

## La Théorie Classique du Champ et le décalage de Lamb

R. BOUDET

Université de Provence  
Place V. Hugo 13331 Marseille Cedex 13

RESUME. La première partie de cette étude est consacrée à l'établissement, par une autre méthode que le couplage équation de Maxwell-équation de Dirac (ou de Schrödinger), des formules du décalage de Lamb du modèle semi-classique de Barut. Utilisant les seules propriétés du champ électromagnétique classique, on établit une expression de la self-énergie, moyennée dans le temps, engendrée par un système de charges pour lequel il existe des états stationnaires, et où, lors d'un passage d'un état à un autre, un courant de type sinusoïdal dans le temps est créé. La formule générale obtenue, applicable quelle que soit la nature classique ou quantique du courant, est, si le système est celui formé par un électron de Dirac (ou de Schrödinger) lié à un atome, exactement la formule de Barut (où toutes les intégrales convergent) et par suite, dans l'approximation dipolaire, exactement la formule de Bethe (où toutes les intégrales divergent) qu'on obtient en Théorie Quantique des Champs.

Dans la deuxième partie, on fait une comparaison de l'usage de chacune des théories, classique et quantique du champ, pour le calcul du décalage de Lamb. Les raisons pour lesquelles l'emploi du champ quantifié conduit à des intégrales divergentes sont explicitées. Il est enfin montré que la constante de Planck  $h$  doit être considéré comme une propriété de l'électron et non pas du champ électromagnétique, que ce champ soit classique ou quantifié.

*ABSTRACT* The first part of this paper aims to construct the Lamb shift relativistic and non relativistic formulas by an another way than that used in Quantum Theory of fields and in Semi-Classical models. Only using properties of the classical electromagnetic field, one establishes an expression of the time-averaged self-energy, which is generated by the following general system of charges : this system is

*such that it owns stationary states, and, for each passage from a state to one another, a charge current of a sinusoidal type, is created.*

*The general formula obtained, which may be applied whatever the nature, classical or quantified, of the charge current may be, gives, if the system is a Dirac, or a Schrödinger, electron bound in an atom, exactly the semi-classical Barut formulas (where all the integrals converge), and, in the dipole approximation, exactly the quantum electrodynamical Bethe formula (where all the integrals diverge).*

*In the second part, a comparison between the use of each field theory, classical or quantified, for the Lamb shift calculation is made.*

*The reasons why the Quantum Theory of fields leads to divergent integral are explicited. Finally, one proves that the Planck constant  $h$  is only a property of the electron and not at all the one of the electromagnetic field, whatever the nature, quantified or classical, of the field may be.*

*Nota* - Cet article est suivi d'un deuxième article [1] consacré au calcul du décalage de Lamb par le couplage de l'équation de Maxwell et de Schrödinger. Il sera appelé ici "l'étude II". Les deux articles peuvent être lus indépendamment.

## Introduction

1. Deux conceptions s'opposent quant à la nature des "quanta de lumière" :

- ou bien, ils correspondent à un aspect quantique du champ électromagnétique, les "photons  $\bar{k}$ ". C'est le point de vue adopté par la Théorie de l'Electrodynamique Quantique (EDQ) ou Théorie Quantique des Champs ;
- ou bien, ce champ est considéré comme classique, ils ne sont que la manifestation dans le champ des propriétés classiques de la matière. C'est le point de vue de la Théorie Semi-Classique (TSC).<sup>1</sup>

Le point précis sur lequel les deux théories diffèrent d'une façon apparemment inconciliable concerne la place que doit occuper la constante de Planck  $h$  dans l'équation de Maxwell du champ électromagnétique créé par l'électron :

---

<sup>1</sup> Cette appellation que nous emploierons parce qu'elle est consacrée par l'usage (référence 03.65.Sq des PACS), peut faire penser que la TSC est une théorie d'approximation. Mais justement, à l'inverse de l'EDQ, elle est mathématiquement exacte. Elle est désignée par "Finite QED Theory" dans les articles de Barut.

- en TSC, la constante  $h$  intervient dans le second membre de l'équation, représenté par le courant de charge associé à l'électron quantique. Le potentiel-vecteur du champ doit être considéré comme la solution mathématique exacte, sans autre hypothèse, de l'équation de Maxwell, dès lors que le second membre de cette équation, le "terme source", est supposé connu.
- en EDQ, la constante  $h$  s'introduit non seulement dans le terme source, mais aussi, constitutivement, dans la définition même du potentiel-vecteur, par l'intermédiaire de relations de commutation dans lesquelles le potentiel est transformé en opérateur. On introduit donc  $h$  une deuxième fois, en analogie avec la théorie quantique de l'électron, mais d'une façon distincte. C'est la quantification du champ. Ainsi  $h$  apparaît-il comme une propriété de la matière et *en plus* du champ.

(Nous verrons qu'en fait, que le champ soit classique ou quantifié, la constante  $h$  ne s'introduit dans le champ que par l'intermédiaire du courant de charge, et n'est donc pas une propriété constitutive du champ mais seulement de l'électron).

Le point de vue de l'EDQ a été adopté par l'immense majorité des électrodynamiciens depuis que Bethe par une formule célèbre [2], a pu retrouver et même prévoir, avec une bonne précision, les résultats expérimentaux de Lamb et Retherford [3] sur les décalages de raies de lumière émise par les atomes. Le décalage de Lamb est d'ailleurs considéré aujourd'hui comme le phénomène qui confirme en premier lieu le point de vue de l'EDQ.

La formule de Bethe consiste à calculer le décalage du niveau d'énergie  $E_n$  d'un état donné  $n$  du spectre d'un atome hydrogénoïde, par une somme faisant intervenir tous les autres états  $p$ , chacun des termes de la somme étant représenté par une intégrale où intervient la différence  $E_n - E_p$ . Ce décalage a été attribué par Bethe dès son observation, au rayonnement de l'électron.

Cependant, des tentatives d'explication théorique du décalage de Lamb par la TSC ont été faites, mais par un tout petit nombre de physiciens. Celle de Jaynes et ses collaborateurs [4], il y a une vingtaine d'années, n'a pas conduit directement à des résultats probants. Récemment, Barut et ses collaborateurs [5]-[6] ont élaboré un modèle qui est l'objet des deux présentes études.

2. Puisque dans son calcul du décalage de Lamb, l'EDQ est, en général en très bonne concordance avec les raies observées, cette

théorie pourrait être considérée comme entièrement satisfaisante, si elle ne se trouvait pas confrontée dans ses développements à deux anomalies mathématiques, la première incontournable de par les bases mêmes de la théorie :

- il faut introduire des quantités infinies. C’est le problème de la renormalisation.
- on a à considérer des intégrales qui divergent quand la variable d’intégration tend vers l’infini. C’est le problème des “divergences ultraviolettes”.

Pour éliminer d’une façon pratique ces difficultés, l’EDQ d’une part utilise le fait que la différence de deux grandeurs infinies peut être finie, et d’autre part “coupe” l’intervalle d’intégration à une distance, certes arbitraire, mais raisonnablement choisie. C’est le problème du “cut-off”.

L’accusation a été faite à l’EDQ de pouvoir ainsi retrouver a priori n’importe quel résultat par un choix convenable du “cut-off”, mais elle est injuste. Les choix du cut-off ne sont pas dépourvus de justifications physiques.

3. En contraste, la TSC n’a à subir ni ces anomalies, ni cet arbitraire : aucune quantité infinie n’est à considérer, toutes les intégrales convergent.

Mais conduit-elle à des résultats aussi voisins de l’expérience que ceux de l’EDQ ?

La réponse est affirmative, au moins pour le calcul non relativiste du décalage de Lamb, dans le modèle de Barut.

Ce qu’il y a, de plus, de très remarquable dans la formule de Barut et Van Huele [6], c’est qu’elle fournit à la fois une explication mathématique de la divergence des intégrales de la formule de Bethe, et une justification de fait de la valeur choisie de leur cut-off.

En effet, la formule de Bethe est *exactement* ce qu’on obtient quand, dans la fonction à intégrer de chacun des termes (convergent) de la formule de Barut et Van Huele, on remplace par l’unité le facteur  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}))$  (approximation dipolaire).

L’approximation dipolaire (faite aussi en EDQ mais sur des intégrales qui déjà au départ ne convergent pas) apparaît ainsi comme la seule raison de divergence des intégrales de la formule de Bethe quand on utilise le modèle de Barut.

Par ailleurs, et ce sera un des objets de l’étude II, les deux formules, l’une avec des intégrales calculées exactement jusqu’à l’infini de

la variable d'intégration, l'autre avec des intégrales coupées, doivent conduire, tout au moins pour la valeur du cut-off qui figure dans l'ouvrage de Heitler [7], et pour la partie correspondant au spectre discret, pratiquement aux mêmes résultats numériques, donc en bon accord avec l'expérience.

Mais dans le même temps où il donne une justification pratique des calculs par l'EDQ du décalage de Lamb, le modèle de Barut constitue une infirmation théorique de cette discipline : en effet, soit à considérer deux théories pour représenter d'une façon également satisfaisante le même phénomène. L'une converge, l'autre pas. Une au plus est la bonne. Si ce devait être celle qui diverge, il n'y aurait plus qu'à désespérer de la Physique !

4. La présente étude a pour but de retrouver les formules relativiste et non relativiste du décalage de Lamb, établies par Barut et ses collaborateurs, par *une voie qui n'emprunte plus rien à la mécanique quantique*. Nous nous sommes servis uniquement des propriétés du champ électromagnétique classique pour établir une formule générale (où, bien sûr, toutes les intégrales convergent) applicable quelle que soit la nature classique ou quantique des charges ; quand on y remplace le courant des charges par celui d'un électron de Dirac ou de Schrödinger lié à un atome, cette formule donne *exactement* les formules de Barut, et par suite, dans l'approximation dipolaire, *exactement* la formule de Bethe.

Cette méthode met de plus en évidence le point précis par lequel la constante de Planck est introduite dans le champ quand la source est quantique.

Le point de vue adopté est simple : on a considéré un système de charges, le plus général, pour lequel il existe des états stationnaires, où le courant des charges est indépendant du temps, un niveau d'énergie étant associé à chacun des états, et où, lors d'un passage d'un état à un autre, un courant de type sinusoïdal dans le temps est créé.

L'idée essentielle est de calculer la self-énergie (auto-énergie), c'est-à-dire l'énergie engendrée par l'influence sur les charges du système, du potentiel qu'elles ont elles-mêmes créé, cette énergie étant moyennée dans le temps (ce qui dispense de connaître le temps que durent les passages et leur nombre), et d'en effectuer une classification par état.

Pour cela, après avoir calculé la forme du potentiel d'un courant sinusoïdal, on décompose ce potentiel en la somme de deux termes, l'un donnant un champ en  $1/r^2$  (potentiel statique), l'autre un champ en  $1/r$  (potentiel du champ à grande distance).

Ce deuxième terme, le seul intéressant pour l'étude des phénomènes lumineux, est à son tour décomposé en deux termes, par une opération d'aspect purement mathématique mais qui trouve ensuite une signification physique, les deux termes étant respectivement associés aux deux états entre lesquels s'effectue le passage.

Les self-énergies moyennes correspondantes ayant été calculées, on choisit un état du système, puis on effectue la somme de ces énergies sur tous les passages où cet état est impliqué, ce qui donne la formule générale annoncée correspondant à cet état.

Il reste alors à faire l'application de la formule à la mécanique quantique. Elle est immédiate et montre que  $h$  s'introduit dans le champ par l'intermédiaire du courant et seulement par lui.

La dernière partie est consacrée à l'étude de ce qui différencie l'utilisation du champ classique et du champ quantifié dans le calcul du décalage. La raison pour laquelle le second champ conduit à des intégrales divergentes et le fait que la constante  $h$  est une propriété de l'électron et non pas du champ électromagnétique, *même en théorie du champ quantifié*, sont mis en évidence.

Afin de bien préciser le sens que nous donnons au mot "classique" et d'éviter toute confusion avec ce que certains auteurs présentent comme "ce qu'on obtient à la limite où  $h$  tend vers zéro", nous avons détaillé en Appendice la signification des termes champ électromagnétique classique, électron quantifié, charge ponctuelle, électron classique, courant de charge classique, empruntés ici.

Une telle étude ne peut permettre de saisir le mécanisme par lequel les self-énergies ainsi sommées viennent comme décalage des constantes représentant les niveaux d'énergie, qui apparaissent quand on résout le problème de l'équation de Dirac ou de Schrödinger pour le potentiel central. C'est pourquoi l'étude II est consacrée au couplage de cette dernière équation et de l'équation de Maxwell, dans le modèle de Barut.

La lecture de cette première étude ne nécessite, jusqu'au no. 11, aucune connaissance de mécanique quantique, ni même, les formules (1) ou (2) étant admises comme loi fondamentale de l'électromagnétisme, de physique.

## I. Les potentiels des champs électromagnétiques statique et à grande distance

5. Considérons l'équation de Maxwell en jauge de Lorentz,

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = 4\pi J^\mu(x) \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

où  $(x^0 = ct, \vec{r}) = x$  est le point courant de l'espace-temps  $M$ , et où  $J^\mu$  vérifie l'équation de continuité  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , et sa solution générale,

$$A^\mu(x^0, \vec{r}) = \frac{1}{2} \int \frac{J^\mu(x^0 - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}') + J^\mu(x^0 + |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (2)$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace propre du repère du laboratoire.

$A^\mu$  est la demi-somme des potentiels retardé et avancé  $A_-^\mu$  et  $A_+^\mu$ , mais pour les types de courant de charge qui nous intéressent ici, les résultats que nous obtiendrons sont exactement les mêmes quel que soit le choix du potentiel (Annexe A). Nous utiliserons  $A^\mu$  comme étant le plus commode à manipuler.

Supposons que  $J^\mu(x)$  varie périodiquement en fonction du temps (voir éq. (29)). Pour simplifier,  $J^\mu$  sera supposé réduit à l'un ou l'autre des termes du deuxième membre de (29)).

$$J^\mu(x^0, \vec{r}) = \cos(\omega x^0) j^\mu(\vec{r}) \quad (\text{resp. } \sin(\omega x^0) j^\mu(\vec{r})) \quad (3)$$

on obtient immédiatement

$$A^\mu(x^0, \vec{r}) = \cos(\omega x^0) a^\mu(\vec{r}), \quad (\text{resp. } \sin(\omega x^0) a^\mu(\vec{r})) \quad (4)$$

avec

$$a^\mu(\vec{r}) = \int \frac{\cos(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^\mu(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (5)$$

Introduisons la self-énergie du système de charges dont le courant est  $J^\mu$ , moyennée dans le temps :

$$W = -\frac{1}{T} \int_0^T \int J_\mu(x^0, \vec{r}) A^\mu(x^0, \vec{r}) dx^0 d\vec{r}. \quad (6)$$

Si  $T = n\pi/\omega$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), on a par (3), (4) et (5),

$$W = -\frac{1}{2} \int \int \frac{\cos(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j_\mu(\vec{r}) j^\mu(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'. \quad (7)$$

6. Considérant le potentiel qu'on aurait si  $\omega$  était nul,

$$a_{S'}^\mu(\vec{r}) = \int \frac{j^\mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \quad (8)$$

ou potentiel statique, nous ferons la décomposition,

$$a^\mu(\vec{r}) = a_S^\mu(\vec{r}) + a_H^\mu(\vec{r}) \quad (9)$$

où

$$a_H^\mu(\vec{r}) = \int \frac{\cos(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|) - 1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^\mu(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (10)$$

sera appelé le potentiel hertzien, ou encore du champ à grande distance (Annexe B).

On en déduit

$$W = W_S + W_H, \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} W_H &= -\frac{1}{2} \int j_\mu(\vec{r}) a_H^\mu(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= -\frac{1}{2} \int \int \frac{\cos(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|) - 1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j_\mu(\vec{r}) j^\mu(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}', \end{aligned} \quad (12)$$

et

$$W_S = -\frac{1}{2} \int j_\mu(\vec{r}) a_S^\mu(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{1}{2} \int \int \frac{j_\mu(\vec{r}) j^\mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r} d\vec{r}'. \quad (13)$$

*Nota.* Il est bien entendu que dans tout ce qui précède, on exclut le cas où  $J^\mu(x)$  serait, non pas une vraie fonction du point  $x$ , mais une distribution de Dirac (voir Appendice).

## II. Décomposition des potentiels et des énergies en fonction de “vecteurs d’onde”

7. Il n’y a plus rien à ajouter à ce qui précède du point de vue de la théorie du champ électromagnétique. Ce qui suit, en particulier la relation (14), pourrait donc être considéré comme un pur divertissement mathématique. Cependant on peut lui trouver une double fonction : a) D’un point de vue calculatoire, on n’a pas les moyens de résoudre par l’analyse les formules précédentes, ce qui est à regretter si  $j^\mu(\vec{r})$  est analytiquement connu. b) Du point de vue des phénomènes physiques, la décomposition est comparable à celle qui sépare un son musical complexe en ses divers harmoniques.

Il se trouve que *le fait même de faire intervenir des “vecteurs d’onde” dans l’expression de  $a_H^\mu(\vec{r})$  va entraîner une séparation en deux parties de ce potentiel* qui est inaccessible sous sa forme (10), et bien que cette séparation soit au départ une obligation purement mathématique, elle va prendre une signification physique importante au paragraphe suivant.

On peut d’ailleurs pressentir la nécessité de cette signification physique par le fait même que  $a_H^\mu$ , donc  $W_H$ , est séparable alors que  $a_S^\mu$ , donc  $W_S$ , ne l’est pas. En retour, ce même fait montre l’importance de la décomposition (9) du potentiel  $A^\mu$ .

On peut écrire (Annexe C),

$$\begin{aligned} \cos(\omega R) - 1 = & - \left[ \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{\pi k} \cdot \frac{|\omega|}{(|\omega| + k)} dk \right. \\ & \left. + \text{vp} \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{\pi k} \cdot \frac{|\omega|}{(|\omega| - k)} dk \right] \end{aligned} \quad (14)$$

et

$$\frac{\sin(kR)}{kR} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikR \cos \theta} \sin \theta d\phi d\theta = \frac{1}{4\pi} \int e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R})} d\Omega \quad (15)$$

où

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad R = |\vec{R}|, \quad k = |\vec{k}|, \quad \vec{k} \cdot \vec{R} = kR \cos \theta, \quad d\vec{k} = k^2 d\Omega dk.$$

On pose

$$T^\mu(\vec{k}) = \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} j^\mu(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (16)$$

On déduit immédiatement de (12),(14) et (16)

$$W_H = w_H(\omega) + w_H(-\omega) \quad (17)$$

où

$$w_H(\omega) = \frac{\omega}{8\pi^2} \int \frac{T_\mu(-\vec{k}) T^\mu(\vec{k}) d\vec{k}}{(\omega - k) k^2}, \quad (18)$$

cette intégrale étant à considérer en valeur principale si  $\omega > 0$ .

En jauge de Coulomb, nous avons au lieu de (18)

$$w_H(\omega) = \frac{\omega}{8\pi^2} \int \frac{\vec{T}^\perp(-\vec{k}) \cdot \vec{T}^\perp(\vec{k})}{(\omega - k) k^2} d\vec{k}, \quad (19)$$

où  $\vec{T}^\perp$  est la composante de  $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$  orthogonale à  $\vec{k}$  (Ann. D).

Toutes les intégrales considérées sont convergentes si l'intégrale

$$u^\mu = \int j^\mu(\vec{r}) d\vec{r} \quad (20)$$

converge (Annexe E).

Notons qu'on peut écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{k} dk = \frac{1}{2\pi^2} \int e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R})} \frac{d\vec{k}}{k^2} \quad (21)$$

et

$$W_S = \frac{1}{4\pi^2} \int T_\mu(-\vec{k}) T^\mu(\vec{k}) \frac{d\vec{k}}{k^2}, \quad (22)$$

mais, contrairement à ce qui a été fait pour  $W_H$ , on ne peut pas décomposer  $W_S$  d'une façon analogue à (17).

### III. Application aux systèmes de charges à états stationnaires et courants de passage d'un état à un autre sinusoïdaux dans le temps

8. Considérons maintenant le système de charges le plus général pour lequel il existe des états dits stationnaires, où le courant des charges est indépendant du temps, un niveau d'énergie  $E_n$  étant associé à chaque état  $n$ , et où, lors d'un passage d'un état  $n$  à un autre état  $p$ , un courant  $J_{np}^\mu$  de type sinusoïdal (3), de pulsation  $\omega_{np}$ , est créé.

*Comme une énergie constante dans le temps est aussi une énergie moyennée dans le temps, et que, en dehors d'un passage, les énergies  $E_n$  et  $E_p$  sont constantes dans le temps, nous ne nous intéresserons pas à la self-énergie totale créée par le courant de passage, pendant tout le temps  $T$  que dure le passage, mais seulement à la self-énergie de passage  $W(n, p)$ , moyennée sur la durée totale des passages  $(n, p)$ , ce qui dispense de connaître leur nombre et la valeur de  $T$ .*

Nous limitant à la seule self-énergie  $W_H(n, p)$  qui correspond au potentiel du champ à grande distance, nous utiliserons pour cela la formule (12), qui est exacte si le temps  $T$  recouvre exactement un nombre entier de demi-périodes, ou qui est approchée dans le cas contraire, l'approximation étant d'autant meilleure que le nombre de demi-périodes recouvertes est grand.

On remarquera que la self-énergie créée lors d'un passage ne dépend que du courant de passage, et est par suite indépendante de la cause de ce passage. Elle est donc la même dans le passage  $n \rightarrow p$  que dans le passage  $p \rightarrow n$  si  $J_{np}^\mu = J_{pn}^\mu$  :

$$W_H(n, p) = W_H(p, n) \tag{23}$$

en accord avec l'expression (12).

Nous allons maintenant décomposer  $W_H(n, p)$  en deux parties

$$W_H(n, p) = w_{np}^H + w_{pn}^H \tag{24}$$

où  $w_{np}^H$  et  $w_{pn}^H$  seront considérées chacune comme pouvant être une contribution à la modification de la valeur de l'énergie du système, cette contribution étant associée respectivement à l'état  $n$  et à l'état  $p$ . La valeur de  $w_{np}^H$  et celle de  $w_{pn}^H$  sont indépendantes du sens du passage.

Il faut bien souligner que *nous ne faisons pas ici un bilan énergétique*, faisant appel à une loi de conservation de l'énergie, mais un simple *inventaire* de la self-énergie, moyennée dans le temps, doublée d'une *classification* de cette énergie par état.

Comment faire la décomposition (24) ?

Rien n'indique que nous devons avoir  $w_{np}^H = w_{pn}^H$ , comme cela peut venir tout d'abord à l'esprit ; au contraire, on peut penser que la dissymétrie des états doit pouvoir se retrouver dans la décomposition (24).

Nous ne disposons que de l'expression (12) pour définir l'énergie de passage, qui est symétrique par rapport à  $n$  et  $p$ . Le seul terme qui paraît décomposable dans l'intégrale (12) est  $\cos(\omega | \vec{r} - \vec{r}' |) - 1$ .

Supposant

$$\omega_{pn} = -\omega_{np} \tag{25}$$

*nous ferons donc correspondre à la décomposition mathématique (14) la décomposition (24), de nature physique*, en écrivant conformément à (17)

$$W_H(n, p) = w_H(\omega_{np}) + w_H(\omega_{pn}) \quad , \quad w_{np}^H = w_H(\omega_{np}). \tag{26}$$

Cette décomposition admet une interprétation physique par le fait, qu'en général, les deux termes de (14) n'ont pas le même ordre de grandeur. Les radiations respectives engendrées par le système de charges peuvent donc correspondre à des valeurs de niveau d'énergie, observées lors d'une expérience, très différents.

### 9. Inventaire, état par état, de la self-énergie

Considérant tous les passages  $n \rightarrow p$  et  $p \rightarrow n$ , dans lesquels  $n$  apparaît, on obtiendra la somme totale  $W_n^H$  de la self-énergie due au potentiel du champ à grande distance, à associer à l'état  $n$  en écrivant

$$W_n^H = \sum_{p \neq n} 2w_H(\omega_{np}). \quad (27)$$

Le facteur 2 provient de ce que  $w_H(\omega_{np})$  est à considérer dans les deux passages  $n \rightarrow p$  et  $p \rightarrow n$  (avec exactement la même valeur quelle que soit la cause du passage).

Il faut bien préciser que  $W_H(n, p)$  étant indépendant du nombre de transitions du type  $(n, p)$  qui se produisent effectivement, la somme (27) s'effectue sur le nombre d'états, et non pas sur le nombre effectif de transitions, et donc  $w_H(\omega_{np})$  y a le même poids, égal à 2, quel que soit l'indice  $p$ , que le nombre des passages  $n \rightarrow p$  (ou  $p \rightarrow n$ ) que subit le système au cours du temps, soit fréquent ou rare.

On déduit par (18) si le courant  $J_{np}^\mu$  de passage est de la forme (3) :

$$W_n^H = \sum_{p \neq n} \frac{\omega_{np}}{4\pi^2} \int \frac{T_{np\mu}(\vec{k})T_{np}^\mu(-\vec{k})}{(\omega_{np} - k)} \cdot \frac{d\vec{k}}{k^2}, \quad (28)$$

ou de la forme :

$$J_{np}^\mu(x^0, \vec{r}) = \cos(\omega_{np}x^0)j_{np}^{I\mu}(\vec{r}) + \sin(\omega_{np}x^0)j_{np}^{II\mu}(\vec{r}), \quad (29)$$

$$W_n^H = \sum_{p \neq n} \frac{\omega_{np}}{4\pi^2} \int \frac{T_{np\mu}^I(\vec{k})T_{np}^{I\mu}(-\vec{k}) + T_{np\mu}^{II}(\vec{k})T_{np}^{II\mu}(-\vec{k})}{(\omega_{np} - k)} \cdot \frac{d\vec{k}}{k^2}. \quad (30)$$

Si le nombre d'états  $p$  à considérer est infini, l'écriture de (28) ou (30) exige évidemment que la série du second membre soit convergente.

Bien entendu, nous le rappelons, toutes les intégrales de (28) et (30) sont absolument convergentes pour la limite supérieure de l'intégration

sur  $k = |\vec{k}|$ , et sont à considérer en valeur principale de Cauchy quand  $\omega_{np}$  est positif, pour la discontinuité due au dénominateur.

Dans le cas où  $\omega_{np}$  est proportionnelle à la différence des énergies  $E_n, E_p$ , on doit écrire

$$\omega_{np} = \frac{E_n - E_p}{c\tau_{np}} \quad \omega_{np}x^0 = \frac{E_n - E_p}{\tau_{np}}t \quad (31)$$

où  $\tau_{np}$  est un nombre ayant la dimension d'une action, avec  $\tau_{np} = \tau_{pn}$  par conformité avec (25).

### 10. Jauge de Coulomb. Approximation dipolaire.

Plaçons-nous en jauge de Coulomb et supposons que la charge totale du courant soit  $e$ , en posant

$$\vec{j}_{np}(\vec{r}) = e\vec{j}'_{np}(\vec{r}) \quad , \quad \frac{\vec{v}_{np}}{c} = \int \vec{j}'_{np}(\vec{r})d\vec{r} \quad (32)$$

où  $\vec{j}'_{np}$  a la dimension de l'inverse du cube d'une longueur et où  $\vec{v}_{np}/c$  n'a pas de dimension.

Si on introduit  $E_n, E_p, \tau_{np}$ , alors (27) devient

$$W_n^H = \sum_{p \neq n} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{e^2}{c\tau_{np}} (E_n - E_p) \int \frac{\vec{T}'_{np}{}^\perp(\vec{k}) \cdot \vec{T}'_{np}{}^\perp(-\vec{k})}{(E_n - E_p - c\tau_{np}k)} c\tau_{np} \frac{d\vec{k}}{k^2}. \quad (33)$$

En approximation dipolaire,  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}))$  est remplacé par 1. Mais alors les intégrales divergent.

Si on se rapporte à des coordonnées sphériques  $(k, \theta, \phi)$  d'axe des pôles parallèle à  $\vec{v}_{np}$ , on a alors

$$\vec{T}'_{np}{}^\perp(\vec{k}) \cdot \vec{T}'_{np}{}^\perp(-\vec{k}) = \sin^2 \theta \frac{\vec{v}_{np}^2}{c^2}. \quad (34)$$

Puisque  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \theta) \sin \theta d\phi d\theta = 8\pi/3$ , on obtient en faisant dans chaque intégrale le changement de variable  $K = c\tau_{np}k$ , et en coupant l'intégrale à une valeur de  $K$  égale à un nombre  $K_{np}$ ,

$$W_n^H = \sum_{p \neq n} \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{e^2}{c\tau_{np}} (E_n - E_p) \frac{\vec{v}_{np}^2}{c^2} \int_0^{K_{np}} \frac{dK}{E_n - E_p - K}, \quad (35)$$

les intégrales telles que  $E_n - E_p - K$  s'annule pour une valeur de  $K$  étant à considérer en v.p.

Si on suppose les  $\tau_{np}$  positifs, la contribution à la valeur de  $W_n^H$  d'un terme de la somme est positive si  $E_p > E_n$  et négative si  $E_p < E_n$ . Si l'état  $n$  est de niveau d'énergie le plus bas, tous les termes contribuent donc positivement à la valeur de  $W_n^H$ .

### III. Le champ électromagnétique classique et la mécanique quantique

#### 11. Les formules précédentes et le décalage de Lamb

Nous n'avons rien dit sur la nature du courant  $J^\mu(x)$ . Il peut être relatif à une population de charges élémentaires, comme, tout aussi bien, à un seul électron. Cependant, dans le deuxième cas, puisque nous avons exclu que  $J^\mu(x)$  soit une distribution de Dirac qui localiserait ponctuellement l'électron dans l'espace,  $J^\mu(x)$  peut prendre une signification probabiliste, ou statistique (par exemple au sens de Ballentine [8], voir aussi [9]), qui se répercute directement sur l'interprétation à donner au champ engendré par le courant.

Mais, même dans le cas où le courant est relatif à un seul électron, et où une interprétation probabiliste est donnée au courant  $J^\mu(x)$ , rien dans ce qui précède ne relève de près ou de loin de la Mécanique Quantique, à plus forte raison de la Deuxième Quantification. Nous avons utilisé, dans sa définition et ses propriétés, le seul Champ Classique.

Pas la moindre trace d'un opérateur, pas la plus petite relation de commutation. Et où donc la constante de Planck  $h$  ?

Et pourtant (quelle coïncidence !) la relation approchée (35) a la même forme que la formule de Bethe du décalage de Lamb. Mieux, c'est exactement la formule de Bethe, si on écrit

$$\tau_{np} = \hbar \quad (36)$$

où  $\hbar$  est la constante réduite  $h/2\pi$  de Planck, et

$$|\vec{v}_{np}| = \left| \int \psi_n^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{im} \nabla \psi_p(\vec{r}) d\vec{r} \right|, \quad (37)$$

où  $m$  est la masse de l'électron, où les  $\psi_k(\vec{r})$  sont les solutions de l'équation de Schrödinger, et si on prend les  $K_{np}$  égaux à l'un des "cut-off" qui ont été proposés pour pouvoir associer une valeur finie aux intégrales divergentes de l'EDQ.

(Nota. Mais quel cut-off ?  $mc^2$  comme dans [2]?  $\alpha mc^2$  où  $\alpha = e^2/(\hbar c)$  comme dans [7] ? Un nombre pas trop grand et pas trop petit comme dans [10] ? Nous montrerons dans l'étude II que le choix de  $\alpha mc^2$  explique le bon accord de la valeur des intégrales coupées de (35) avec la valeur exacte des intégrales convergentes, sommées jusqu'à l'infini, de (33).)

Nous verrons plus précisément dans l'étude II, que (37) provient d'un courant de la forme (3) (en  $\sin(\omega x^0)$ ), où  $\vec{j}(\vec{r})$  est le courant de Schrödinger

$$\vec{j}_{np}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{mc} \psi_n(\vec{r}) \nabla \psi_p(\vec{r}) \quad (\text{cas où } \psi_n, \psi_p \in \mathbf{R}) \quad (38)$$

qu'on peut associer à deux niveaux  $n$  et  $p$ , d'égale probabilité, de l'électron lié au noyau de l'atome d'hydrogène.

Jointe aux relations (36) et (38), et évidemment sans nécessité de cut-off, la formule (33), où toutes les intégrales convergent à l'infini, est *exactement* la partie réelle de la formule de Barut et Van Huele ([6], éq. (20) ; le facteur  $2/3$  qui figure dans cette formule, provient, comme dans (35) de l'orthogonalité de  $T_{np}^\perp(\vec{k})$  et de  $\vec{k}$ , qui donne le décalage de Lamb, avec un aussi bon accord, au moins, avec l'expérience, que la formule de Bethe.

L'équation (28), plus précisément l'équation (30), correspond à l'équation relativiste de Barut et Kraus [5], les fonctions d'onde de Dirac prenant la place de celles de Schrödinger. <sup>2</sup>

## 12. Remarques sur l'électromagnétisme quantique

Sauf à considérer comme un pur hasard l'identité précédemment constatée quand le courant de charge est quantique, entre les formules du no. III, et les formules TSC et EDQ du décalage de Lamb, on peut tirer de notre modèle général d'inventaire de self-énergie, un certain nombre d'explications ou d'enseignements sur l'électromagnétisme quantique :

---

<sup>2</sup> Nota. Dans le cas relativiste, la partie de l'énergie  $W_H(\omega_{np})$  qui correspond au terme en  $g_n(r)g_p(r)$  (où  $g_k(r)$  est la fonction radiale de la grande composante du spineur  $\psi_k(\vec{r})$ ), n'est pas à prendre en compte pour le calcul du décalage de Lamb parce que correspondant au champ longitudinal. L'autre partie doit d'ailleurs être réduite, en ne considérant que la composante transverse du champ [21].

1) *L'égale normalisation des  $\psi_k$  dans les formules du décalage.*

Elle correspond dans notre modèle à l'égale réalité que nous avons accordé à chacun des états  $n$  et  $p$  dans le passage de  $n$  à  $p$ , et de l'égalité des poids des  $w_H(\omega_{np})$  dans la somme (27).

Comme on l'a vu, cette dernière égalité exprime l'indépendance du rôle joué dans la somme (27) par  $w_H(\omega_{np})$ , relativement au nombre effectif de transitions  $n \rightarrow p$  que le système subit au cours du temps. Il y a là peut-être une explication au fait que la contribution de chaque état à la valeur du décalage de Lamb est la même quelle que soit l'intensité de la raie de lumière correspondante, dans les diverses conditions d'expériences où le décalage peut être observé, et de la raison de l'importance de la part due au spectre continu dans la valeur du décalage.

2) *L'introduction de la constante de Planck dans le champ électromagnétique.*

On voit par (36) et (38) que *la constante de Planck ne s'introduit dans le champ électromagnétique que par l'intermédiaire du courant et du courant seul*. Si le courant est classique, le champ est évidemment classique ; *si le courant est quantique, et bien, le champ reste classique* ; simplement la constante de Planck y figure comme l'expression d'une propriété du courant.

3) *L'absence de rayonnement à grande distance d'un électron lié à un atome, dans un état stationnaire.*

Elle résulte de la nullité de  $a_H^\mu$  quand le courant est indépendant du temps. Plus précisément :

Il semble y avoir opposition entre la théorie classique du champ électromagnétique et la mécanique quantique, par le fait que *l'électron classique* (voir Appendice), dont le champ qu'il crée admet pour potentiel le potentiel de Liénart et Wiechert, rayonne à grande distance, sans aucune exception de mouvement particulier quand il est soumis à un potentiel central (ce qui entraînerait, et cela a été à l'origine de l'abandon de la théorie classique de *l'électron* lié à un atome, sa chute vers le noyau de l'atome).

En fait, *l'absence de rayonnement à grande distance que l'on trouve dans un état stationnaire, est inhérent simplement au fait que si le courant est une vraie fonction, et s'il est indépendant par rapport au temps on a l'annulation du potentiel du champ à grande distance, que nous avons introduit en (9), ce qui ne peut se produire si le courant est une distribution de Dirac.*

*La nature classique (voir Appendice) ou quantique du courant des charges n'est donc pas la raison de la présence ou l'absence d'un rayonnement à grande distance. La raison est la dépendance ou l'indépendance par rapport au temps du courant, quand ce courant est une fonction et non pas une distribution.*

4) *Non nécessité du caractère infini de la self-énergie.*

En théorie classique du champ, l'existence d'une énergie propre électrostatique infinie de l'électron (voir [7], p. 31) est uniquement lié à la nature ponctuelle de l'électron. Cette énergie est finie si le courant associé à l'électron est une vraie fonction (équation (13)). Le problème de la renormalisation est donc totalement absent dans l'application de la théorie du champ classique à l'électron quantique.

*Si un problème de renormalisation existe en EDQ, c'est non pas parce qu'il existe une analogie entre l'électron quantique et l'électron ponctuel classique, mais parce que l'EDQ altère le champ classique (voir §V) de façon à amener la divergence des intégrales définissant la self-énergie.*

## V. Comparaison des théories du champ quantique et du champ classique

13. Dans son calcul du décalage de Lamb, l'EDQ est une théorie qui n'a pas de sens (ce mot étant pris dans la signification étroite qu'on lui donne quand on définit les intégrales généralisées).

Tant que l'EDQ était le seul modèle théorique connu d'explication de ce phénomène, on pouvait mettre, d'une part ce désaccord entre la théorie et les lois des mathématiques (la première discordance de ce type acceptée dans l'histoire de la Physique), d'autre part le bon agrément entre l'expérience et le calcul pratique, sur le compte de quelque facétie, exceptionnelle, de la Nature.

Mais dès l'instant où un autre modèle fournit au moins un aussi bon accord avec l'expérience et sans dissonance théorique, on peut se demander si l'EDQ ne contient pas en elle-même quelque chose, disons, de fallacieux.

En deux points l'EDQ nous a paru comme particulièrement critiquable. Les références sont relatives à l'ouvrage fondamental de Heitler [7], édition III.

1) *Une introduction factice de la constante de Planck dans le champ électromagnétique.*

Il y a en EDQ un passage (voir [7], p.341) où  $h$  est introduite par un subterfuge surprenant. Ayant à considérer la self-énergie statique (13), on utilise l'expression (21) de  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ , où évidemment  $h$  n'a rien à faire, en effectuant le changement de variable  $k \rightarrow k/(\hbar c)$  dans l'intégrale du second membre de (21) !! (*Nota.* Il semble que ce point a troublé W.E. Lamb lui-même, [13] p. 391.)

Pourtant ce changement de variable artificiel, est la *condition impérative* de l'harmonisation du champ statique et du champ des "photons" (voir dans l'ordre les équations (3), (4'), (2') de [7], puis la phrase "(4) can now be combined with (2)").

Cela peut faire douter de l'existence d'un rôle réel de  $h$  dans la définition du champ d'un "photon". Mais comme  $h$  joue un rôle constitutif dans les règles de quantification du champ, cela peut faire douter de la signification physique réelle de ces règles.

## 2) Le recours au modèle de l'oscillateur harmonique.

Comment peut-on bâtir sur un modèle si particulier les lois fondamentales de la lumière ? Pourquoi les lois de Maxwell de l'électromagnétisme, ces lois si simples, si proches des fondements mêmes de la Relativité (voir Appendice), sont-elles brisées, segmentées, pulvérisées en des myriades d'oscillateurs harmoniques enfermés dans leurs (drôles de) boîtes ? <sup>3</sup>

Examinons si le recours à l'oscillateur harmonique n'est pas responsable de la divergence des intégrales.

Mais d'abord mentionnons que, contrairement sur ce point à [5], nous ne pensons pas que la méthode des perturbations utilisée par l'EDQ, et qui a pour effet d'introduire le facteur  $1/(\omega - k)$  (voir éq. (17), (22) de [7], IV, §14) ait une responsabilité dans la divergence des intégrales.

Considérant le potentiel (5) (non encore décomposé en la somme (9)), on va comparer le facteur

$$I = \frac{\sin(k|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|k(\omega - k)} \quad (39)$$

---

<sup>3</sup> *Nota.* Imaginons (mais on y vient ...) des mécaniciens habitués à l'usage des modes propres d'un système dynamique particulier, remplaçant –pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?– les Principes de la mécanique newtonnienne : "Tout point matériel supposé seul ne prendrait pas d'accélération, etc." par des axiomes où, à l'aide de difficiles théorèmes sur les opérateurs des espaces de Hilbert, ces modes tiendraient une place fondamentale. Il n'est pas sûr que leur application au simple mouvement d'un solide autour d'un point fixe ne conduirait pas à des intégrales divergentes !

qui intervient dans la forme intégrale de  $\cos(\omega | \vec{r} - \vec{r}' |) / | \vec{r} - \vec{r}' |$  (voir (14), (15), (21)) au facteur

$$J = \frac{e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))}}{Lk(\omega - k)} \tag{40}$$

qui s'introduit en EDQ (voir (2), (2'), de [7], VI, §34), où  $L = 1$  est la longueur des côtés des cubes où sont considérées les ondes planes des oscillateurs harmoniques (voir [7], p.39).

La différence essentielle entre (39) et (40), c'est le remplacement par  $1/L$  dans  $J$  du facteur  $1/|r - r'|$  de  $I$ , et ce remplacement est une cause des différences entre l'EDQ et la TSC.

En effet, la présence dans  $I$  de  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  autorise l'intégration (15) et justifie dans (16) celle de  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}))$ . Ce dernier facteur entraîne (voir étude II, no. 10), en particulier pour l'application de (33) à l'électron de Schrödinger, des facteurs de la forme  $1/(1 + (qak)^2)^p$  (où  $p \in \mathbf{N}$ ,  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \hbar^2/(me^2)$  rayon de Bohr) dans les intégrales en  $k$  de (33) qui assure leur convergence.

Par contre, l'absence de  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  dans  $J$  et la suppression de facto de l'intégration (15), interdit la même utilisation dans (16) de  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}))$ , impose la deuxième quantification de la fonction d'onde de l'électron, et alors la convergence des intégrales de l'EDQ n'est plus assurée.

La divergence des intégrales et des self-énergies en EDQ est donc due essentiellement à la suppression du caractère sphérique, d'une part des "ondes" du champ classique, représenté par la prise en compte du facteur  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ , d'autre part (voir [5]), par contre-coup, des solutions élémentaires des équations quantiques de l'électron soumis au potentiel central.

*C'est la cassure du champ classique qu'effectue la Quantification des Champs, et son recollement en une superposition d'ondes planes des oscillateurs harmoniques qui est responsable des infinités de l'EDQ.*

Remarquons que ce recollement ne peut par ailleurs permettre de retrouver le champ classique quand on fait tendre  $\hbar$  vers zéro, puisqu'on a vu que  $\hbar$  ne joue en fait aucun rôle dans la quantification du champ (c'est par l'intermédiaire de  $\omega$ , donc de la méthode des perturbations que  $\hbar$  s'introduit dans (40), les deux  $k$  de  $1/(k(\omega - k))$  de (40) sont homogènes au  $1/k^2$  de la formule (21) dans laquelle  $\hbar$  n'a aucune signification).

16. Pourquoi l'EDQ et la TSC peuvent-elles donner des résultats très voisins dans le calcul du décalage de Lamb ?

Si en TSC on utilise l'approximation dipolaire, alors la présence latente de  $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$  dans (16) étant supprimée, on obtient exactement les mêmes résultats qu'en EDQ puisque (39) et (40) se retrouvent égaux à  $1/(k(\omega-k))$ .

D'autre part, si on ne fait aucune approximation en TSC, et si par ailleurs on tronque  $K = \hbar ck$  où  $k = 1/a$  les intégrales de (35) (on a  $c\hbar/a = \alpha mc^2$  c'est-à-dire la valeur du "cut-off" adopté dans [7] pour la formule de Bethe) on obtient pratiquement les mêmes résultats avec les intégrales convergentes de (33) qu'avec les intégrales (35) ainsi coupées, le terme général de la série de Bethe tendant très rapidement vers celui de la série de Barut (voir Etude II, no.11).

## Conclusion

17. Pour le calcul du décalage de Lamb,
- ou on laisse au champ son caractère sphérique et les intégrales convergent sûrement,
  - ou on fracture ce champ en ondes planes et les intégrales risquent de diverger quand on "recolle les morceaux".

En fait des intégrales convergentes sont utilisées en EDQ (voir [14] à [17]) pour affiner les résultats, par la prise en compte de la "retardation" (il est entendu par là qu'on ne fait pas l'approximation dipolaire). Il ne nous a pas paru que ces intégrales étaient différentes (voir en particulier [14], p. 623) de celles utilisées dans les formules de Barut.

Le calcul de ces intégrales convergentes, tout à fait licite en théorie de Barut, met, quand il est fait en EDQ, cette théorie en contradiction avec elle-même. En effet, le caractère sphérique des fonctions d'onde  $\psi_k$  y est pris en compte, alors que précédemment ces mêmes fonctions avaient dû subir la décomposition en ondes planes de la deuxième quantification.

Tout donne donc à penser qu'il n'y a pas en fait de différence entre les deux théories, classique et quantique du Champ ; sauf que dans la première théorie il n'est nécessaire à aucun moment d'introduire des infinités et qu'on est conduit *en trois lignes de calculs élémentaires* – exactement celles qui, à partir de la loi de Maxwell (2),

déterminent par le développement de  $\cos(a \pm b)$ , la relation (4);

par une petite intégration par la méthode des résidus, l'expression (14) ;

par l'égalité  $\int_0^\pi \cos^2 x dx / \pi = 1/2$ , les équations (7) et (18) – au terme général des formules du décalage de Lamb, ce qui nécessite des chapitres entiers de développements fastidieux ([7], [18], [19]) dans la deuxième théorie.

Que conclure ? sinon que les lois de la Quantification des Champs sont, tout au moins pour le calcul du décalage de Lamb (ce “triomphe de l'EDQ” [20] ?) parfaitement inutiles, et que si l'inutile ne peut constituer une loi de la Nature, alors il n'y a pas lieu d'attribuer au “photon  $\vec{k}$ ” d'autre signification (voir éq. (14) et (15)) que celle d'un point dans le domaine de sommation d'une expression intégrale de  $\cos \omega x$ .

## Appendice

*Champ classique, champ quantique ; électron classique, électron quantique.*

Une idée généralement répandue est qu'on obtient la “théorie classique” en faisant tendre la constante de Planck  $h$  vers 0. Mais : a) A-t-on démontré qu'en faisant tendre  $h$  vers 0, l'électron de Dirac se transforme en l'électron de Lorentz ? <sup>4</sup> b) Comme on le voit au §V, quand dans le champ quantifié appliqué au phénomène de Lamb, on fait tendre  $h$  vers 0, on n'obtient pas un champ qui satisfait aux lois de l'électromagnétisme de Maxwell.

Aussi, afin de bien préciser les notions “classique” ou “quantique” qui sont utilisées ici, nous donnerons les définitions suivantes :

*Champ électromagnétique classique.* C'est le champ dont le potentiel répond aux lois de Maxwell, directement exprimées par les équations (2) (ou pour la limite constituée par une charge ponctuelle par le potentiel de Liénart et Wiechert) :

- “L'action sur toute charge d'un système de charges,
- est proportionnelle à la densité volumique du système de charges, <sup>5</sup>
- est inversement proportionnelle à la distance,
- se propage à la vitesse de la lumière  $c$ .”

<sup>4</sup> Nota. Sur l'impossibilité de cette démonstration, voir [9], §4, en particulier éq. (4.5) et (3.14)) et N.B.

<sup>5</sup> Nota. La définition de cette densité pose un problème, si l'on considère que chacune des charges du système est dotée d'une vitesse d'univers qui lui est propre, dont nous avons abordé les conséquences sur l'interprétation à donner aux niveaux d'énergie de l'électron de Dirac, dans [9], §IV et [11], §IV.

*Electron quantique, ou de Dirac.* C'est une charge dont les propriétés de position et d'énergie sont exprimées par l'équation de Dirac (ou de Schrödinger en théorie non relativiste).

*Electron ponctuel.* C'est une charge dont le courant associé est une distribution de Dirac dans l'espace-temps  $M$ . *Une telle charge n'existe pas en mécanique quantique.*

*Electron classique, ou de Lorentz.* C'est un électron ponctuel, dont le champ qu'il crée satisfait aux lois de Maxwell, et dont le mouvement est régi par l'équation de Lorentz.

*Courant de charge classique.* C'est un courant (représenté par une fonction ou une distribution vérifiant l'équation de continuité) qui ne fait pas intervenir la constante de Planck.

On remarquera qu'en électromagnétisme classique la distinction la plus importante à faire est la suivante : a) ou le courant est une *distribution* de Dirac, b) ou le courant est une *vraie fonction* du point  $x$  de  $M$ .

Le a) ne s'applique pas à la mécanique quantique ; le b) peut s'appliquer à un système de charges *qui relève ou non de la M.Q.*

Certes, le fait d'associer à la charge d'un seul électron un courant qui n'est pas une distribution de Dirac, introduit un point de vue qui peut être considéré comme probabiliste, donc très proche de celui de la M.Q. (ou un point de vue statistique), mais qui ne relève pas des principes et des équations fondamentaux de cette théorie, ni du rôle essentiel qu'y tient la constante de Planck.

## ANNEXE

A - Indépendance de la self-énergie relativement au choix du potentiel.

On considère

$$J^\mu(x^0, \vec{r}) = \cos(\omega x^0) j^{I\mu}(\vec{r}) + \sin(\omega x^0) j^{II\mu}(\vec{r})$$

et

$$A_\pm^\mu(x^0, \vec{r}) = \int \frac{1}{R} (\cos(\omega(x^0 \pm R)) j^{I\mu}(\vec{r}') + \sin(\omega(x^0 \pm R)) j^{II\mu}(\vec{r}')) d\vec{r}',$$

$$A^\mu = \frac{1}{2} (A_+^\mu + A_-^\mu) \quad , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| .$$

On pose

$$a^{(k)\mu}(\vec{r}) = \int \frac{\cos(\omega R)}{R} j^{(k)\mu}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$b^{(k)\mu}(\vec{r}) = \int \frac{\sin(\omega R)}{R} j^{(k)\mu}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad , \quad (k) = I, II.$$

De  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$  etc. et, si  $T = n\pi/\omega$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega x^0) dx^0 = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega x^0) dx^0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^T \sin(\omega x^0) \cos(\omega x^0) dx^0 = 0,$$

on déduit

$$A_{\pm}^{\mu} = \cos(\omega x^0)(a^{I\mu} \pm b^{II\mu}) + \sin(\omega x^0)(a^{II\mu} \mp b^{I\mu}),$$

$$A^{\mu} = \cos(\omega x^0)a^{I\mu} + \sin(\omega x^0)a^{II\mu},$$

et

$$W_{\pm} = \frac{1}{T} \int \int A_{\pm}^{\mu} J_{\mu} dx^0 d\vec{r} = \frac{1}{2} \int (a^{I\mu} J_{\mu}^I + a^{II\mu} J_{\mu}^{II}) d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{T} \int \int A^{\mu} J_{\mu} dx^0 d\vec{r} = W,$$

car

$$\frac{1}{2} \int (b^{II\mu} j_{\mu}^I - b^{I\mu} j_{\mu}^{II}) d\vec{r} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$(j^{I\mu}(\vec{r}') j_{\mu}^{II}(\vec{r}) - j^{II\mu}(\vec{r}') j_{\mu}^I(\vec{r})) d\vec{r} d\vec{r}' = 0.$$

Ainsi,  $W$  est indépendant du choix du potentiel. Ce résultat demeure vrai pour  $W_S$  et  $W_H$ , quelle que soit la place donnée aux termes  $b^{(k)\mu}$  dans la décomposition de  $W_{\pm}$ .

*B - Décomposition du potentiel en potentiels statique et hertzien.*

Supposons  $j^{\mu}(\vec{r})$  définie sur une petite région de l'espace (de la taille par exemple d'un atome) entourant le point  $O$ . A une grande distance de la région, on peut pratiquement négliger  $\vec{r}'$  par rapport à  $\vec{r}$  dans les opérations de dérivation qui s'introduisent dans le calcul du champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$ . Alors il apparaît que ce champ est décomposé

en deux parties, l'une, le champ statique, qui contient le facteur  $1/r^2$ , l'autre, le champ à grande distance, ou champ hertzien, qui contient le facteur  $\omega/r$  à cause de la présence de  $\cos(\omega |\vec{r} - \vec{r}'|)$  dans (5), et qui s'annule donc si  $\omega = 0$ , c'est-à-dire si le courant est indépendant du temps.

Nous avons repris pour introduire la décomposition (9) du potentiel, un point de vue que nous avons déjà développé dans [12] pour le potentiel de Liénart et Wiécher, qui consiste à faire apparaître dans le potentiel ce qui donne un champ statique et un champ à grande distance.

C - *Décomposition de  $\cos(\omega R) - 1$ .*

On a dans le plan complexe des  $z = x + iy$ , si  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{b} \left[ \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(b+x)} dx + vp \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(b-x)} dx \right] \\ &= vp \int_0^\infty \frac{2 \sin(ax)}{x(x^2 - b^2)} dx \\ &= Im \left[ vp \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x(x^2 - b^2)} dx \right] = Im[L]. \end{aligned}$$

Posant

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 - b^2)}$$

intégrant sur un contour en demi-lune du demi-plan supérieur évitant les trois pôles, d'ordre 1, situés sur l'axe réels, et puisqu'il n'y a pas d'autres points singuliers, on obtient,

$$L - i\pi(\text{Res}(f, -b) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, b)) = 0,$$

soit

$$J = Im \left[ i\pi \left( \left[ \frac{e^{iaz}}{z(z-b)} \right]_{z=-b} + \left[ \frac{e^{iaz}}{z^2 - b^2} \right]_{z=0} + \left[ \frac{e^{iaz}}{z(z+b)} \right]_{z=b} \right) \right],$$

$$J = \frac{\pi}{b^2} (\cos(ab) - 1).$$

D - *L'équation de Maxwell, en jauge de Coulomb.*

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^{02}} - \Delta \vec{A} + \nabla \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = 4\pi \vec{J}(x^0, \vec{r}) \quad \text{où } \nabla \cdot \vec{A} = 0,$$

$$\Delta A^0 = -4\pi J^0(x^0, \vec{r}),$$

admet une solution de la forme (voir [6], Appendix B)

$$\vec{A}(x^0, \vec{r}) = 4\pi \left( -\frac{1}{(2\pi)^4} \right) \int \int \int \int \frac{e^{-i(k_0(x^0 - x'^0) - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))}}{k_0^2 - k^2} \vec{J}^\perp(x'^0, \vec{r}', \vec{k}) dk_0 d\vec{k} dx'^0 d\vec{r}'$$

$$A^0(x^0, \vec{r}) = 4\pi \left( -\frac{1}{(2\pi)^4} \right) \int \int \int \int \frac{e^{-i(k_0(x^0 - x'^0) - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))}}{k^2} J^0(x'^0, \vec{r}') dk_0 d\vec{k} dx'^0 d\vec{r}'$$

avec

$$\vec{J}^\perp(x^0, \vec{r}, \vec{k}) = \vec{J}(x^0, \vec{r}) - \left[ \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{J}(x^0, \vec{r}) \right] \frac{\vec{k}}{k} \quad \text{où } k = |\vec{k}|.$$

On va intégrer sur  $k_0$  et  $x'^0$ , comme en [5] : Envisageant une fonction de  $x'^0$  de la forme  $\exp(i\omega x'^0)$ , et faisant le changement de variable  $\omega + k_0 = u$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0(x^0 - x'^0)}}{k_0^2 - k^2} e^{i\omega x'^0} dk_0 dx'^0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - u)x^0}}{(\omega - u)^2 - k^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu x'^0} dx'^0 \right) du \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - u)x^0}}{(\omega - u)^2 - k^2} \left[ \frac{e^{iu x'^0}}{iu} \right]_{-\lambda}^{\lambda} du \\ &= 2\pi \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - u)x^0}}{(\omega - u)^2 - k^2} \cdot \frac{\sin \lambda u}{\pi u} du \\ &= \frac{2\pi e^{i\omega x^0}}{\omega^2 - k^2}, \end{aligned}$$

par application du théorème de Dirichlet.

On en déduit que si

$$\vec{J}(x^0, \vec{r}) = \sin(\omega x^0) \vec{j}(\vec{r}) \quad , \quad J^0(x^0, \vec{r}) = \sin(\omega x^0) j^0(\vec{r})$$

on a

$$\vec{A}(x^0, \vec{r}) = \sin(\omega x^0) \vec{a}(\vec{r}) \quad , \quad A^0(x^0, \vec{r}) = \sin(\omega x^0) a^0(\vec{r}),$$

avec

$$\vec{a}(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi^2} \int \int \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))}}{\omega^2 - k^2} \vec{j}^\perp(\vec{r}', \vec{k}) d\vec{r}' = -\frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}}{\omega^2 - k^2} \vec{T}^\perp(-\vec{k}) d\vec{k}$$

où

$$\vec{T}^\perp = \int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}\vec{j}^\perp(\vec{r}', \vec{k})d\vec{r}' = \left[ \int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}\vec{j}(\vec{r}')d\vec{r}' \right]^\perp,$$

$$a^0(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \int \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))}}{k^2} j^0(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{1}{2\pi^2} \int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} T^0(-\vec{k}) \frac{d\vec{k}}{k^2}.$$

De

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \int e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))} \frac{d\vec{k}}{k^2}$$

et

$$-\frac{1}{\omega^2 - k^2} - \frac{1}{k^2} = -\frac{\omega}{2k^2} \left( \frac{1}{\omega - k} + \frac{1}{\omega + k} \right),$$

on déduit que  $a^0 = a_S^0$  et on définit  $\vec{a}_H$  de la même façon qu'en jauge de Lorentz. On a de plus  $\vec{T}^\perp(-\vec{k}) \cdot \vec{T}^\perp(\vec{k}) = \vec{T}^\perp(-\vec{k}) \cdot \vec{T}^\perp(\vec{k})$ .

E - *Convergence des intégrales.*

Il convient de préciser le sens des intégrales (15), (18), (19), (21), (22) à la limite où  $k$  devient infini. Elles sont à considérer en tant qu'intégrales sur l'espace  $E^3$  des vecteurs  $\vec{k}$ , comme la limite d'une intégrale étendue à une boule sphérique dont le rayon augmente indéfiniment, donc au sens d'une valeur principale de Cauchy pour l'intégration dans  $E^3$ , et non au sens ordinaire.

Par ailleurs, pour la limite inférieure de leur domaine d'intégration, les deux intégrales de (14) sont des intégrales ordinaires, et elles sont absolument convergentes pour la limite supérieure. Par suite la décomposition (17) est légitime. (Remarquons que  $W_S$  ne se décompose pas). Enfin, puisqu'on a supposé que l'intégrale (20) était convergente, et par suite, comme intégrale sur  $R^3$ , absolument convergente, il en résulte que (16) est convergente.

*Approximation dipolaire, effet éventuel d'un "cut-off".* L'approximation dipolaire consiste à remplacer  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}$  par 1 dans les fonctions à intégrer. Alors, l'intégrale (16) reste convergente (pour donner (20)) mais (22) diverge linéairement à l'infini, la divergence de (18) et (19) étant "seulement" logarithmique. Il en résulte que dans certains cas (un exemple

précis sera traité dans l'étude II), un cut-off convenable de (19) peut donner un résultat très voisin de la valeur de l'intégrale convergente qu'on obtient sans approximation.

## Références

- [1] B. Blaive, R. Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie
- [2] H. Bethe, Phys. Rev., 72, 339 (1947)
- [3] W. Lamb, R. Rethford, Phys. Rev., 72, 241 (1947)
- [4] M. Crisp, E. Jaynes, Phys. Rev., 179, 1253 (1969)
- [5] A. Barut, J. Kraus, Found. Phys., 13, 189 (1983)
- [6] A. Barut, J. Van Huele, Phys. Rev., A, 32, 3187 (1985)
- [7] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, third edition, Oxford (1954)
- [8] L. Ballentine, Rev. Mod. Phys., 43, 358 (1970)
- [9] R. Boudet, J. Math. Phys., 26, 718 (1985)
- [10] J. Dalibard, J. Dupont-Roc, C. Cohen-Tannoudji, J. Phys., 43, 1617 (1982)
- [11] R. Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie, 13-1, 105 (1988)
- [12] R. Boudet, Atti d. Acc. d. Sc. d. Torino, 102, 413, (1967-68).
- [13] N. Kroll, W. Lamb, Phys. Rev., 75, 388 (1949)
- [14] F. Dyson, Phys. Rev., 73, 617 (1948)
- [15] H. Hoffman, H. Moses, Nuovo Cimento Lett. 4, 54 (1972)
- [16] C.K. Au, G. Feinberg, Phys. Rev. A, 9, 1794 (1974)
- [17] H. Grotch, Am. J. Phys., 49, 48 (1981)
- [18] J. Schwinger, Phys. Rev., I) 74, 1439 (1948) ; II) 75, 651 (1949) ; III) 76, 790 (1949)
- [19] Bogoliubov & Chirkov, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod, Paris (1960)
- [20] R. Passante, E. Power, Phys. Lett. A, 122, 14 (1987)
- [21] K. Haller, R. Sohn, Phys. Rev. A, 20, 1541 (1979)

(Manuscrit reçu le 29 septembre 1988)