilde{P}_i(t) = \sum_j \tilde{P}_j(0) P(j \rightarrow i, t) \quad (16)$$

où $P(j \rightarrow i, t)$ est la probabilité de transition de $N_d(0) = j$ vers $N_d(t) = i$ et celle-ci se calcule à partir de (15). Ce modèle a été complètement résolu par Kac [11]. La distribution stationnaire invariante sous la loi d'évolution (16) (analogue à la distribution micro-canonique de Gibbs) est donnée par :

$$Q_i = \frac{(2N)!}{(2N-i)!i!2^{2N}} \quad (17)$$

On démontre alors l'approche vers la distribution d'équilibre (17) de toute distribution initiale $\tilde{P}_i(0)$, c.à.d. :

$$\tilde{P}_i(t) \rightarrow Q_i \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad (18)$$

et un théorème $\mathcal{H}$ en ce sens que :

$$-\mathcal{H}(\{\tilde{P}_i\}) = - \sum_i \tilde{P}_i(t) \log \left(\frac{\tilde{P}_i(t)}{Q_i} \right) \quad (19)$$

est une fonction négative croissante du temps.

Cet excellent modèle d'Ehrenfest qui possède les propriétés (18) de l'approche vers l'équilibre et la croissance de l'entropie résoudrait le problème de l'irréversibilité, conformément aux vues de Gibbs et de Boltzmann, s'il ne manquait un élément important. En effet, le lien entre ce type de description et l'équation de Liouville est un des plus obscurs. Par exemple, si l'on doit donner à ce modèle une interprétation microscopique où la distribution $\tilde{P}_i(t)$ proviendrait d'une contraction d'une solution de l'équation de Liouville (voir (11)), le modèle postulerait alors que les sauts du point de phase x_t aux différents instants $1, 2, \dots$ parmi les cellules A_i est un processus markovien associé à la probabilité de transition (15). Pour déduire donc $\tilde{P}_i(t)$ à partir d'une moyennisation sur une solution $\rho_t(x)$ de l'équation de Liouville, il faudrait démontrer que :

- 1) $P_i(t)$ évolue selon un processus Markovien tel que
- 2) ses probabilités de transition soient données par (15).

On sait qu'Ehrenfest n'a donné aucune preuve dans ce sens et l'on sait que pour obtenir une chaîne de Markov par une telle moyennisation il est nécessaire d'imposer à la dynamique d'importantes restrictions (voir appendice). Depuis, les physiciens ont décrit la mécanique statistique des processus irréversibles par des processus stochastiques ([14],[18]). Ces descriptions appelées souvent dans la littérature "l'équation maîtresse" ont été admises comme des approximations de la dynamique, mais il n'existe actuellement pas une théorie générale satisfaisante pour montrer dans quel sens ces approximations sont inéluctables où nécessairement dues aux propriétés intrinsèques de la dynamique. Intuitivement on conçoit qu'un système déterministe puisse d'autant plus fidèlement être représenté par un processus stochastique du genre de la marche aléatoire que les trajectoires dans l'espace de phases Γ sont "chaotiques". Différents auteurs pensent qu'il est nécessaire de fonder la théorie de l'approche vers l'équilibre sur le "chaos" du mouvement dynamique déterministe. Les études récentes des systèmes dynamiques ont

fait des progrès substantiels, mais soyons prudents et notons que beaucoup de ces études concernent, soit des systèmes abstraits soit des exemples géométriques, et qu'en dehors de quelques cas physiques simples l'obtention de résultats semble difficile.

3. Notions nouvelles dans l'étude des systèmes dynamiques

Nous allons présenter brièvement ici quelques notions nouvelles qui aideront à formuler une tentative de lien entre la dynamique et le stochastique. Ces notions (pour plus de détails voir [19] et [20]) ont déjà leurs racines dans les idées de Boltzmann et Gibbs. Commençons par décrire l'idée de "mélange" de Gibbs.

Gibbs a imaginé le mouvement d'un système de N molécules dans Γ en comparant l'effet de ce mouvement sur les éléments de volumes à l'image d'un mélange d'une goutte d'encre dans l'eau ainsi :

Tout domaine A dans l'espace de phase de volume (on dit aussi de mesure) $\mu(A)$ conservera le même volume mais se déformera au cours du temps de manière si étrange qu'il finira par occuper dans tout élément de volume B de Γ une partie proportionnelle à son propre volume dans Γ (figure 2). Ce qu'on peut écrire formellement ainsi : si $S_t A$ désigne ce que devient le volume initial A à l'instant t lorsque chacun de ses points évolue par le flot hamiltonien S_t , alors on a :

$$\frac{\mu(B \cap S_t A)}{\mu(B)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(A)}{\mu(\Gamma)} \quad (20)$$

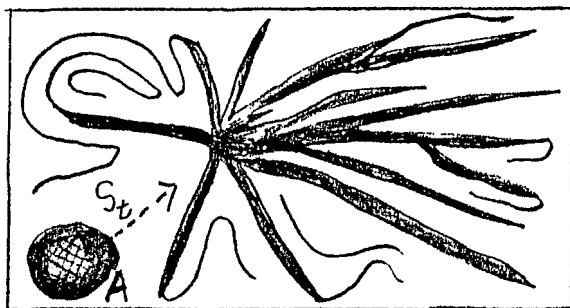


Figure 2.

Cela signifie que $S_t A$ tendra à occuper Γ comme un filament entortillé. D'où, contrairement à la figure 1 les points voisins s'éloignent rapidement avec le temps. Les travaux de Hopf vers 1930 ont montré que ces systèmes vérifiaient l'hypothèse ergodique.

Gibbs pensait que les systèmes hamiltoniens à un grand nombre de degrés de liberté ont cette propriété de mélange. On sait que pour beaucoup de cas cette assertion est fausse, essentiellement après les travaux de Kolmogorov, Arnold et Moser (voir [19]). Il y a actuellement des formes plus faibles suggérant qu'il peut exister des domaines de Γ où le mouvement présente des aspects d'un mélange. Nous allons présenter deux célèbres exemples caricaturaux d'un "mélange".

a) *La transformation du boulanger*

Cet exemple fut inventé par Hopf. On considère un tore de périmètre 1 engendré par un cercle de rayon 1. En l'"ouvrant" on peut le rendre isomorphe à un carré unité Ω où on a identifié les côtés opposés. La transformation consiste à associer à un point $X = (x, y)$ son image $BX = X' = (x', y')$ où :

$$\left. \begin{array}{l} x' = x/2 \\ y' = 2y \end{array} \right\} \quad y \leq 1/2 \quad , \quad \left. \begin{array}{l} x' = y/2 + 1/2 \\ y' = 2y - 1 \end{array} \right\} \quad y \geq 1/2 \quad (21)$$

On peut avoir une meilleure idée de la transformation en représentant l'action de B non pas sur un point mais sur un élément de volume. Pour cela, il faut d'abord écraser le carré dans la direction verticale jusqu'à $1/2$, étendre la largeur dans la direction horizontale jusqu'à 2 et reporter la moitié droite au dessus de la moitié gauche (fig. 3a). On voit aisément sur cet exemple comment un élément de volume si petit soit-il, tend à se fragmenter pour s'étaler dans toute partie de Ω . Cet exemple illustre également une autre notion importante qui est l'instabilité des trajectoires, c'est à dire la divergence exponentielle des trajectoires issues de points voisins. Ainsi deux points voisins situés sur une même droite horizontale verront leur distance doubler après une transformation alors que deux points situés sur une même verticale se rapprocheront exponentiellement. D'où deux points voisins non situés sur une même verticale s'éloigneront indéfiniment.

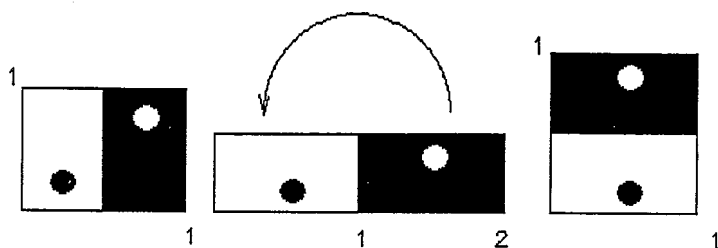


Figure 3a.

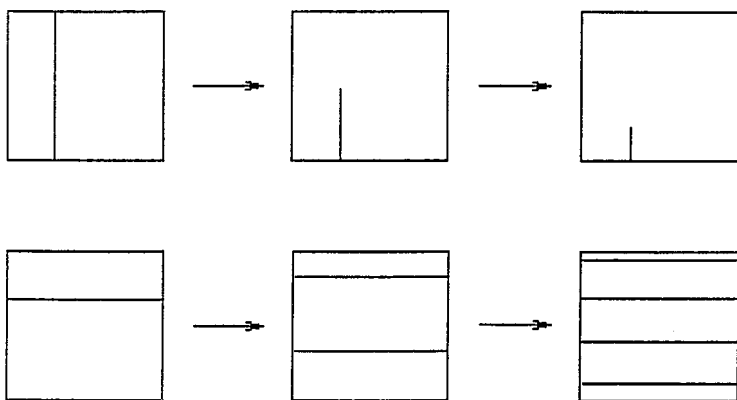


Figure 3b. Evolution d'une fibre contractante et d'une fibre dilatante sous l'effet de la transformation du boulanger.

b) *L'automorphisme linéaire du tore*

C'est une transformation linéaire sur le carré unité Ω qui associe à $X = (x, y) \rightarrow TX = (x + y, x + 2y)$. La matrice de transformation :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

possède deux directions propres invariantes et orthogonales désignées par des vecteurs unitaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ associées aux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Ainsi, deux points X_1 et X_2 tels que $X_1 - X_2 = \epsilon \vec{e}_1$ verront leur distance se dilater :

$$|T^n X_1 - T^n X_2| = |T^n(\vec{X}_1 - \vec{X}_2)| = \lambda_1^n |X_1 - X_2| \quad (22)$$

alors qu'inversement les distances dans la direction de $\vec{e}_2$ vont se contracter dans le même rapport. On a ici aussi le phénomène d'instabilité exponentielle. Notons que pour ce système tout comme pour le boulanger la transformation préserve les aires (figure 4, empruntée à l'ouvrage d'Arnold et Avez [20]).

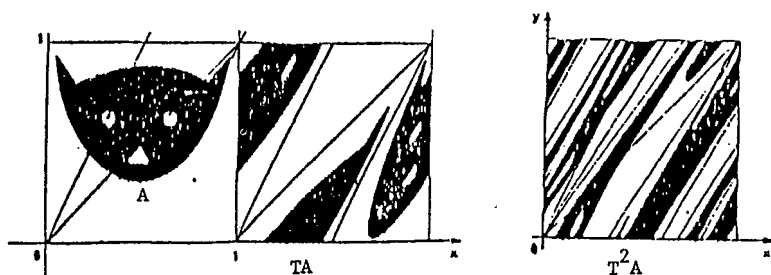


Figure 4.

D'une manière générale, les trajectoires des systèmes dynamiques sont astreintes à rester sur des hypersurfaces régulières. Pour ces systèmes on peut définir les exposants de Liapounov en un point x lorsque l'espace tangent T_x à l'hypersurface a une décomposition suivant des directions indépendantes $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, telles que les accroissements suivant ces directions ont un comportement exponentiel asymptotiquement dans le temps :

$$|S^n(x + \epsilon \vec{e}_i) - S^n(x)| \sim \epsilon e^{n\chi_i(x)}, \quad n \rightarrow \infty \quad (23)$$

Les exposants $\chi_i(x)$ appelés exposants de Liapounov sont définis par :

$$\chi_i(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{n} \log \left(\left| \frac{S^n(x + \epsilon \vec{e}_i) - S^n(x)}{\epsilon} \right| \right) \quad (24)$$

Dans les systèmes dits hyperboliques cette décomposition existe en tout point x , correspond à des exposants non nuls et dépend continûment de x . On peut alors décomposer l'espace des phases en deux familles de

“courbes” dites fibrage stable (tangent aux directions contractantes) et fibrage instable (tangent aux directions dilatantes). Pour la transformation du boulanger, ces exposants existent en tout point et valent $\pm \log 2$, de même, pour l’automorphisme du tore où ils valent $\pm \log \lambda_1$.

Parmi les exemples célèbres de cette structure citons le flot géodésique sur les surfaces à courbure négative et le gaz de Lorentz formé de billes légères heurtant des obstacles fixes.

Notons que cette structure peut être aussi retrouvée dans des systèmes dissipatifs.

Il existe une autre grandeur qui mesure le degré de non-prédictibilité des systèmes dynamiques déterministes et conservatifs c’est l’entropie de Kolmogorov-Sinaï. Cette notion à ne pas confondre avec l’entropie thermodynamique de non-équilibre est plutôt inspirée de la théorie de l’information de Shannon que du modèle des gaz de Boltzmann. Plus précisément, elle caractérise globalement et de manière stationnaire l’impossibilité de prédire avec certitude le résultat d’une observation grossière malgré la connaissance de tous les résultats précédents et ceci quelle que soit la finesse de l’observation. Il se trouve qu’elle est liée à l’instabilité du mouvement puisqu’on montre, sous certaines conditions, que l’entropie de $K - S$ est égale à la somme des exposants positifs de Liapounov. Ce qui signifie que c’est l’instabilité qui crée l’imprédictibilité. Rappelons brièvement quelques éléments de la théorie de l’information.

Dans cette théorie, il s’agit de communiquer des messages formés de N lettres d’un alphabet de k lettres $(a_1, \dots, a_k) = \alpha$. L’information gagnée par la transmission d’un message est mesurée par le logarithme du nombre P des messages possibles. Si l’on admet que dans un long message de N lettres chaque lettre a_i a une fréquence p_i , alors cette lettre se produira dans le message avec une fréquence $N_i = p_i N$. Le nombre P est alors :

$$P = \frac{N!}{N_1! \dots N_k!} \quad (25)$$

Si l’on appelle I l’information gagnée par la transmission d’une lettre :

$$I = \frac{\log P}{N}$$

et si l’on utilise la formule de Stirling on obtient pour I :

$$I(\alpha) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (26)$$

Mais le plus important est de mesurer l'information gagnée lors de la transmission de plusieurs lettres et celle-ci n'est pas simplement la somme des informations par lettre en raison des corrélations entre lettres successives. Aussi on appellera $I(\alpha), I(\alpha_1, \alpha_2) \dots$ les informations par lettre, par couple de lettres, etc. Or, pour calculer $I(\alpha_1, \alpha_2)$, il faut connaître la probabilité $p(\alpha_1, \alpha_2)$ d'avoir successivement dans un message la lettre $\alpha_{1,i}$ puis la lettre $\alpha_{2,j}$:

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i,j} -p(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,j}) \log p(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,j})$$

et l'on peut aisément montrer que

$$I(\alpha_1, \alpha_2) \leq I(\alpha_1) + I(\alpha_2) \quad (27)$$

l'égalité étant possible seulement lorsque les lettres successives sont indépendantes. On sait que ce sont les corrélations entre les lettres successives dans l'Eugène Onéguine de Pouchkine qui ont inspiré à Markov l'idée des processus markoviens. Or la théorie de l'information donne une mesure précise de la redondance d'un langage. En effet on peut d'abord mesurer la corrélation moyenne entre deux lettres successives par l'information conditionnelle $I(\alpha_2 | \alpha_{1,i})$ moyennée sur les valeurs de $\alpha_{1,i}$:

$$I(\alpha_2 | \alpha_1) = - \sum_i p(\alpha_{1,i}) I(\alpha_2 | \alpha_{1,i})$$

$$I(\alpha_2 | \alpha_{1,i}) = - \sum_j p(\alpha_{2,j} | \alpha_{1,i}) \log p(\alpha_{2,j} | \alpha_{1,i}) \quad (28)$$

avec :

$$p(\alpha_{2,j} | \alpha_{1,i}) = \frac{p(\alpha_{2,j}, \alpha_{1,i})}{p(\alpha_{1,i})} \quad (29)$$

et l'on a :

$$I(\alpha_2 | \alpha_1) \leq I(\alpha_2) \quad (30)$$

l'égalité étant possible seulement lorsque α_2 et α_1 sont indépendantes. Comme on s'y attend, la corrélation entre α_2 et α_1 entraîne une baisse de l'information. Shanon a envisagé la corrélation entre une lettre et les n lettres précédentes lorsque n est très grand :

$$i(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha_n | \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad (31)$$

Ici on applique la définition (28) et (29), ce qui suppose la connaissance des probabilités jointes de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ etc. ; et, utilisant un langage probabiliste, on définit par là l'information d'un processus stochastique (α_i) . On voit immédiatement que pour un système déterministe, où une lettre détermine les lettres suivantes, la quantité (31) est nulle. Cette quantité est identifiable avec l'incertitude intrinsèque du message avant sa transmission.

Kolmogorov s'est inspiré de cette théorie pour introduire l'entropie d'un système dynamique déterministe conservatif pour des raisons que nous n'abordons pas ici. Il a utilisé pour cela une méthode observationnelle développée par Birkhof et Hadamard. L'idée essentielle consiste à partitionner l'espace de phase Γ d'une transformation réversible S conservant une mesure μ , et à observer, pour un point initial x , la suite des cellules auxquelles appartiennent $x, Sx, S^2x, \dots, S^{-1}x, S^{-2}x, \dots$ (pour la transformation du boulanger on peut prendre comme partition la moitié droite et la moitié gauche du carré). Il est d'usage de noter une partition de Γ : $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et d'associer à tout x la suite double u_i $i = 0, \pm 1, \dots$ où chaque u_i est le numéro de la cellule de la partition à laquelle appartient $S^i x$. D'où l'application:

$$x \longrightarrow \{u_i(x)\} : S^i x \in P_{u_i(x)} \quad (32)$$

A tout point x est alors associé un message doublement infini et à Sx est associé le message décalé :

$$u_i(Sx) = u_{i+1}(x)$$

Le processus stochastique (u_i) est déterminé par la probabilité μ grâce à (32) :

$$\begin{aligned} P(u_n = i_0, u_{n+1} = i_1, \dots, u_{n+k} = i_k) \\ = \mu(S^{-n}P_{i_0} \cap S^{-(n+1)}P_{i_1} \cap \dots \cap S^{-(n+k)}P_{i_k}) \end{aligned} \quad (33)$$

Cette nouvelle représentation de la transformation S est dite une *dynamique symbolique*. On peut mesurer la prédictibilité d'un système dynamique par la prédictibilité des différentes dynamiques symboliques associées aux différentes familles de partitions. Pour une partition $\mathcal{P}$ donnée l'incertitude d'une observation future si l'ensemble des observations passées sont connues est donnée par :

$$h(\mathcal{P}, S) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n \mid u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (34)$$

définie à l'aide des probabilités (33). L'entropie de $K - S$ est la borne supérieure de $h(\mathcal{P}, S)$ pour toutes les *partitions finies* :

$$h(S) = \sup_{\mathcal{P}} h(\mathcal{P}, S) \quad (35)$$

Nous allons présenter dans le paragraphe suivant une tentative de lien entre les descriptions réversibles déterministes et irréversibles stochastiques pour les systèmes à entropie $K - S$ positive.

4. Le lien entre la dynamique déterministe et la description stochastique

D'après les arguments habituels de l'irréversibilité exposés au paragraphe 3, on abandonne la description fine en terme de $\rho_t(x)$ pour une description "grossière" en terme de $\tilde{\rho}_t(x)$ afin de décrire l'approche statistique irréversible et monotone vers l'équilibre. Cependant une description grossière où un point est remplacé par une région ne peut être arbitraire au gré de l'observateur. Il est nécessaire de justifier le caractère non observable ou non discernable des différents points d'une région. Les systèmes hyperboliques présentent un modèle où la non discernabilité provient du rapprochement exponentiel des différents points d'une même fibre contractante. Aussi, la description grossière provient d'une moyennisation par rapport à cette fibre. La contraction des distances à l'intérieur d'une telle fibre s'opérant seulement dans le futur mais non dans le passé, cette indiscernabilité est donc propagée dans le futur.

On est conduit à remplacer la distribution $\rho_t(x)$ par une distribution moyennisée sur les fibres contractantes. Or, ici il s'agit d'une partition non dénombrable et l'on doit utiliser une généralisation de (11). Comme on l'a vu, le "Coarse-graining" ne conduit pas, en général, à une évolution markovienne fermée. Plus précisément, appelons P l'opération de moyennisation (c'est en effet une projection sur l'espace des distributions constantes sur chaque fibre contractante). En général, $PU_t\rho$ n'évolue pas par un processus markovien, i.e. il n'existe pas un semi-groupe W_t tel que :

$$PU_t\rho = W_t\rho \quad (36)$$

pour $t > 0$. Habituellement, on démontre que dans certaines limites, $PU_t\rho$ converge vers une densité qui elle évolue par un semi-groupe de Markov (voir pour plus de détails [15], [21]).

Ce qui est nouveau dans la moyennisation par rapport aux fibres contractantes c'est que la relation (36) est vérifiée exactement, et l'on a un théorème $\mathcal{H}$ pour la fonctionnelle :

$$\Omega(\tilde{\rho}_t) = \int_{\Gamma} P\rho_t(x) \log P\rho_t(x) d\mu(x) \quad (37)$$

Quant à la signification de l'entropie (37), on peut s'en faire une idée si l'on peut approximer une fibre contractante, comme c'est le cas pour l'exemple du boulanger, au moyen d'une partition finie $\mathcal{P}$ (formée de deux cellules dans le cas du boulanger) de la manière suivante :

On appelle $S^{-1}\mathcal{P}$ la partition formée des cellules $(S^{-1}P_0, \dots, S^{-1}P_n)$ et la superposition de $\mathcal{P}$ et $S^{-1}\mathcal{P}$, notée $\mathcal{P} \vee S^{-1}\mathcal{P}$, la partition formée des éléments $(P_i \cap S^{-1}P_j)$. Rappelons qu'un point appartenant à une même cellule de cette partition, $x \in P_i \cap S^{-1}P_j$ est tel que $x \in P_i$ et $Sx \in P_j$. Il est donc clair que si l'on considère la partition $\mathcal{P} \vee S^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee S^{-n}\mathcal{P}$, alors, une cellule de cette superposition correspond à tous les points x tels que $x \in P_{i_0}, Sx \in P_{i_1}, \dots, S^n x \in P_{i_n}$. En d'autres termes cette cellule est formée des points de Γ qui visitent les mêmes cellules de $\mathcal{P}$ entre les instants 0 et n ; pour $n > 0$. Pour la transformation du boulanger $S^{-n}P_{i_n} \cap \dots \cap S^{-1}P_{i_1} \cap P_{i_0}$ est un rectangle qui tendra vers une fibre contractante lorsque n augmente à l'infini. La formule (37) peut être approximée par une limite de la forme :

$$\Omega(\tilde{\rho}_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{A_n} \nu_t(A_n) \log \frac{\nu_t(A_n)}{\mu(A_n)} \quad (38)$$

où A_n dénote une cellule quelconque de la partition $\mathcal{P} \vee \dots \vee S^{-n}\mathcal{P}$ et $\nu_t(A)$ est donnée par :

$$\nu_t(A) = \int_A \rho_t(x) d\mu(x) \quad (39)$$

c'est à dire la probabilité de trouver le système dans la région A lorsque la distribution de probabilité est ρ_t . Voici, d'après la théorie de l'information, l'interprétation de (38) : On peut comparer les quantités d'information de deux distributions $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ et l'on peut montrer que [22] :

$$\Omega_q(p) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad (40)$$

représente le gain d'information de la distribution p par rapport à q .

On voit alors que l'entropie (42) s'interprète comme la différence entre le contenu d'information de ρ_t et de μ lorsqu'on considère les observations *futures* de la partition $\mathcal{P}$.

Une généralisation importante de cette méthode consiste à mélanger différentes moyennisations. En effet, dans ce qui précède la moyennisation est faite par rapport à un morceau de la fibre contractante. On peut moyenniser par rapport à des morceaux plus petits ou plus grands. Dans les systèmes hyperboliques, une partition en fibres contractantes est raffinée par la transformation dynamique. Pour une telle partition ξ_0 , on appelle ξ_i son image sous S^i , qui devient de plus en plus fine pour $i > 0$, et de moins en moins fine pour $i < 0$. Si on désigne par P_i , $i \in \mathbb{Z}$, la moyennisation par rapport à ξ_i et si on prend une distribution de probabilité sur $\mathbb{Z}$: $\delta_i > 0$ et $\sum_i \delta_i = 1$ alors on peut substituer à ρ_t une nouvelle distribution représentant ce mélange de moyennisations :

$$\tilde{\rho}_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta_i P_i \rho_t \quad (41)$$

On peut montrer pour certaines distributions $\{\delta_i\}$ que là aussi on réalise le programme de l'équation irréversible maîtresse en ce sens que l'opération (notée W_t) qui à $\tilde{\rho}_0$ associe $\tilde{\rho}_t$ est bien régie par une équation maîtresse markovienne avec un théorème $\mathcal{H}$ pour la fonctionnelle :

$$\Omega(\tilde{\rho}_t) = \int (W_t \tilde{\rho}_0)(x) \log(W_t \tilde{\rho}_0)(x) d\mu(x) \quad (42)$$

5. Remarques finales

Uhlenbeck a résumé, dans l'appendice I du livre de Kac [11], par un schéma les différentes descriptions de l'état et de l'évolution d'un gaz :

Etat	Processus mécaniques	Processus irréversibles
Distribution sur Γ	Equation de Liouville -- $\rightarrow$ $\downarrow$	Description stochastique (équation maîtresse) $\downarrow$
Fonctions de distribution réduites	BBGKY -- $\rightarrow$ $\downarrow$	Equation de Boltzmann + généralisation $\downarrow$
Description macroscopique	Equations de conservation -- $\rightarrow$	Equations hydrodynamiques

Selon Uhlenbeck, les flèches correspondent à des dérivations, alors que les pointillés indiquent des relations impliquant chacune une “théorie entière”. La théorie du paragraphe 4 faite uniquement dans l’espace Γ ne concerne que la première flèche en pointillé. Le passage se fait ici en raison de l’existence de fibrages stable et instable et non d’un “coarse-graining” arbitraire. La flèche du temps s’exprime aussi dans le niveau microscopique en acceptant de faire une moyennisation par rapport à la fibre contractante (ce qui conduit à une entropie croissante dans le futur) en excluant une moyennisation sur la fibre dilatante (qui conduit à une entropie croissante vers le passé). Les raisons de ce principe d’exclusion ont été discutées en détails dans [7]. Dans les conditions de l’instabilité du mouvement, selon Prigogine, l’objet fondamental de la description doit changer ; à la description locale en termes de points de l’espace de phase doit être substituée une description non locale en termes d’ensembles possédant une dissymétrie temporelle sous le flot dynamique (voir aussi [7] et [23]). Probablement le modèle abstrait ici présenté contient des ingrédients qui devraient être incorporés dans une théorie plus réaliste des processus irréversibles (un exemple d’un système de particules sur réseau a été étudié par l’auteur [24]).

L’auteur tient à exprimer sa gratitude à tous les membres du groupe de Bruxelles, qui ont été à la genèse des travaux auxquels il a pu contribuer, pour tous les échanges fructueux qu’il a eu avec eux.

APPENDICE

Nous donnons ici les conditions nécessaires et suffisantes pour que la densité grossière évolue par un processus markovien irréversible lorsque

la moyennisation se fait relativement à une partition finie $\mathcal{P}$ de Γ . Ces conditions portent évidemment sur le choix de la partition mais imposent d'importantes restrictions sur le système dynamique. Les résultats ici énoncés sont démontrés dans [25] :

On se donne initialement une distribution “grossière” relativement à la partition $\mathcal{P} = (P_0, \dots, P_n)$:

$$\rho(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_{P_i} \quad (\text{A.1})$$

où φ_{P_i} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble P_i . En intégrant cette formule sur l'élément P_k on obtient :

$$\alpha_k = \frac{1}{\mu_k} \int_{P_k} \rho(x) d\mu(x) = \frac{P_k(0)}{\mu_k} \quad , \quad \mu_k \equiv \mu(P_k) \quad (\text{A.2})$$

où $d\mu$ désigne la mesure microcanonique. Laissons cette densité évoluer par l'équation de Liouville et soit $\rho_t = U_t \rho$ sa valeur à l'instant t . Cette distribution n'étant pas de la forme :

$$\sum_i \alpha_i(t) \varphi_{P_i} \quad (\text{A.3})$$

on lui associe sa forme “grossière” :

$$P\rho_t = \sum_i \left(\frac{1}{\mu_i} \int_{P_i} \rho_t(x) d\mu \right) \varphi_{P_i} \equiv \sum_i \frac{P_i(t)}{\mu_i} \varphi_{P_i} \quad (\text{A.4})$$

On vérifie aisément que $P_i(t)$ est alors donnée par la relation :

$$P_i(t) = \sum_j P_j(0) (W_t)_{ji} \quad (\text{A.5})$$

où :

$$(W_t)_{ji} = \mu(S^{-t} P_i \mid P_j) \quad (\text{A.6})$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Pour que $PU_t \rho$ évolue par un processus de Markov il faut et il suffit que W_t , $t > 0$, soit un semi-groupe de matrices stochastiques et pour cela

il suffit que la partition $\mathcal{P}$ possède la propriété suivante dite de Markov : ($W_1 \equiv W$)

$$\mu(P_{j_0} \cap S^{-1}P_{j_1} \cap \dots \cap S^{-n}P_{j_n}) = \mu_{j_0} W_{j_0,j_1} \dots W_{j_{n-1},j_n}$$

Dans ce cas, la fonctionnelle :

$$\Omega(P\rho_t) = \sum_i \rho_i(t) \log(\rho_i(t)/\mu_i)$$

est une fonctionnelle monotone décroissante dont le minimum nul est atteint par la seule densité microcanonique $\rho_{mc} = 1$. Pour que cette fonctionnelle tende en plus vers zéro pour toute densité initiale grossière, il faut et il suffit que la matrice de la chaîne de Markov W_1 soit apériodique et irréductible. Cette dernière condition implique que le système ait un facteur bernoullien et que son entropie de Kolmogorov soit positive. On voit que l'instabilité est une condition nécessaire. On peut montrer que ce "coarse-graining" s'identifie à la moyennisation relativement au fibrage contractant exposé dans le paragraphe 4, dans ce cas la partition $\mathcal{P}$ est formée de réunion de fibres contractantes.

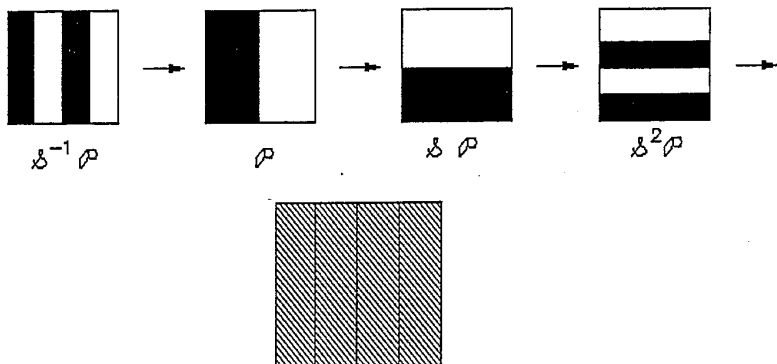


Figure 5. Au-dessus: passé et futur de la partition $\mathcal{P}$ sous l'effet de la transformation du boulanger, en-dessous $\mathcal{P} \vee B^{-1}\mathcal{P}$

Références

- [1] P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, New-York, Wiley, 1971.

- [2] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self Organisation in Non Equilibrium Systems*, New-York, Wiley, 1977.
- [3] Sur la théorie de la turbulence faible on peut lire : a) D. Ruelle, *Les attracteurs étranges*, La Recherche n. 108, Janvier 1980. b) P. Bergé, Y. Pomeau et Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris, 1984. c) J.P. Eckmann et D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617-657, 1985.
- [4] B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, *Physica A*, **98**, 1-26, 1979.
- [5] S. Goldstein, B. Misra and M. Courbage, *J. Stat. Phys.* **25**, 111-126, 1981.
- [6] B. Misra and I. Prigogine, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **69**, 101-110, 1980.
- [7] a) M. Courbage and I. Prigogine, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **80**, 2412, 1983. b) M. Courbage : *Physica A*, **122**, 459-482, 1983.
- [8] S. Martinez and E. Tirapegui, *J. Stat. Phys.* **37**, 173-186, 1984.
- [9] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*, Tr.M. Moravcsik, Ithaca (N.Y.) Cornell University Press, 1959.
- [10] M.J. Klein, *The Development of Boltzmann's Statistical Ideas*, in the Boltzmann Equation : Theory and Applications, Ed. E.G.D. Cohen and W. Thirring suppl. X to *Acta Physica Austriaca*, Springer Verlag 1973.
- [11] M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience Pub. 1959.
- [12] M. Dresden, in *Studies in Statistical Mechanics*, Eds. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck, North-Holland Amsterdam, 1962.
- [13] G.E. Uhlenbeck, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics Vol. II*, North-Holland Amsterdam 1968.
- [14] A.J. Siegert, *Phys. Rev.* **76**, 1708, 1949.
- [15] H. Spohn, *Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics : Markovian Limits*, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 569, 1980.
- [16] H. Grad, *Principles of the Kinetic Theory of Gases*, in, *Handbuch der Physik*, S. Flügge ed. Springer Verlag.
- [17] R. Jancel, *Les fondements de la mécanique statistique classique et quantique*, Gauthier-Villars, Paris 1963.
- [18] S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1, 1943. Cet article a été réédité avec d'autres articles sur le même sujet par N. Wax, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Dover, N.Y. 1954.
- [19] J. Lichtenberg and M.A. Liebermann, *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag 1963 (voir aussi [3]).
- [20] V.I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris 1967.
- [21] R. Jancel, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **8**, 83, 189, 1983.
- [22] M. Courbage, *Entropie thermodynamique et information*, in, *Fractals, dimensions non entières et applications*, Ed. G. Cherbit, Masson 1987.
- [23] I. Prigogine and Yves Elskens, in *Quantum implications*, Eds Hiley and Peat, Routledge and Kegan Paul, London, in press.
- [24] M. Courbage, *On Time Evolution of Non Equilibrium States in Infinite Particle Dynamic Model*, preprint.

- [25] M. Courbage , G. Nicolis : à paraître.
man20 novembre 1987