# Propriétés dynamiques des particules matérielles et des ondes stationnaires du champ

C. Elbaz

17 rue des Jockos
92330 Sceaux

RESUME. La fonction d'amplitude $u$ d'une particule matérielle vérifie une équation de continuité pour le produit $uu^*mv$ et qui, pour une particule ponctuelle, coïncide avec la relation fondamentale de Newton de la dynamique. Elle vérifie également la condition de normalisation $\int uu^* n \cdot ds = 1$. Le produit $uu^*$ peut être considéré comme une "densité de probabilité de courant d'interaction".

*ABSTRACT. The amplitude function u of a material particle verifies a continuity equation for the product* $uu^*mv$ *which coincides for a point-like particle, with the Newton's law of dynamics. It satisfies the normalization condition* $\int uu^* n \cdot ds = 1$. *The product* $uu^*$ *can be associated with an "interaction probability current density".*

## 1. Introduction

En se basant sur les résultats de L. de Broglie [1], nous avons montré, dans un travail précédent, comment les propriétés cinématiques des ondes stationnaires du champ de célérité $c$, vitesse de la lumière, sont formellement identiques aux propriétés cinématiques des particules matérielles [2]. Les équations de la mécanique relativiste pour une particule correspondent à l'approximation de l'optique géométrique pour l'onde stationnaire, et les équations de la mécanique quantique correspondent à celle de la diffraction.

L'onde stationnaire du champ, obtenue par superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverse, se comporte comme une nouvelle entité physique, douée de propriétés spécifiques distinctes des ondes progressives composantes. Lorsque les fréquences composantes

$\omega_0$ sont identiques, l'onde stationnaire correspondante est au repos, en ce sens que les points caractéristiques, comme les noeuds d'amplitude, restent immobiles dans l'espace. Lorsque les fréquences $\omega_1$ de l'onde retardée et $\omega_2$ de l'onde avancée sont différentes, on obtient une onde stationnaire de fréquence propre $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ en translation de vitesse $v = c(\omega_1 - \omega_2)/(\omega_1 + \omega_2)$. La fréquence en mouvement est alors $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Les propriétés cinématiques des ondes stationnaires du champ, y compris la transformation de Lorentz, correspondent, soit à une vitesse de translation $v$ parfaitement constante, (onde plane, propagation en ligne droite), soit à une vitesse $v(x,t)$ localement constante seulement (approximation de l'optique géométrique, propagation par rayons, déplacement d'un point matériel sur une trajectoire), et sont formellement identiques aux propriétés cinématiques des particules matérielles [2][3].

Les propriétés dynamiques de la particule matérielle, sont basées sur la loi de Newton

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \tag{1}$$

qui relie la variation de sa vitesse $v$ à une force extérieure $F$, se propageant à une vitesse finie, et exercée par l'intermédiaire d'un champ d'interaction.

Dans le modèle standard généralement admis, aussi bien en mécanique relativiste qu'en mécanique quantique, la particule matérielle est distincte physiquement et géométriquement du champ extérieur dont elle constitue une singularité. Les équations qui décrivent son mouvement, comme l'équation de Hamilton-Jacobi en mécanique relativiste, ou l'équation de Klein-Gordon ou de Dirac en mécanique quantique, sont du genre temps. D'un point de vue physique, elles sont incomplètes car elles ne permettent pas de prendre en compte une structure quelconque, ou une interaction, de la particule : ces propriétés sont décrites par des équations purement spatiales dans le repère au repos, comme les lois de Coulomb en électromagnétisme et de Newton en gravitation, et qui sont par conséquent du genre espace dans le cas général. Ces interactions sont de portée infinie et couvrent par conséquent tout l'espace excepté la singularité-source elle-même. Dans les deux cas, si $E_p$ est l'énergie potentielle de la particule,

$$F = -\nabla E_p \tag{2}$$

de sorte que la relation fondamentale de la dynamique (1) est

$$\frac{d(mv)}{dt} + \nabla E_p = 0 \tag{3}$$

En associant une onde stationnaire du champ de célérité $c$ à toute particule matérielle, nous avons défini une fonction d'amplitude $u(x,t)$, du genre espace [3], liée par conséquent aux interactions et jouant un rôle complémentaire vis à vis de la fonction d'onde $\psi$. Dans ce travail, nous proposons d'étudier les propriétés dynamiques, c'est-à-dire liées aux variations de la vitesse $v(x,t)$ d'ensemble, de l'onde stationnaire. Nous montrerons, en particulier, que la loi de Newton (1) peut être déduite, dans l'approximation ponctuelle, d'une relation plus générale de la fonction d'amplitude $u$. Cette relation nous permettra en outre de définir la condition de normalisation de la fonction $u$, et de proposer une interprétation causale de l'expérience d'Aspect.

## 2. Onde stationnaire du champ et particule matérielle

L'onde stationnaire du champ de célérité $c$, associée à une particule matérielle libre d'énergie propre [1]

$$E = mc^2 = \hbar\omega \tag{4}$$

est solution du d'Alembertien

$$\Box\epsilon = 0 \tag{5}$$

et est le produit de la fonction d'amplitude $u$ et de la fonction d'onde $\psi$ de la mécanique quantique

$$\epsilon(x,t) = u(x,t)\psi(x,t) \tag{6}$$

qui vérifient les relations

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 u = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla u \cdot \nabla \psi = 0 \tag{9}$$

Avant d'étudier les propriétés de continuité de la fonction d'amplitude $u$, en relation avec les propriétés dynamiques de la particule matérielle, nous rappelerons rapidement les propriétés de continuité, bien connues, de la fonction d'onde $\psi$. Elles nous serviront de base de comparaison, et de transposition pour $u$.

## 3. Equations de continuité pour la fonction d'onde

### 3.1 Propagation de la fonction d'onde

A partir des solutions planes de l'équation de Klein-Gordon (7), et, plus généralement à partir des opérateurs énergie et impulsion de la mécanique quantique relativiste

$$E\psi = mc^2\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10}$$

$$\vec{p}\psi = m\vec{v}\psi = -i\hbar\nabla\psi \tag{11}$$

qui conduisent à

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla\psi = 0 \tag{12}$$

et, après multiplication scalaire par la vitesse de phase $V$ telle que

$$\vec{V} \cdot \vec{v} = c^2 \tag{13}$$

on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + V \cdot \nabla\psi = 0 \tag{14}$$

Cette relation montre que la fonction d'onde se propage à la vitesse de phase $V$ supérieure à la vitesse de la lumière [1]. En mécanique quantique, on évite en général les problèmes soulevés par le caractère supraluminal de la propagation de la fonction d'onde $\psi$, soit en restant dans l'approximation nonrelativiste pour l'énergie (11), auquel cas $V = v/2$, soit en attribuant à $\psi$ un caractère abstrait excluant toute interprétation trop physique pour (14).

### 3.2 Propagation du paquet d'onde

Pour obtenir les propriétés de propagation du paquet d'onde, dont la vitesse de groupe est égale à la vitesse de la particule [1], on peut considérer le produit $\psi\psi^*$ à partir de l'équation de Klein-Gordon (7) en mécanique quantique relativiste. En écrivant que les solutions complexes sont de la forme [5]

$$\psi = a(x,t)e^{i\frac{S(x,t)}{\hbar}} = a(x,t)e^{-\frac{i}{\hbar}[Et-p\cdot x]} \tag{15}$$

où $a(x,t)$ et $S(x,t)$ sont des fonctions réelles, on obtient

$$\psi\psi^* = a^2(x,t) \tag{16}$$

En portant (15) dans (7) on trouve

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\frac{\partial S}{\partial t}\right) - \nabla\cdot(a^2\nabla S) = 0 \tag{17}$$

soit encore, en tenant compte de (15)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^* m) + \nabla\cdot(\psi\psi^* mv) = 0 \tag{18}$$

C'est une équation de continuité qui exprime la conservation du produit

$$\mu = \psi\psi^* m \tag{19}$$

qui se comporte comme une masse volumique qui se propage à la vitesse $v$ de la particule [5]. Pour une particule ponctuelle, la masse $m$ est une distribution qui ne dépend que de la position. En intégrant $\mu$ dans tout l'espace, on retrouve la condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\int \mu d\mathcal{V} = m = \int \psi\psi^* m d\mathcal{V} = m\int \psi\psi^* d\mathcal{V} \tag{20}$$

D'où

$$\int \psi\psi^* d\mathcal{V} = 1 \tag{21}$$

La vitesse $v$ étant également une distribution ne dépendant que de la position, et donc telle que [6]

$$\nabla\cdot v = 0 \tag{22}$$

on obtient à partir de (18)

$$\nabla \cdot (\psi\psi^* m v) = v \cdot \nabla \psi\psi^* m \tag{23}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v \cdot \nabla \mu = \frac{D\mu}{Dt} = \frac{D(\psi\psi^* m)}{Dt} = 0 \tag{24}$$

Le produit $\psi\psi^* m$ est invariant par translation de vitesse $v$. En mécanique quantique non relativiste, la masse $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est pratiquement constante, et dans (18) et (24) c'est $\psi\psi^*$ qui est conservatif et se déplace à la vitesse $v$.

Comme nous l'avons déjà mentionné, ces différents résultats pour $\psi$ sont bien connus. Nous les avons rappelés pour pouvoir les comparer avec les propriétés correspondantes de $u$.

## 4. Equations de continuité pour la fonction d'onde

### 4.1 Propagation de la fonction d'amplitude

En portant (10) et (11) dans (9) on obtient directement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u = 0 \tag{25}$$

La fonction d'amplitude est donc invariante par translation de vitesse $v$, vitesse de la particule, qu'elle accompagne dans son mouvement [2]. La fonction $u(x, t)$, où $x$ est une coordonnée quelconque de l'espace, distincte ou non de la position de la particule ponctuelle, est bien apte à décrire l'interaction de la particule [3].

### 4.2 Propagation du paquet d'onde

En écrivant les solutions complexes de l'équation d'amplitude (8) sous la forme

$$u = b(x, t) e^{i\frac{T(x,t)}{\hbar}} = b(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar}[mvct - mc\vec{n}\cdot\vec{x}]} \tag{26}$$

où $b(x, t)$ et $T(x, t)$ sont des fonctions réelles, on a

$$uu^* = b^2(x, t) \tag{27}$$

En portant (26) dans (8) on obtient

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(b^2\frac{\partial T}{\partial t}\right) - \nabla\cdot(b^2\nabla T) = 0 \tag{28}$$

soit encore

$$\frac{\partial}{\partial t}(uu^*mv) + \nabla\cdot(uu^*mc^2\vec{n}) = 0 \tag{29}$$

Lorsqu'on tient compte de (13) on peut écrire

$$mc^2\vec{n} = mv\vec{V} \tag{30}$$

L'équation (29) apparaît alors comme une équation de continuité

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + \nabla\cdot\pi V = 0 \tag{31}$$

pour le produit

$$\pi = uu^*mv \tag{32}$$

avec la vitesse supraluminale $V$. Le produit est bien associé à un paquet d'onde d'amplitude de vitesse de propagation $V$ [3]. Les équations (25) et (31) pour la fonction d'amplitude montrent une complète symétrie avec les équations (14) et (18) pour la fonction d'onde.

En anticipant les résultats établis plus loin, et en admettant que $u$ peut être normalisé, on peut omettre la présence de $uu^*$ dans (31) puisqu'on obtient l'unité par intégration. L'équation (29) exprime alors que l'impulsion $mv$ de la particule matérielle est conservative et se propage à la vitesse supraluminale $V$.

Le premier terme de cette propagation n'appelle pas de remarque particulière. Par contre, le second terme mérite un examen. De plus, dans l'équation (29), l'impulsion intervient par son module, c'est-à-dire par un scalaire, alors que l'énergie propre est dirigée, et intervient par un vecteur.

Ce sont ces questions que nous proposons d'étudier.

## 5. Conséquences

### 5.1 Normalisation de la fonction d'amplitude

En intégrant l'équation (29) dans l'espace, on trouve que la quantité totale d'impulsion quittant, par unité de temps, un volume $\mathcal{V}$ contenant la particule matérielle

$$\frac{\partial}{\partial t}\int uu^* d\mathcal{V} = -\oint uu^* mc^2 \vec{n}\cdot d\vec{S} \tag{33}$$

est égale flux total d'énergie propre entrant dans la surface fermée $S$ entourant le volume $\mathcal{V}$. Pour une particule ponctuelle l'énergie propre $mc^2$ est bien localisée dans l'espace, et donc indépendante des coordonnées d'espace quand on intègre sur toute la surface $S$. En prenant $mc^2$ pour constante d'intégration, on obtient la condition de normalisation pour la fonction $u$

$$\oint uu^* n\cdot dS = 1 \tag{34}$$

Lorsque la particule est au repos, la fonction d'amplitude (8) devient [3],

$$\nabla^2 u_0 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 u_0 = 0 \tag{35}$$

et admet comme solution de symétrie sphérique

$$u_0 = \frac{a}{r} e^{-i(\frac{m_0 c}{\hbar})r} \tag{36}$$

avec $a$ constant. En faisant $v = 0$, $m = m_0$ et $\vec{n} = \vec{r}/r$ dans (29) on trouve

$$\nabla \cdot (u_0 u_0^* \vec{r}/r) = 0 \tag{37}$$

qui admet comme solution de symétrie sphérique

$$u_0 u_0^* = \frac{a^2}{r^2} \tag{38}$$

comme on peut le vérifier à partir de

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0 \tag{39}$$

En intégrant (33) sur une surface sphérique de rayon $r$ contenant la particule, on obtient d'après (34)

$$\int u_0 u_0^* n \cdot dS = \frac{a^2}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi a^2 = 1 \tag{40}$$

soit

$$a = 1/\sqrt{4\pi} \tag{41}$$

La solution sphérique (38) normalisée, s'écrit par conséquent

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi} r} e^{-i(\frac{m_0 c}{\hbar})r} \tag{42}$$

## 5.2 Relation fondamentale de la dynamique

Pour une particule ponctuelle, la fonction d'amplitude qui est du genre espace, est nécessairement associée à une interaction [3]. L'équation de continuité (29) correspond alors à la loi de Newton de la dynamique (1), comme nous proposons de le montrer.

L'équation d'amplitude d'une particule ponctuelle [2]

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 - (\nabla T)^2 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 = 0 \tag{43}$$

correspond à la propagation des fronts d'onde de l'équation (8). On l'obtient à partir de (8) en faisant $b$ constant dans (26) [2]. Il en résulte que le produit $uu^*$ est constant das (29), d'où

$$\frac{\partial(mv)}{\partial t} + \nabla \cdot (mc^2 \vec{n}) = 0 \tag{44}$$

L'impulsion $mv$ de la particule ponctuelle est une distribution ne dépendant que de la position [6],

$$\frac{\partial(mv)}{\partial t} = \frac{d(mv)}{dt} \tag{45}$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ étant dirigé suivant la vitesse de déplacement de la particule

$$mv = m\vec{v} \cdot \vec{n} \tag{46}$$

et

$$\nabla \cdot (mc^2\vec{n}) = \vec{n} \cdot \nabla mc^2 \tag{47}$$

La particule de masse $m$ se comporte comme un réservoir d'énergie $E = mc^2$, qui est une énergie cinétique relativiste [6]. Cette énergie varie mécaniquement pendant les accélérations, les chocs, les désintégrations, ou physiquement par interaction avec un champ comme les champs électrique ou gravitationnel. Dans ces derniers cas, l'augmentation de son énergie propre [5]

$$dE = d(mc^2) = -dE_p \tag{48}$$

est égale à la diminution de son énergie potentielle d'interaction avec le champ, qui exerce sur la particule la force

$$F = -\nabla E_p = -\nabla mc^2 \tag{49}$$

En portant (45) (46) (47) et (49) dans (44) on retrouve bien l'équation fondamentale de la dynamique (1) écrite sous la forme (3).

### 5.3 Interaction supraluminale

On peut, comme en mécanique quantique faire l'économie des problèmes posés par une vitesse supraluminale $V$, en remarquant que dans l'équation originelle (29), mis à par les termes $uu^*$ qui, pour une particule ponctuelle sont constants et donc n'interviennent pas dans (44), tous les termes ont une signification expérimentale, et sont susceptibles d'être mesurés. On peut alors considérer que la forme mathématiquement équivalente (31) est dénuée d'intérêt physique, puisque, d'après la relativité, une interaction, et, plus généralement un signal, ne peuvent pas se propager avec une vitesse supérieure à $c$.

On remarque cependant que le cadre de tout cet article est relativiste et que la vitesse supraluminale $V$ intervient dans la transformation de Lorentz du temps, pour déterminer la non-simultanéité de deux évènements dont l'intervalle est du genre espace [6].

$$s^2 = x^2 - c^2t^2 > 0 \tag{50}$$

Considérons deux particules ponctuelles identiques $A$ et $B$, au repos dans le même système de référence. Leur distance $x = x_A - x_B$ est supposée suffisamment grande pour que leur interaction puisse être négligée. Les deux particules sont indépendantes : on peut agir sur l'une sans perturber l'autre.

Supposons que, à l'instant $t = 0$, on agisse sur $A$ en lui communiquant une vitesse constante $v$ dans la direction de $B$. A cause du mouvement relatif, et à partir de (50), la non-simultanéité das la détermination des vitesses de $A$ et $B$, se fera avec un délai

$$\Delta t = x\frac{v}{c^2} = \frac{x}{V} \tag{51}$$

Pour un observateur lié à $B$, c'est au bout de ce délai seulement que $A$ sera en mouvement. Réciproquement, pour un observateur lié à $A$, c'est $B$ qui se sera mis en mouvement à l'instant $\Delta t$ alors que l'action s'est exercée sur $A$ seulement, sans se propager jusqu'à $B$. Tout se passe comme si la vitesse $v$, ou l'impulsion $mv$, s'était propagée dans le vide, à la vitesse $V$, pour passer d'une particule à l'autre, qui, elles, restent à leur place. Il n'y a aucune transmission d'énergie, ou de signal, entre $A$ et $B$, et $V$ est seulement une vitesse de phase. Ces propriétés sont bien connues en relativité, et concernent des intervalles du genre espace (50). L'équation d'amplitude (8) étant du genre espace, il n'est pas surprenant qu'on les retrouve dans l'équation de continuité (31) qui en découle directement.

Si, au lieu de l'impulsion on considère le spin, qui a aussi la propriété d'être défini ponctuellement avec la particule, et donc de correspondre au même évènement, toutes les hypothèses énumérées plus haut coïncident avec les conditions expérimentales de l'expérience d'Aspect [8][9]. Les propriétés de la fonction d'onde $\psi$, définies indépendamment de $u$ à partir de l'équation de Klein-Gordon (7), ou encore de l'équation de Dirac qui vérifie (7) ou de l'équation de Schroedinger non-relativiste qui en découle, montrent que toutes les considérations précédentes sont extérieures à la problématique de la mécanique quantique, et ne peuvent pas participer aux débats, comme celui sur la non-séparabilité, auxquels elle peut donner lieu [10][11].

Toutefois, compte tenu de la relation (9) entre les fonctions $u$ et $\psi$, et de la grande symétrie entre leurs propriétés [2][3], elles peuvent apporter un éclairage extérieur.

Ainsi, la fonction d'onde $\psi$, du genre temps, est apte à décrire l'évolution d'une particule ponctuelle, considérée comme une entité autonome caractérisée par ses coordonnées. Par contre, elle ne permet pas de décrire une structure interne [7]. Dans le cas de deux particules identiques sans interaction entre elles, elle est apte à décrire l'évolution de l'ensemble, considéré comme un tout unique, mais pas l'évolution relative des deux particules, ce qui reviendrait à décrire une structure interne.

## Références

[1] L. de Broglie, Thèse 1924, Rééd. *Recherches sur la Théorie des Quanta*, Masson 1963.
[2] C. Elbaz, Ann. Fond. de Broglie 11, (1986), 65.
[3] C. Elbaz, Phys. Lett. A 114, (1986), 445.
[4] C. Elbaz, C.R. Ac. Sc. Paris 297 II, (1983), 457.
[5] R. Furth, *Fundamental principles of modern theoretical physics*, Pergamon 1970, 35, 178.
[6] L. Landau & E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1965.
[7] C. Elbaz, Phys. Lett. A 123, (1987), 205.
[8] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, (1982), 91.
[9] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, (1982), 1804.
[10] G. Lochak, Epistemological Lett. 6, (1975), 41.
[11] B. d'Espagnat, Phys. Reports. 140, (1984), no. 6.

*(Manuscrit reçu le 21 janvier 1988)*