# Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de Dirac

O. Costa de Beauregard

Institut Henri Poincaré
11 rue P. et M. Curie, 75005 Paris

RESUME. Franz, en 1935, a systématiquement déduit de l'équation de Dirac 10 équations tensorielles, 5 à interprétation "mécanique", 5 à interprétation électromagnétique, qui sont aussi conséquences du formalisme de Kemmer pour les spins 1 et 0 ; Durand, en 1944, a opéré de même sur l'équation du second ordre de Dirac, obtenant notamment 5 équations exprimant les divergences des tenseurs du type Gordon $\overline{\psi}[\partial_i]\gamma\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\gamma\psi$. Certaines de ces équations, et des tenseurs qu'elles impliquent, s'interprètent aisément par référence aux théories classiques ; d'autres restent ininterprétées. Récemment (1988) nous avons proposé une théorie du couplage entre le champ gravitationnel d'Einstein et les 5 équations "mécaniques" de Franz, qui a livré "en prime" l'interprétation complète de ces 5 équations "mécaniques". Il y a là une incitation à réexaminer les 5 équations "électromagnétiques". On montre ici que deux de ces équations, ainsi que l'une des équations de Durand, impliquant le même tenseur $\overline{\psi}[\partial_i]\gamma_j\gamma_5\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\gamma_j\gamma_5\psi$, restent ininterprétées. Ce challenge est proposé à la sagacité du lecteur ...

*ABSTRACT. Franz, in 1935, deduced systematically from the Dirac equation 10 tensorial equations, 5 with a "mechanical" interpretation, 5 with an electromagnetic interpretation, which are also consequences of Kemmer's formalism for spins 1 and 0; Durand, in 1944, operating similarly with the second order Dirac equation, obtained 10 equations, 5 of which expressing the divergences of the Gordon type tensors* $\overline{\psi}[\partial_i]\gamma\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\gamma\psi$. *Of these equations, together with the tensors they imply, some are easily interpreted by reference to the classical theories, some other remain uninterpreted. Recently (1988) we proposed a theory of the coupling between Einstein's gravity field and the 5 Franz mechanical equations, yielding as a bonus the complete interpretation of the 5 Franz "mechanical" equations. This is an incitation to reexamine the 5 "electromagnetic" equations. We* *show here that two of these, together with one of the Durand equations, implying the same tensor $\overline{\psi}[\partial_i]\gamma_j\gamma_5\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\gamma_j\gamma_5\psi$, remain uninterpreted. This is proposed as a challenge to the reader's sagacity ...*

Franz [1], suivi par Kofink [2], a déduit systématiquement de l'équation de Dirac dix équations tensorielles, en multipliant à gauche l'équation de Dirac par $\overline{\psi}\gamma$, et son adjointe à droite par $\gamma\psi$, avec, successivement, $\gamma = 1, \gamma^i, \gamma^i\gamma^j, \gamma^i\gamma^j\gamma^k, \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \equiv \gamma^5$, $(i,j,k,l = 1,2,3,4; x^4 = ict)$, ajoutant et retranchant. Ces équations se scindent en deux systèmes de 5 équations découplées en l'absence, mais couplées en présence d'un 4-potentiel électromagnétique $A^i$. L'un de ces systèmes a une interprétation mécanique, l'autre a une interprétation électromagnétique [3, pp. 152-158]. Ils portent sur 10 tenseurs, 5 de type Dirac $\overline{\psi}\gamma\psi$, 5 de type Gordon $(i/2)\overline{\psi}[\partial_i]\gamma\psi + \varepsilon A_i\overline{\psi}\gamma\psi$ ; $[\partial_i] \equiv \underset{\rightarrow}{\partial_i} - \underset{\leftarrow}{\partial_i}$ note l'opérateur du courant de Gordon, $-e = -c\hbar\varepsilon$ la charge, $m = (\hbar/c)k$ la masse de l'électron. Le mutuel couplage par $A^i$, exprimé par le terme "potentiel" $A_i\overline{\psi}\gamma\psi$ dans les tenseurs du type de Gordon, contient un tenseur du type Dirac, dont la nature, mécanique ou électromagnétique, est opposée à celle de ce tenseur ; en ce sens, "le couplage électro-mécanique est symétrique".

Durand [4], opérant comme Franz sur l'équation du second ordre de Dirac, a déduit 10 équations tensorielles dont 5 expriment les divergences sur $i$ des tenseurs du type Gordon, en fonction d'un produit contracté du champ électromagnétique ambiant $H^{ij} \equiv \partial^i A^j - \partial^j A^i$ par un tenseur du type Dirac ; là aussi il y a symétrie du couplage électro-mécanique, en ce sens que ce tenseur du type Dirac est de nature opposée à celle du tenseur de type Gordon.

Plusieurs des équations de Franz et de Durand sont isomorphes à des équations de la physique classique, et, de ce fait, aisément interprétables. D'autres, par contre, restaient ininterprétées [3].

On peut montrer, en utilisant l'algèbre des matrices $\beta$ de Petiau-Duffin-Kemmer, que les équations de Franz et de Durand sont valables aussi pour les particules de spin 0 ou 1.

Récemment, nous avons proposé [5] pour le couplage entre le champ gravitationnel d'Einstein et le champ de Dirac de spin 1/2, ou de Kemmer de spins 0 ou 1, un formalisme qui a livré "en prime" l'interprétation complète du système des 5 "équations mécaniques" de Franz. Ceci incite à réexaminer le système des 5 "équations électromagnétiques" ; un tel examen confirme que toutes les équations sus-mentionnées de Franz et de Durand sont aisément interprétables, sauf deux équations de Franz, et une équation de Durand, où figure le même “énigmatique tenseur”

$$v_{ij} = -i(e/2k)\{\overline{\psi}[\partial_i]\overline{\gamma}_j\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\overline{\gamma}_j\psi\} \quad , \quad \overline{\gamma}_i \equiv \gamma_i\gamma_5 \tag{1}$$

sans antécédent classique connu. La phénoménologie de ce tenseur, telle qu’exprimée dans ces trois équations, reste donc assez mystérieuse. Parvenir à interpréter ce tenseur, et trouver comment se manifeste sa phénoménologie, sont proposés à la sagacité de mes lecteurs.

Les deux équations interprétées de Franz sont

$$v_{ji} - v_{ij} = (1/2)\varepsilon^{[ijkl]}(m_{[kl]} - k^{-2}[\partial_l j_k - \partial_k j_l]), \tag{2}$$

$$v_i^i = 0, \tag{3}$$

où

$$j_i = -e\overline{\psi}\gamma_i\psi \quad , \quad m_{[ij]} = -e\overline{\psi}[\gamma_i\gamma_j]\psi, \tag{4}$$

notent respectivement la 4-densité de courant électrique et la 6-densité de polarisation magnéto-électrique de Dirac ; l’équation ininterprétée de Durand est

$$\partial_j v^{ji} = (e/c\hbar k)^2 H^{ik}\sigma_k \tag{5}$$

où

$$\sigma_{[ijk]} = (\hbar/2)\overline{\psi}[\gamma_i\gamma_j\gamma_k]\psi \tag{6}$$

note la densité de spin de Dirac. Notant

$$l_i = (ie2/k)\{\overline{\psi}[\partial_i]\overline{\gamma}\psi - 2i\varepsilon A_i\overline{\psi}\overline{\gamma}\psi\} \quad , \quad \overline{\gamma} \equiv \gamma_5, \tag{7}$$

la densité de courant magnétique telle que [3, pp. 152-158]

$$l^i = (1/6)\varepsilon^{[ijkl]}\partial_j m_{kl} \tag{8}$$

on déduit de (5) et (8)

$$\partial_j v^{ij} = (e/c\hbar k)^2 H^{ik}\sigma_k + l^i. \tag{9}$$

Dans les équations (5) et (9) le produit $H^{ik}\sigma_k$ apparaît comme une “densité de force généralisée” agissant sur la grandeur électromagnétique $v^{ij}$, qui résiste, par son “coefficient d’inertie” $e/m$, comme, symétriquement, la densité d'impulsion-énergie $T^{ij}$ de Tetrode et la densité de spin $\tau^{i[jk]}$ de Durand résistent à la densité de force de Lorentz $H^{ik}j_k$ et à la densité de couple $H^{ik}m^j_k - H^{jk}m^i_k$ [3,4,5].

Il y a de nouveau là une "symétrie électro-mécanique", en quelque sorte analogue à celle manifestée dans les "effets gyromagnétiques". Dans la théorie pré-relativiste, le moment magnétique $\mathbf{M}$ et le moment cinétique $\mathbf{C}$ étaient considérés comme deux vecteurs colinéaires tels que $e\mathbf{C} = m\mathbf{M}$, et l'on avait donc les deux relations réciproques $d\mathbf{C}/dt = \mathbf{H} \wedge \mathbf{M}$ et $d\mathbf{M}/dt = (e/m)^2\mathbf{H} \wedge \mathbf{C}$. Ici, les deux densités $m_{[ij]}$ et $\sigma_{[ijk]}$ ou $\tau_{i[jk]}$ n'ont pas la même variance tensorielle, et ne sont donc reliées que de manière souple, par des identités du type Pauli-Kofink [3, pp. 140-150]. Leur mutuelle "action-et-réaction" est donc, elle aussi, assez indirecte.

Il reste que la recherche théorico-expérimentale de l'interprétation et de la phénoménologie de l'énigmatique tenseur $v^{ij}$, dans un domaine à peu près totalement inexploré, conduirait peut-être un chercheur doué d'intuition à des choses intéressantes.

## Annexe 1 - Les 10 relations tensorielles de Franz [1]-Kofink [2]

Multipliant à gauche l'équation de Dirac pour $\overline{\psi}\gamma$ et son adjointe à droite par $\gamma\psi$,

$$(\gamma^i \underset{\rightarrow}{\partial_i} + k)\psi = 0 \quad , \quad 0 = \overline{\psi}(-\gamma^i \underset{\leftarrow}{\partial_i} + k), \tag{11}$$

avec successivement $\gamma = 1$, $\gamma^i$, $\gamma^{ij\cdots} \equiv \gamma^i\gamma^j \ldots$ si tous les indices diffèrent (zéro autrement), compte tenu des formules de commutation

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\delta^{ij}, \tag{12}$$

ajoutant et retranchant, posant,

$$[\partial_i] \equiv \underset{\rightarrow}{\partial_i} - \underset{\leftarrow}{\partial_i} \tag{13}$$

(opérateur du courant de Gordon), on définit *"5 tenseurs mécaniques"*

$$\left\{\begin{array}{rl} T = -ik\overline{\psi}\psi, & \text{densité de masse ou d'énergie propre,} \\ T^{ij} = (i/2)\overline{\psi}[\partial^i]\gamma^j\psi, & \text{densité d'impulsion-énergie de Tetrode [6],} \\ \sigma^{[ijk]} = (i/2)\overline{\psi}\gamma^{ijk}\psi, & \text{densité de spin de Dirac,} \\ \tau^{i[jk]} = (i/2k)\overline{\psi}[\partial^i]\gamma^{jk}\psi, & \text{densité de spin de Durand [4],} \\ \omega^{[ijkl]} = (i/2)\overline{\psi}\gamma^{ijkl}\psi, & \text{pseudo scalaire d'Uhlenbeck et Laporte [7]} \end{array}\right. \tag{14}$$

*"5 tenseurs électriques"* ($-e$, charge de l'électron),

$$\left\{\begin{array}{rl} j^l = -ie\overline{\psi}\gamma^l\psi, & \text{densité de courant-charge de Dirac,} \\ m^{[ij]} = -(ie/2k)\overline{\psi}\gamma^{ij}\psi, & \text{densité de polarisation de Dirac,} \\ k^i = -(ie/2k)\overline{\psi}[\partial^i]\psi, & \text{densité de courant-charge de Gordon [8],} \\ l^i = -i(e/2k)\overline{\psi}[\partial^i]\gamma^5\psi, & \text{densité de courant-charge magnétique,} \\ v^{i[jkl]} = -i(e/2k)\overline{\psi}[\partial^i]\gamma^{jkl}\psi, & \text{"tenseur énigmatique"} \end{array}\right. \tag{15}$$

l'on obtient : *"5 équations mécaniques"*

$$\left\{\begin{array}{l} T = T^i_i, \\ \partial_i T = \tau_i \equiv \tau^l_{[li]}, \\ T^{jk} - T^{kj} = \partial_i\sigma^{[ijk]}, \\ \sigma^{[ijk]} + \sum\limits_{[ijk]} \tau^{i[jk]} + \partial_l\omega^{[lijk]} = 0, \\ \sum\limits_{[ijkl]} \partial_i\sigma_{[jkl]} + k^2\omega_{[ijkl]} = 0; \end{array}\right. \tag{16}$$

et *"5 équations électriques"*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_l j^l = 0, \\ j^l + k^l + \partial_i m^{[li]} = 0, \\ v_j^{[jkl]} = m^{[kl]} - k^{-2}[\partial^k j^l - \partial^l j^k], \\ l_{[ijk]} = \sum_{[ijk]} \partial_i m_{[jk]}, \\ \sum_{[ijkl]} v_{i[jkl]} = 0 \quad \text{ou} \quad v_i^i = 0. \end{array}\right. \tag{17}$$

Nos unités sont telles que $c = 1$ et $\hbar = 1$ ; $k$ note la masse propre ou la fréqence propre de l'électron. On peut vérifier que ces 10 équations suivent aussi des équations de la particule de spin 1 de Kemmer, avec alors $\gamma \to \beta$, et les (2) étant remplacées par

$$\beta^i \beta^j \beta^k + \beta^k \beta^j \beta^i = \beta^i \delta^{jk} + \beta^k \delta^{ji}. \tag{18}$$

On voit que les deux systèmes de 5 équations de Franz sont découplées en l'absence d'un 4-potentiel $A^i$.

Elles sont couplées, et couplées "symétriquement", en présence d'un 4-potentiel $A^i$, en ce sens qu'alors $\underset{\rightarrow}{\partial_i} \to \underset{\rightarrow}{\partial_i} + ieA_i$, $-\underset{\leftarrow}{\partial_i} \to -\underset{\leftarrow}{\partial_i} + ieA_i$, et qu'alors chacun des "5 tenseurs gordoniens" $\overline{\psi}[\partial^i]\gamma\psi$ s'adjoint un "terme potentiel" $2ieA^i\overline{\psi}\gamma\psi$ contenant l'un des "5 tenseurs diraciens", $\overline{\psi}\gamma\psi$, celui-ci étant "électrique" dans un "tenseur mécanique", et vice-versa.

Notons les conséquences

$$\partial_k T^{jk} = \partial_k T^{kj} \tag{19}$$

$$\partial_i \sigma^{[ijk]} = \partial_i \tau^{i[jk]} \tag{20}$$

de (16-3) et (16-4), respectivement.

## Annexe 2 - Les 5 relations tensorielles en divergence de Durand [5]

Multipliant à gauche l'équation du second ordre de Dirac par $\overline{\psi}\gamma$ et à droite son adjointe par $\gamma\psi$,

$$[\gamma^i(i\underset{\rightarrow}{\partial_i} - eA_i) - ik][\gamma^j(i\underset{\rightarrow}{\partial_j} - eA_j + ik]\psi \equiv$$

$$[-\underset{\rightarrow}{\partial_i^i} + e^2 A_i A^i - ieA^i\underset{\rightarrow}{\partial_i} + \frac{i}{2}e\gamma^{ij}(H_{ij} + A_j\underset{\rightarrow}{\partial_i} - A_i\underset{\rightarrow}{\partial_j}) - k^2]\psi = 0$$

$$0 = \overline{\psi}[-\partial_i^i + e^2 A_i A^i - ie\underset{\leftarrow}{\partial_i}\, A^i - \frac{i}{2}e\gamma^{ij}(H_{ij} + \underset{\leftarrow}{\partial_i}\, A_j - \underset{\leftarrow}{\partial_j}\, A_i) - k^2], \tag{21}$$

où l'on a tenu compte de ce que

$$\partial_i A^i = 0 \quad , \quad H_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \tag{22}$$

et retranchant en notant que

$$(\partial_i)[\partial^i] \equiv (\underset{\rightarrow}{\partial_i} + \underset{\leftarrow}{\partial_i})(\underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i}) = \underset{\rightarrow}{\partial_i^i} - \underset{\leftarrow}{\partial_i^i}\ ,$$

l'on obtient les “5 équations en divergence de Durand” [5].

$$\left\{\begin{aligned} \partial_i k^i &= 0 \\ \partial_i T^{ij} &= H^{ik} j_k \\ \partial_i \tau^{i[jk]} &= H^{kl} m^j l - H^{jl} m^k l \\ e\partial_i v^{i[jkl]} &= k^2 \sum_{[jkl]} H_i^j \sigma^{[ikl]} \\ \sum_{[ijkl]} \partial_i l_{[jkl]} &= \partial_i l^i = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Ici encore, le “couplage électro-mécanique” est symétrique, en ce sens que le champ $H^{ij}$ gouverne l'évolution d'un “tenseur mécanique” dans (23-2) et (23-3), et d'un “tenseur électrique” dans (23-4), étant multiplié par une “source électrique” dans le premier cas et par une “source mécanique” dans le second cas. Remarquons que (17-3) se récrit, en passant au dual, sous la forme précédemment mentionnée (2), et que par conséquent

$$\partial_i v^{ij} - \partial_i v^{ji} = (1/2)\partial_i \varepsilon^{[ijkl]} m_{[kl]} = -l^j \tag{24}$$

cependant que (23-4) se récrit sous la forme (5).

## Références

[1] W. Franz, Sitz. Math. Abt. Bayer, Akad. **3**, 1935, p. 379.
[2] W. Kofink, Ann. Physik **30**, 1937, p. 91.
[3] O. Costa de Beauregard, J. Math. Pures et Appl. **22**, 1943, pp. 85-176 ; cf. pp. 151-159.
[4] E. Durand, C. R. Ac. Sci. Paris **218**, 1944, p. 36.
[5] O. Costa de Beauregard, C. R. Ac. Sci. Paris **306**, série II, 1988, pp. 747-749.
[6] H. Tetrode, Zeits. Phys. **49**, 1928, p. 858.
[7] G.E. Uhlenbeck et O. Laporte, Phys. Rev. **37**, 1931, p. 1552.
[8] W. Gordon, Zeits. Physik **50**, 1928, p. 630.

*(Manuscrit reçu le 1er octobre 1988)*