# Electromagnétisme, monopôles magnétiques et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps (1ère partie)

C. Daviau

La Lande, Pouillé-les-coteaux
44522 Mésanger

RESUME. Le formalisme de l'algèbre d'espace-temps d'Hestenes est utilisé pour: 1 – écrire les équations de l'électromagnétisme de Maxwell et de Louis de Broglie, lorsqu'il existe des monopôles magnétiques. 2 – expliquer l'équivalence entre les équations de Dirac et d'Hestenes, et élargir cette équivalence à la théorie de Lochak des monopôles magnétiques. 3 – établir qu'il peut exister des monopôles de charge magnétique très petite, 4 – (seconde partie de cet article) rapprocher les ondes des fermions de l'électromagnétisme, associer un champ électromagnétique à l'onde de Dirac, et ainsi rapprocher l'équation de Maxwell-de Broglie et l'équation de Dirac-Hestenes.

*ABSTRACT. The formalism of space-time algebra of Hestenes is used : – first to write the equations of electromagnetism of Maxwell and Louis de Broglie, when magnetic monopoles exist; – second to explain equivalence between the equations of Dirac and Hestenes, and to extend this equivalence to Lochak's theory of magnetic monopoles; – to establish that monopoles can exist with very small magnetic charge; – in the second part to compare waves of fermions and electromagnetism, to associate an electromagnetic field to Dirac's waves and to join the equation of Maxwell-de Broglie to the equation of Dirac-Hestenes.*

## Introduction:

Alors que le champ électromagnétique est un tenseur antisymétrique à six composantes réelles, l'équation de Dirac utilise une onde à quatre composantes complexes. Alors que Louis de Broglie concevait au départ l'onde associée à une particule comme évidemment liée à l'électromagnétisme, l'interprétation qui a prévalu est celle d'une onde permettant uniquement de calculer une densité de probabilité.

Or Hestenes [1] a indiqué comment construire une équation relativiste de l'électron qui ne fasse intervenir que des grandeurs réelles, des vecteurs et tenseurs construits sur le corps des réels, et qui soit équivalente à l'équation de Dirac, permettant donc d'en obtenir tous les résultats. Cette équivalence est assez curieuse, puisque l'on obtient les mêmes résultats à partir de deux équations pourtant très différentes.

Lochak [2] [3] [4] a établi que l'équation de Dirac admettait, outre la jauge électrique, une autre invariance de jauge locale si la masse est nulle. Il a montré que l'équation de Dirac permettait alors de décrire un monopôle magnétique. Il a également proposé une équation non linéaire qui peut décrire des monopôles massifs.

Le présent article décrit le formalisme de l'algèbre d'espace-temps et détaille le passage de l'équation de Dirac ou de celles de Lochak à l'équation d'Hestenes. Nous établissons les équations de l'électromagnétisme dans l'algèbre d'espace-temps, dans le cas où les lois de Maxwell sont complétées par des termes rendant compte de l'existence présumée de monopôles magnétiques, et également des termes de masse propre du photon proposés par Louis de Broglie.

Nous montrons que le champ électromagnétique peut avoir exactement la même structure algébrique que l'onde d'Hestenes de l'électron. Le rapprochement ainsi permis entre l'onde de l'électron et le champ électromagnétique nous permet, non seulement de rendre compte de monopôles qui peuvent être de charge très faible, mais amène à associer un champ électromagnétique à l'onde de Dirac, et conduit à associer les équations de Maxwell et de Dirac.

## 1 - L'ALGEBRE D'ESPACE-TEMPS

L'algèbre d'espace-temps est une algèbre de Clifford construite sur $R_4$. Il est très simple pour le physicien habitué aux matrices de Dirac de calculer dans cette algèbre d'espace-temps. Il suffit de considérer que tout vecteur d'univers:

$$A = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \tag{1-1}$$

s'écrit :

$$A = \gamma^0 A_0 + \gamma^1 A_1 + \gamma^2 A_2 + \gamma^3 A_3 = \gamma^\mu A_\mu \tag{1-2}$$

où les $\gamma^\mu$ sont les matrices de Dirac.

Ceci revient à identifier $A$ et $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$.

Rappelons que les matrices de Dirac sont des matrices unitaires $4 \times 4$ satisfaisant :

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} I_4 \tag{1-3}$$

où $I_4$ désigne la matrice unité.

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous omettrons dans les calculs les matrices unités $I_4$ ou $I_2$. Nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein. Nous utiliserons comme coordonnée temporelle $x_0 = ct$. La métrique d'espace-temps est donc ici:

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{ii} = -1 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu \tag{1.4}$$

Les matrices $\gamma^\mu$ vérifient :

$$\gamma^0 = \gamma_0 \quad , \quad \gamma_0^2 = I_4 \quad , \quad \gamma^i = -\gamma_i \quad , \quad (\gamma_i)^2 = -I_4 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad ,$$
$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu \quad , \quad \mu \neq \nu \tag{1-5}$$

Nous utiliserons ici les matrices :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j = 1,2,3 \tag{1-6}$$

Les $\sigma_j$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous aurons également besoin des matrices :

$$\gamma = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-7}$$

Le produit de deux vecteurs $A$ et $B$ est, algébriquement, simplement le produit des deux matrices $A$ et $B$. Géométriquement, c'est la somme du produit intérieur et du produit extérieur de ces deux vecteurs :

$$AB = A \cdot B + A \wedge B \tag{1-8}$$

$$A \cdot B = B \cdot A = \frac{1}{2}(AB + BA) = \vec{A} \cdot \vec{B} I_4 \tag{1-9}$$

$$A \wedge B = \frac{1}{2}(AB - BA) = -B \wedge A \tag{1-10}$$

L'algèbre d'espace-temps est, algébriquement, identique à l'espace vectoriel engendré par les $\gamma_\mu$ et leurs produits. On sait que cette algèbre est de dimension 16 sur le corps des réels. Géométriquement, cette algèbre est identique à la somme directe des algèbres extérieures construites sur l'espace-temps. Tout élément de l'algèbre d'espace-temps est la somme d'un scalaire, d'un vecteur, d'un bivecteur, d'un trivecteur ou pseudo-vecteur et d'un quadrivecteur ou pseudo-scalaire :

$$\mathcal{A} = A_s + A_v + A_b + A_t + A_p \tag{1-11}$$

Le terme scalaire est :

$$A_s = sI_4 \tag{1-12}$$

Le terme vecteur contient un vecteur d'espace :

$$A_v = \begin{pmatrix} A_0 I_2 & -A \\ A & -A_0 I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & -A \\ A & -A_0 \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

où l'on a :

$$A = \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} = \vec{A} \cdot \vec{\sigma} \tag{1-14}$$

Le produit de 2 vecteurs d'espace vérifie :

$$AB = A \cdot B + A \wedge B \tag{1-15}$$

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA) = \vec{A} \cdot \vec{B} I_2 \quad , \quad A \wedge B = \frac{1}{2}(AB - BA) = i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma} \tag{1-16}$$

Nous noterons donc $A \wedge B = iA \times B$.

Pour tout bivecteur d'espace-temps $A_b$, il existe un vecteur d'espace $E$ et un pseudo-vecteur d'espace $H$ tel que :

$$A_b = \begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix} \tag{1-17}$$

En effet un bivecteur a 6 composantes :

$$\begin{aligned}
A_b &= (\lambda_{01};\lambda_{02};\lambda_{03};\lambda_{12};\lambda_{23};\lambda_{31})\\
A_b &= \lambda_{01}\gamma^0\gamma^1+\lambda_{02}\gamma^0\gamma^2+\lambda_{03}\gamma^0\gamma^3+\lambda_{12}\gamma^1\gamma^2+\lambda_{23}\gamma^2\gamma^3+\lambda_{31}\gamma^3\gamma^1\\
&= \begin{pmatrix} -i(\lambda_{23}\sigma_1+\lambda_{31}\sigma_2+\lambda_{12}\sigma_3) & +(\lambda_{01}\sigma_1+\lambda_{02}\sigma_2+\lambda_{03}\sigma_3)\\ \lambda_{01}\sigma_1+\lambda_{02}\sigma_2+\lambda_{03}\sigma_3 & -i(\lambda_{23}\sigma_1+\lambda_{31}\sigma_2+\lambda_{12}\sigma_3)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc pour avoir (1-17), il suffit de poser :

$$\begin{aligned}
E &= \lambda_{01}\sigma_1+\lambda_{02}\sigma_2+\lambda_{03}\sigma_3\\
H &= -\lambda_{23}\sigma_1-\lambda_{31}\sigma_2-\lambda_{12}\sigma_3
\end{aligned}\tag{1-18}$$

Tout trivecteur $A_t$ peut être écrit :

$$\begin{aligned}
A_t &= (\lambda_{123},\lambda_{023},\lambda_{031},\lambda_{012}) \qquad (1\text{-}19)\\
&= \lambda_{123}\gamma^1\gamma^2\gamma^3+\lambda_{023}\gamma^0\gamma^2\gamma^3+\lambda_{031}\gamma^0\gamma^3\gamma^1+\lambda_{012}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\\
&= \begin{pmatrix} -i(\lambda_{023}\sigma_1+\lambda_{031}\sigma_2+\lambda_{012}\sigma_3) & -i\lambda_{123}I_2\\ i\lambda_{123}I_2 & i(\lambda_{023}\sigma_1+\lambda_{031}\sigma_2+\lambda_{012}\sigma_3)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc si nous posons :

$$B_0=\lambda_{123}\quad , \quad B=-(\lambda_{023}\sigma_1+\lambda_{031}\sigma_2+\lambda_{012}\sigma_3)\tag{1-20}$$

nous obtiendrons :

$$A_t=\begin{pmatrix} iB & -iB_0\\ iB_0 & -iB\end{pmatrix}=-B_v\gamma\tag{1-21}$$

avec

$$B_v=\begin{pmatrix} B_0 & -B\\ B & -B_0\end{pmatrix}\quad \text{car}\quad \begin{pmatrix} B_0 & -B\\ B & -B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} iB & -iB_0\\ iB_0 & -iB\end{pmatrix}\tag{1-22}$$

Enfin le terme pseudo-scalaire s'écrit :

$$A_p=k\gamma=\begin{pmatrix} 0 & +ikI_2\\ +ikI_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & +ik\\ +ik & 0\end{pmatrix}\tag{1-23}$$

Un élément quelconque de l'algèbre d'espace-temps s'écrit donc :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0 & -\vec{A} \\ \vec{A} & -A_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\vec{H} & \vec{E} \\ \vec{E} & i\vec{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\vec{B} & -iB_0 \\ iB_0 & -i\vec{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & +ik \\ +ik & 0 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}24)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} s + A_0 + i(\vec{H} + \vec{B}) & -\vec{A} + \vec{E} + i(-B_0 + k) \\ \vec{A} + \vec{E} + i(B_0 + k) & s - A_0 + i(\vec{H} - \vec{B}) \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}25)$$

Dans l'algèbre d'espace-temps, plusieurs sortes de conjugaisons sont utiles. Pour $\mathcal{A} = A_s + A_v + A_b + A_t + A_p$, on obtient, en changeant l'ordre de tous les produits :

$$\tilde{\mathcal{A}} = A_s + A_v - A_b - A_t + A_p \qquad (1\text{-}26)$$

En changeant le signe de tous les vecteurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= -\gamma\mathcal{A}\gamma = A_s - A_v + A_b - A_t + A_p \quad , \\ \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} &= -\gamma\mathcal{A}\mathcal{B}\gamma = (-\gamma\mathcal{A}\gamma)(-\gamma\mathcal{B}\gamma) = \overline{\mathcal{A}}\,\overline{\mathcal{B}} \end{aligned} \qquad (1\text{-}27)$$

Un élément de l'algèbre d'espace-temps sera appelé élément pair si :

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{A} = A_s + A_b + A_p \quad \text{ou} \quad \mathcal{A}\gamma = \gamma\mathcal{A} \qquad (1\text{-}28)$$

Un élément sera appelé impair si :

$$\mathcal{A} = -\overline{\mathcal{A}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{A} = A_v + A_t \quad \text{ou} \quad \mathcal{A}\gamma = -\gamma\mathcal{A} \qquad (1\text{-}29)$$

La somme ou le produit de deux éléments pairs est pair. L'ensemble des éléments pairs constitue donc une sous-algèbre $\mathcal{P}$ de l'algèbre d'espace-temps. Le produit d'un élément pair et d'un élément impair est impair. Le produit de deux éléments impairs est pair.

Hestenes définit également :

$$A^* = \gamma_0 A \gamma_0 \qquad (1\text{-}30)$$

$$A^+ = \gamma_0 \tilde{A} \gamma_0 \quad , \quad (AB)^+ = B^+ A^+ \quad , \qquad \text{donc} \quad \widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A} \qquad (1\text{-}31)$$

Il faut noter qu'avec le choix que nous avons fait des matrices de Dirac, $A^+$ est l'adjoint au sens habituel, c'est à dire le conjugué du transposé. D'autre part la multiplication par $\gamma_0$, à gauche ou à droite, inverse la parité.

Nous utiliserons l'opérateur de dérivation :

$$\nabla\!\!\!/ = \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} \tag{1-32}$$

Pour un scalaire d'espace, nous noterons $\nabla s$ le vecteur $\nabla\!\!\!/(sI_2)$, c'est-à-dire :

$$\nabla s = \overrightarrow{\mathrm{grad}} s \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \partial_3 s & \partial_1 s - i\partial_2 s \\ \partial_1 s + i\partial_2 s & -\partial_3 s \end{pmatrix} \tag{1-33}$$

Pour un vecteur d'espace $A$ nous noterons :

$$\nabla \cdot A = (\mathrm{div}\,\vec{A})I_2 \tag{1-34}$$

$$\nabla \times A = \vec{\mathrm{rot}} A \cdot \vec{\sigma} \tag{1-35}$$

Et nous obtenons alors :

$$\nabla\!\!\!/ A = \nabla \cdot A + i\nabla \times A \tag{1-36}$$

Hestenes appelle gradient, et note $\square$ l'opérateur que nous noterons ici, pour éviter les confusions avec le d'Alembertien :

$$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \tag{1-37}$$

Nous allons établir que le gradient d'un scalaire est un vecteur. Le gradient d'un vecteur est la somme d'un scalaire et d'un bivecteur. Le gradient d'un bivecteur est la somme d'un vecteur et d'un trivecteur. Le gradient d'un trivecteur est la somme d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire. Le gradient d'un pseudo-scalaire est un trivecteur. En effet:

$$\partial\!\!\!/ A_s = \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_2 & 0 \\ 0 & sI_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 s & \nabla s \\ -\nabla s & -\partial_0 s \end{pmatrix} = A_v \tag{1-38}$$

$$\partial\!\!\!/ A_v = \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & -A \\ A & -A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 A_0 + \nabla\!\!\!/ A & -\partial_0 A - \nabla\!\!\!/ A_0 \\ -\nabla\!\!\!/ A_0 - \partial_0 A & \nabla\!\!\!/ A + \partial_0 A_0 \end{pmatrix} \tag{1-39}$$

$$\partial\!\!\!/ A_v = \begin{pmatrix} \partial_0 A_0 + \nabla\cdot A & 0 \\ 0 & \partial_0 A_0 + \nabla\cdot A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\nabla\times A & -(\partial_0 A + \nabla A_0) \\ -(\nabla A_0 + \partial_0 A) & i\nabla\times A \end{pmatrix} = A_s + A_b$$

$$\begin{aligned} \partial\!\!\!/ A_b &= \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\partial_0 H + \nabla\cdot E + i\nabla\times E & \partial_0 E + i(\nabla\cdot H + i\nabla\times H) \\ -i(\nabla\cdot H + i\nabla\times H) - \partial_0 E & -(\nabla\cdot E + i\nabla\times E) - i\partial_0 H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla\cdot E & -\nabla\times H \\ \nabla\times H & -\nabla\cdot E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i(\partial_0 H + \nabla\times E) & i\nabla\cdot H \\ -i\nabla\cdot H & -i(\partial_0 H + \nabla\times E) \end{pmatrix} \\ &= A_v + A_t \end{aligned} \quad (1\text{-}40)$$

$$\begin{aligned} \partial\!\!\!/ A_t &= \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iB & -iB_0 \\ iB_0 & -iB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\partial_0 B + i\nabla B_0 & -i\partial_0 B_0 - i(\nabla\cdot B + i\nabla\times B) \\ -i(\nabla\cdot B + i\nabla\times B) - i\partial_0 B_0 & i\nabla B_0 + i\partial_0 B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i(\partial_0 B + \nabla B_0) & \nabla\times B \\ \nabla\times B & i(\partial_0 B + \nabla B_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i(\partial_0 B_0 + \nabla\cdot B) \\ -i(\partial_0 B_0 + \nabla\cdot B) & 0 \end{pmatrix} \\ &= A_b + A_p \end{aligned} \quad (1\text{-}41)$$

$$\partial\!\!\!/ A_p = \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +ik \\ +ik & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i\nabla k & +i\partial_0 k \\ -i\partial_0 k & -i\nabla k \end{pmatrix} = A_t \quad (1\text{-}42)$$

Il en résulte que le gradient inverse la parité: le gradient d'un élément pair est impair, le gradient d'un élément impair est pair. Le carré du gradient, au contraire, va conserver la parité. Or :

$$\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/ = \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} = \Box I_4 \quad (1\text{-}43)$$

$$\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 \quad (1\text{-}44)$$

$\Box$ est le d'Alembertien. Carré du gradient, il conserve la parité.

## 2 - L'ELECTROMAGNETISME DANS L'ALGEBRE D'ESPACE-TEMPS

L'électromagnétisme de Maxwell ne peut être écrit plus simplement qu'en utilisant l'algèbre d'espace-temps et l'opérateur gradient. Le potentiel est un vecteur, le champ un bivecteur et le courant électrique un vecteur d'espace-temps:

$$P = P_v = \begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix} \quad F = F_b = \begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix}$$
$$J = J_v = \begin{pmatrix} c\rho & -j \\ j & -c\rho \end{pmatrix} \tag{2-1}$$

où $V$ désigne le potentiel électrique, $A$ le potentiel-vecteur, $E$ le champ électrique, $H$ le champ magnétique, $\rho$ la densité de charge et $j$ le courant électrique. En algèbre d'espace-temps, les lois de l'électromagnétisme se résument à :

$$F = \partial\!\!\!/ P \tag{2-2}$$

$$\partial\!\!\!/ F = \frac{4\pi}{c} J \tag{2-3}$$

En effet, la première égalité nous donne :

$$\begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 V + \nabla \cdot A + i\nabla \times A & -(\partial_0 A + \nabla V) \\ -(\partial_0 A + \nabla V) & \partial_0 V + \nabla \cdot A + i\nabla \times A \end{pmatrix}$$

L'équation (2-2) est donc équivalente aux trois équations:

$$\begin{cases} E = -\nabla V - \partial_0 A \\ H = \nabla \times A \\ 0 = \partial_0 V + \nabla \cdot A \end{cases} \tag{2-4}$$

La dernière équation, dite condition de Lorentz, fait ici partie intégrante des équations de l'électromagnétisme. Hestenes l'évitait en posant $F = \partial\!\!\!/ \wedge P$ mais d'une part ceci détruit la symétrie des équations, et d'autre part nous verrons plus loin une généralisation de (2-2), donc de (2-4).

L'équation (2-3) nous donne

$$\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} c\rho & -j \\ j & -c\rho \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot E + i(\partial_0 H + \nabla \times E) & -(\nabla \times H - i\nabla \cdot H - \partial_0 E) \\ \nabla \times H - i\nabla \times H - \partial_0 E & -\nabla \cdot E - i(\partial_0 H + \nabla \times E) \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc bien les équations de Maxwell :

$$\begin{array}{llll} (2-5) & \nabla\cdot E = 4\pi\rho & (2-7) & \nabla\cdot H = 0 \\ (2-6) & \nabla\times H - \partial_0 E = \frac{4\pi}{c}j & (2-8) & \nabla\times E + \partial_0 H = 0 \end{array}$$

La dissymétrie entre les deux groupes d'équations est liée au fait qu'il existe, en théorie classique, des charges électriques, mais qu'il n'existe pas de charge magnétique. Lochak a établi [2] que l'existence, encore à prouver expérimentalement, de monopôles magnétiques, entrainait l'existence d'un potentiel et d'un courant qui ne sont pas des vecteurs, mais des pseudo-vecteurs d'univers. Ceci s'exprime de manière particulièrement simple dans l'algèbre d'espace-temps: il suffit d'écrire que le potentiel et le courant sont sommes d'un vecteur et d'un trivecteur :

$$P = P_v + P_t = \begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iB & -iW \\ iW & -iB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V+iB & -(A+iW) \\ A+iW & -(V+iB) \end{pmatrix} \tag{2-9}$$

$$J = J_v + J_t = \begin{pmatrix} c\rho & -j \\ j & -c\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ik & -ic\mu \\ ic\mu & -ik \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho+ik & -(j+ic\mu) \\ j+ic\mu & -(c\rho+ik) \end{pmatrix} \tag{2-10}$$

où $j$ désigne le courant électrique, $\rho$ la densité de charge électrique, $\mu$ la densité de charge magnétique et $k$ le courant magnétique, $W$ le potentiel magnétique et $B$ le potentiel-vecteur magnétique.

Ce faisant, nous obtenons pour $P$ l'élément impair le plus général, en algèbre d'espace-temps, tandis que $F$ n'est qu'un bivecteur, donc n'est pas l'élément pair le plus général. Ceci nous a incité à chercher ce qui se passerait si l'on prenait, pour $F$, un élément pair quelconque de l'algèbre d'espace-temps. Nous allons donc supposer maintenant que $F$ est un élément quelconque de l'ensemble des éléments pairs, c'est à dire est la somme d'un scalaire, d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire:

$$\begin{aligned} F = F_s + F_b + F_p &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & +ip \\ +ip & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s+iH & E+ip \\ E+ip & s+iH \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2-11}$$

Nous allons tout d'abord garder exactement les mêmes lois (2-2) et (2-3) que pour l'électromagnétisme de Maxwell. L'équation (2-2) nous donne maintenant:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V+iB & -(A+iW) \\ A+iW & -(V+iB) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+iH & E+ip \\ E+ip & s+iH \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\begin{aligned} \partial_0(V+iB)+\nabla\!\!\!/(A+iW) &= s+iH \\ -\nabla\!\!\!/(V+iB)-\partial_0(A+iW) &= E+ip \end{aligned} \tag{2-13}$$

Et avec les relations $\nabla\!\!\!/ A = \nabla\cdot A + i\nabla\times A$ et $\nabla\!\!\!/ B = \nabla\cdot B + i\nabla\times B$ nous obtenons le système de 4 équations :

$$\partial_0 V + \nabla\cdot A = s \tag{2-14}$$

$$\nabla\times A + \partial_0 B + \nabla W = H \tag{2-15}$$

$$-\nabla V - \partial_0 A + \nabla\times B = E \tag{2-16}$$

$$\partial_0 W + \nabla\cdot B = -p \tag{2-17}$$

Les équations (2-15) et (2-16) sont les équations que Lochak utilise en [2]. Les termes scalaires et pseudo-scalaires n'interviennent que dans les équations (2-14) et (2-17). La condition de Lorentz revient donc à supposer que le terme scalaire est nul. Il y a une condition similaire à la condition de Lorentz pour le trivecteur potentiel magnétique.

L'équation (2-3) nous donne :

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+iH & E+ip \\ E+ip & s+iH \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} c\rho+ik & -(j+ic\mu) \\ j+ic\mu & -(c\rho+ik) \end{pmatrix} \tag{2-18}$$

Ceci nous donne les deux équations :

$$\partial_0(s+iH)+\nabla\!\!\!/(E+ip) = \frac{4\pi}{c}(c\rho+ik) \tag{2-19}$$

$$-\nabla\!\!\!/(s+iH)-\partial_0(E+ip) = \frac{4\pi}{c}(j+ic\mu) \tag{2-20}$$

Nous obtenons donc le système de quatre équations :

$$\partial_0 s + \nabla\cdot E = 4\pi\rho \tag{2-21}$$

$$\partial_0 H + \nabla\times E + \nabla p = \frac{4\pi}{c}k \tag{2-22}$$

$$-\nabla s + \nabla\times H - \partial_0 E = \frac{4\pi}{c}j \tag{2-23}$$

$$-\nabla \cdot H - \partial_0 p = 4\pi\mu \tag{2-24}$$

Les équations de l'électromagnétisme, sans ou avec monopôles, ont été écrites jusqu'ici avec $s = p = 0$, c'est-à-dire en supposant que le champ électromagnétique est un pur bivecteur. Les équations de l'électromagnétisme sont alors :

$$\partial_0 V + \nabla \cdot A = 0 \tag{2-25}$$

$$\nabla \times A + \partial_0 B + \nabla W = H \tag{2-26}$$

$$-\nabla V - \partial_0 A + \nabla \times B = E \tag{2-27}$$

$$\partial_0 W + \nabla \cdot B = 0 \tag{2-28}$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho \tag{2-29}$$

$$\partial_0 H + \nabla \times E = \frac{4\pi}{c} k \tag{2-30}$$

$$\nabla \times H - \partial_0 E = \frac{4\pi}{c} j \tag{2-31}$$

$$-\nabla \cdot H = 4\pi\mu \tag{2-32}$$

Ces équations sont celles qu'utilise Lochak, à part un changement de signe qui correspond simplement à une convention de signe différente pour les charges magnétiques.

Nous devons donc constater que les équations (2-2) et (2-3) sont la forme la plus simple et la plus élégante des lois de l'électromagnétisme, y compris dans le cas où il existerait du magnétisme libre. Ces équations (2-2) et (2-3) impliquent l'équation du second ordre :

$$\partial\!\!\!/ F = \partial\!\!\!/(\partial\!\!\!/ P) = \Box P = \frac{4\pi}{c} J \tag{2-33}$$

qui se décompose en :

$$\Box P_v = \frac{4\pi}{c} J_v \quad , \quad \Box P_t = \frac{4\pi}{c} J_t \tag{2-34}$$

Nous pouvons remarquer que, dans ces équations, les parties électriques et magnétiques sont découplées et, en outre, que les termes scalaires et pseudo-scalaires du champ disparaissent. C'est une des raisons pour lesquelles on a jusqu'ici pensé que le champ électromagnétique est un pur bivecteur. Pour étudier les parties scalaires et pseudo-scalaires éventuelles, il ne faut pas partir des équations du second ordre, mais uniquement des équations du premier ordre.

En outre, il ne faut pas imposer la condition de Lorentz, qui revient à annuler le terme scalaire. Nous retrouvons là une des idées de Louis de Broglie, à savoir que les potentiels ont une réalité physique, et ne sont pas uniquement des outils de calcul. Est-il bien raisonnable d'imposer $s = 0$ ?

Si ces termes scalaires existent dans l'électromagnétisme, encore faut-il comprendre alors où la théorie classique a pu les cacher. La principale raison pour laquelle nous n'avons jusqu'à présent jamais vu les termes scalaires et pseudo-scalaires du champ électromagnétique est que nous pouvons avoir l'habitude de travailler avec eux... sous un autre nom ! L'équation (2-3) s'écrit en effet :

$$\not\partial s + \not\partial F_b + \not\partial p\gamma = \frac{4\pi}{c} J \tag{2-35}$$

Or cette équation s'écrit aussi:

$$\not\partial F_b = \frac{4\pi}{c} J - \not\partial s - \not\partial p\gamma \tag{2-36}$$

Comme la théorie maxwellienne a jusqu'ici identifié $F$ et $F_b$, cette équation s'écrit tout aussi bien $\not\partial F = \frac{4\pi}{c} J'$. Elle est identique à l'équation classique (2-3), si nous appelons $J'$ le courant total, somme de $J'_v$ et $J'_t$ :

$$J'_v = -\frac{c}{4\pi}\not\partial s + J_v \quad , \quad J'_t = -\frac{c}{4\pi}\not\partial(p\gamma) + J_t \tag{2-37}$$

c'est-à-dire si nous changeons les densités de charge et les courants en:

$$\rho' = \rho - \frac{1}{4\pi}\partial_0 s \quad , \quad j' = j + \frac{c}{4\pi}\nabla s \tag{2-38}$$

$$\mu' = \mu + \frac{1}{4\pi}\partial_0 p \quad , \quad k' = k - \frac{c}{4\pi}\nabla p \tag{2-39}$$

Les équations de conservation des charges électriques et magnétiques qui découlent des équations de Maxwell (2-21) à (2-24) sont :

$$\partial_0(c\rho') + \nabla \cdot j' = 0 \quad , \quad \partial_0(c\mu') + \nabla \cdot k' = 0 \tag{2-40}$$

et elles sont équivalentes à :

$$\partial_0(c\rho) + \nabla \cdot j = \frac{c}{4\pi}\ \Box s \quad , \quad \partial_0(c\mu) + \nabla \cdot k = -\frac{c}{4\pi}\ \Box p \qquad \text{(2-41)}$$

Il suffit donc que les conditions $\Box s = 0$ et $\Box p = 0$ soient satisfaites pour que l'on ait les mêmes équations de conservation pour les courants $(c\rho, j)$ et $(c\mu, k)$. Donc quand nous passons du champ bivecteur $F_b$ au champ total $F = F_s + F_b + F_p$, seules les conditions de Lorentz sont modifiées, et le champ total $F$ est vu comme le champ bivecteur en présence d'un courant supplémentaire. On peut donc supposer que le champ électromagnétique est un élément pair quelconque de l'algèbre d'espace-temps, sans bouleverser en aucune façon les résultats expérimentaux de l'électromagnétisme.

Arrivés ici, nous pourrions penser que la véritable forme des équations de l'électromagnétisme en l'absence de charges peut être :

$$F = \partial\!\!\!/ P \quad , \quad \partial\!\!\!/ F = 0 \qquad \text{(2-42)}$$

Mais Louis de Broglie, dans sa théorie de la fusion [5] a complété les équations de l'électromagnétisme pour y inclure le photon. Louis de Broglie concevait en effet le photon comme une particule comme les autres, dotée d'une masse $m_0$ certes extraordinairement petite, mais non nulle. Les équations de l'électromagnétisme de Louis de Broglie peuvent être écrites sous la forme :

$$F = \partial\!\!\!/ P_v \quad , \quad \partial\!\!\!/ F + k_0^2 P_v = 0 \quad , \quad k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \qquad \text{(2-43)}$$

Il est également possible d'écrire des équations contenant à la fois des termes de masse et des termes monopôles : $F = \partial\!\!\!/(P_v + aP_t)$; $\partial\!\!\!/ F + k_0^2(P_v + aP_t) = 0$. Mais tant que les uns et les autres ne sont pas mis en évidence expérimentale, il n'est pas facile de savoir dans quelle direction chercher.

Notons en passant que les deux équations (2-43) peuvent être écrites sous une forme encore plus ramassée, donc encore plus jolie, en posant :

$$X = F + k_0 P\gamma \qquad \text{(2-44)}$$

et alors :

$$\partial\!\!\!/ X = k_0 X\gamma \qquad \text{(2-45)}$$

car on a :

$$\partial\!\!\!/ X = \partial\!\!\!/(F + k_0 P\gamma) = \partial\!\!\!/ F + k_0 \partial\!\!\!/ P\gamma = -k_0^2 P + k_0 F\gamma = k_0(k_0 P\gamma^2 + F\gamma)$$
$$= k_0(k_0 P\gamma + F)\gamma = k_0 X\gamma$$

L'écriture développée des équations (2-43) nous donne, outre les équations (2-14) à (2-17) qui ne changent pas, les équations :

$$\partial_0 s + \nabla \cdot E + k_0^2 V = 0 \tag{2-46}$$

$$+\nabla p + \partial_0 H + \nabla \times E = 0 \tag{2-47}$$

$$-\nabla s + \nabla \times H - \partial_0 E + k_0^2 A = 0 \tag{2-48}$$

$$\partial_0 p + \nabla \cdot H = 0 \tag{2-49}$$

Les équations obtenues par Louis de Broglie sont les équations en l'absence de charge. On peut passer aux équations en présence de charge à la manière classique, ou en posant (2-37). La seconde manière nous parait préférable, car l'utilisation, pour le champ électromagnétique, de la somme d'un scalaire, d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire va nous permettre de voir que le $\psi$ des ondes de matière a exactement la même structure algébrique. Et ceci n'a rien d'évident si l'on s'en tient à un champ pur bivecteur, à 6 composantes réelles.

L'algèbre d'espace-temps permet aussi de retrouver les invariants et vecteurs remarquables du champ électromagnétique. Nous avons :

$$F = F_s + F_b + F_p \quad \text{donc} \quad \tilde{F} = F_s - F_b + F_p$$

c'est-à-dire

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} s - iH & -E + ip \\ -E + ip & s - iH \end{pmatrix} \tag{2-50}$$

Nous obtenons donc :

$$F\tilde{F} = (s^2 + H^2 - E^2 - p^2)I_4 + 2(E \cdot H + sp)\gamma \tag{2-51}$$

$F\tilde{F} = \tilde{F}F$ est donc la somme du scalaire $s^2 + H^2 - E^2 - p^2$ et du pseudo-scalaire $2(E \cdot H + sp)\gamma$.

Nous pouvons aussi construire les 4 vecteurs $F\gamma_i\tilde{F}$ et les 4 vecteurs $\tilde{F}\gamma_i F$. Nous avons par exemple :

$$F\gamma_0\tilde{F} = \begin{pmatrix} s^2+H^2+E^2+p^2 & -2(sE-pH+E\times H) \\ 2(sE-pH+E\times H) & -(s^2+H^2+E^2+p^2) \end{pmatrix} \tag{2-52}$$

$$\tilde{F}\gamma_0 F = \begin{pmatrix} s^2+H^2+E^2+p^2 & -2(-sE+pH+E\times H) \\ 2(-sE+pH+E\times H) & -(s^2+H^2+E^2+p^2) \end{pmatrix} \tag{2-53}$$

Nous obtenons ainsi le vecteur de Poynting :

$$\frac{1}{2}(F\gamma_0\tilde{F}+\tilde{F}\gamma_0 F) = \begin{pmatrix} s^2+H^2+E^2+p^2 & -2E\times H \\ 2E\times H & -(s^2+H^2+E^2+p^2) \end{pmatrix} \tag{2-54}$$

## 3 - EQUATION DE DIRAC ET EQUATION D'HESTENES

Hestenes a établi que l'équation de Dirac était équivalente à l'équation :

$$\partial\!\!\!/\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi\right)\gamma_2\gamma_1 = 0 \tag{3-1}$$

où $\psi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}$ est un élément pair de l'algèbre d'espace-temps, c'est à dire :

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+iH & E+ip \\ E+ip & s+iH \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

Il y a donc une ressemblance étroite entre le $\psi$ des ondes de matière et le champ électromagnétique. Mais l'identification précédente entre $\psi$ et $F$, si elle a un sens algébrique, n'a pas de sens physique, et nous verrons que ce n'est pas $\psi$ seul qu'il faut rapprocher de $F$. Nous poserons algébriquement :

$$\Phi_1 = s+iH = \begin{pmatrix} s+iHz & i(H_x-iH_y) \\ i(H_x+iH_y) & s-iH_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

$$\Phi_2 = E+ip = \begin{pmatrix} E_z+ip & E_x-iH_y \\ E_x+iE_y & -E_z+ip \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

Pour calculer simultanément sur l'équation de Dirac et celle de Lochak, nous écrirons l'équation d'Hestenes sous la forme :

$$\not\partial\psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi + \frac{g}{\hbar c}P_t\psi = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

Il faudra se souvenir que l'on a soit $g = 0$ (équation de Dirac), soit $e = m = 0$ (équation de Lochak).

Il n'est pas du tout évident que cette équation (3-5) puisse nous donner l'équation de Dirac, ou de Lochak. Car ces équations ne contiennent que des termes en $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ et pas du tout de termes en $\overline{\psi}_1$ et $\overline{\psi}_2$. Nous allons donc préciser en détail ce qui se passe. (3-5) nous donne :

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & \not\nabla \\ -\not\nabla & -\partial_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ +\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{e}{\hbar c}\begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{g}{\hbar c}\begin{pmatrix} iB & -iW \\ iW & -iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

L'équation précédente est équivalente au système :

$$-i(\partial_0\Phi_1\sigma_3 + \not\nabla\Phi_2\sigma_3) + \frac{mc}{\hbar}\Phi_1 + \frac{e}{\hbar c}(V\Phi_1 - A\Phi_2) + \frac{ig}{\hbar c}(B\Phi_1 - W\Phi_2) = 0 \qquad (3\text{-}7)$$

$$-i(\partial_0\Phi_2\sigma_3 + \not\nabla\Phi_1\sigma_3) - \frac{mc}{\hbar}\Phi_2 + \frac{e}{\hbar c}(V\Phi_2 - A\Phi_1) + \frac{ig}{\hbar c}(B\Phi_2 - W\Phi_1) = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

Nous avons :

$$\Phi_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & -\overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} \psi_3 & -\overline{\psi}_4 \\ \psi_4 & \overline{\psi}_3 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}9)$$

L'utilisation de la matrice $\sigma_3$ ou d'une matrice similaire, est indispensable car nous devons mettre, face à face, les équations en $\psi_1$ et en $\overline{\psi}_1$ qui sont conjuguées l'une de l'autre. L'équation (3-7) nous donne, en multipliant par $i$:

$$0 = \partial_0\begin{pmatrix} \psi_1 & \overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & -\overline{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&+\begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_3 & -\overline{\psi}_4 \\ \psi_4 & \overline{\psi}_3 \end{pmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \\
&+\frac{ie}{\hbar c}[V\begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & -A^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \end{pmatrix}] \\
&-\frac{g}{\hbar c}[\begin{pmatrix} B^3 & B^1 - iB^2 \\ B^1 + iB^2 & -B^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} - W\begin{pmatrix} \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3-10}
$$

Nous obtenons ainsi le système de 4 équations :

$$
\begin{aligned}
0 =& \partial_0\psi_1 + \partial_3\psi_3 + (\partial_1 - i\partial_2)\psi_4 + i\frac{mc}{\hbar}\psi_1 \\
&+ \frac{ie}{\hbar c}[V\psi_1 - A^3\psi_3 - (A^1 - iA^2)\psi_4] \\
&- \frac{g}{\hbar c}[B^3\psi_1 + (B^1 - iB^2)\psi_2 - W\psi_3]
\end{aligned}
\tag{3-11}
$$

$$\begin{aligned}0 =&\partial_0\psi_2 + (\partial_1 + i\partial_2)\psi_3 - \partial_3\psi_4 + i\frac{mc}{\hbar}\psi_2\\&+ \frac{ie}{\hbar c}[V\psi_2 - (A^1 + iA^2)\psi_3 + A^3\psi_4]\\&- \frac{g}{\hbar c}[(B^1 + iB^2)\psi_1 - B^3\psi_2 - W\psi_4] \qquad (3\text{-}12)\\0 =&\partial_0\overline{\psi}_2 - \partial_3\overline{\psi}_4 + (\partial_1 - i\partial_2)\overline{\psi}_3 - i\frac{mc}{\hbar}\overline{\psi}_2\\&+ \frac{ie}{\hbar c}[-V\overline{\psi}_2 - A^3\overline{\psi}_4 + (A^1 - iA^2)\overline{\psi}_3]\\&- \frac{g}{\hbar c}[-B^3\overline{\psi}_2 + (B^1 - iB^2)\overline{\psi}_1 - W\overline{\psi}_4] \qquad (3\text{-}13)\\0 =& - \partial_0\overline{\psi}_1 - (\partial_1 + i\partial_2)\overline{\psi}_4 - \partial_3\overline{\psi}_3 + i\frac{mc}{\hbar}\overline{\psi}_1\\&+ \frac{ie}{\hbar c}[V\overline{\psi}_1 - (A^1 + iA^2)\overline{\psi}_4 - A^3\overline{\psi}_3]\\&- \frac{g}{\hbar c}[-(B^1 + iB^2)\overline{\psi}_2 - B^3\overline{\psi}_1 + W\overline{\psi}_3] \qquad (3\text{-}14)\end{aligned}$$

L'équation (3-14) est exactement la conjuguée de l'équation (3-11), et l'équation (3-13) est exactement la conjuguée de l'équation (3-12), donc le système formé par ces 4 équations est équivalent à :

$$\begin{aligned}&\partial_0\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\partial_3 & \partial_1 - i\partial_2\\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\\&+ \frac{ie}{\hbar c}[V\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}A^3 & A^1 - iA^2\\ A^1 + iA^2 & -A^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}]\\&- \frac{g}{\hbar c}[\begin{pmatrix}B^3 & B^1 - iB2\\ B^1 + iB^2 & -B^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} - W\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}] = 0 \qquad (3\text{-}15)\end{aligned}$$

Le traitement détaillé de l'équation (3-8) aboutit au même résultat. Là aussi, deux équations sont conjuguées des deux autres.

L'équation (3-15) nous donne, avec $\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}$ et $\chi = \begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$

$$\partial_0\varphi + \nabla\!\!\!/\chi + i\frac{mc}{\hbar}\varphi + \frac{ie}{\hbar c}(V\varphi - A\chi) - \frac{g}{\hbar c}(B\varphi - W\chi) = 0 \qquad (3\text{-}16)$$

L'équation (3-8) nous donne de même :

$$\partial_0\chi + \nabla\!\!\!/\varphi - i\frac{mc}{\hbar}\chi + \frac{ie}{\hbar c}(V\chi - A\varphi) - \frac{g}{\hbar c}(B\chi - W\varphi) = 0 \qquad (3\text{-}17)$$

Ces deux équations nous donnent :

$$\partial_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \nabla\!\!\!/ \\ \nabla\!\!\!/ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + i\frac{mc}{\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{ie}{\hbar c} \begin{pmatrix} V & -A \\ -A & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \frac{g}{\hbar c} \begin{pmatrix} -B & W \\ -W & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (3\text{-}18)$$

D'autre part on a

$$\begin{pmatrix} V & -A \\ -A & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -B & W \\ W & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B & W \\ -W & B \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} W & -B \\ B & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (3-18) nous donne, avec $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$

$$[\partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & \nabla\!\!\!/ \\ \nabla\!\!\!/ & 0 \end{pmatrix} + i\frac{mc}{\hbar}\gamma_0 + \frac{ie}{\hbar c}\gamma_0 \begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix} + \frac{g}{\hbar c}\gamma_0 \begin{pmatrix} W & -B \\ B & -W \end{pmatrix} \gamma_5]\Psi = 0 \quad (3\text{-}19)$$

Multipliant par $\gamma^0$ à gauche, nous obtenons :

$$[\gamma^0\partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & 0 \end{pmatrix} + i\frac{mc}{\hbar} + \frac{ie}{\hbar c} \begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix} + \frac{g}{\hbar c} \begin{pmatrix} W & -B \\ B & -W \end{pmatrix} \gamma_5]\Psi = 0 \quad (3\text{-}20)$$

En posant

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (V, -A^1, -A^2, -A^3)$$
$$B_\mu = (W, -B^1, -B^2, -B^3) \quad (3\text{-}21)$$

nous avons :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu + \frac{g}{\hbar c}B_\mu\gamma_5) + i\frac{mc}{\hbar}]\Psi = 0 \quad (3\text{-}22)$$

Si $g = 0$, cette équation est identique à l'équation de Dirac :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu) + i\frac{mc}{\hbar}]\Psi = 0 \quad (3\text{-}23)$$

Et si $e = m = 0$, nous obtenons l'équation de Lochak :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)]\Psi = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

Inversement, partant de l'équation de Dirac ou de celle de Lochak, et prenant les complexes conjugués, nous obtenons un système de 8 équations qui nous redonnent l'équation d'Hestenes (3-5). Cette équation est donc équivalente aux équations de Dirac et de Lochak. Nous avons démontré ici cette équivalence de manière très détaillée, parce que les démonstrations données ailleurs sont gravement insuffisantes, ne mettant pas en évidence le point essentiel, à savoir que 4 équations sont exactement les conjuguées des 4 autres. Il ne faudrait surtout pas croire qu'une telle disposition arrive automatiquement.

Parce qu'elle est équivalente à l'équation de Dirac, l'équation d'Hestenes peut donc rendre compte à la fois des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, et décrire des monopôles magnétiques de masse nulle.

Mais puisque les équations fournissent les mêmes résultats, on peut se demander pourquoi se préoccuper de changer d'équation. Or il faut bien se rendre compte de l'allure radicalement différente de l'équation d'Hestenes. Par exemple les termes de potentiel $e/\hbar c P_v$ et $g/\hbar c P_t$ jouent des rôles très symétriques, alors que dans l'équation de Dirac $ie/\hbar c A_\mu$ et $g/\hbar c \gamma_5 B_\mu$ se ressemblent moins. Des grandeurs comme le courant de probabilité, ou le vecteur spin, s'obtiennent de façon très différente dans les deux théories. Ajoutons que l'équation d'Hestenes est équivalente à la fois à l'équation de Dirac et à l'équation conjuguée. En outre, elle contient des opérateurs agissant à gauche de $\psi$, d'autres agissant à droite. Et il est impossible de tout faire passer à gauche: si l'on écrivait dans l'équation d'Hestenes $\gamma_0\psi$ au lieu de $\psi\gamma_0$ on obtiendrait dans l'équation de Dirac $imc/\hbar\gamma_0\Psi$ au lieu de $imc/\hbar\Psi$ et l'équation ne donnerait plus les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Tout se passe donc comme si, par une coïncidence mathématique extraordinaire, Dirac avait trouvé, non pas la bonne équation, mais une équation presque équivalente, c'est à dire mathématiquement équivalente, et physiquement très différente.

Le principal argument qui nous fait penser que la théorie d'Hestenes nous remet sur la bonne voie, c'est la similitude qui existe avec le champ électromagnétique. Electromagnétisme et théorie d'Hestenes utilisent les mêmes éléments pairs de l'algèbre d'espace-temps, le même et unique opérateur de dérivation $\partial\!\!\!/$. L'extrême simplicité des lois de l'électromagnétisme est aussi un argument très fort en faveur de cette théorie.

Hestenes utilise une fonction d'onde qui est toujours de la forme :

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R \tag{3-25}$$

où $R$ est une rotation de Lorentz, c'est à dire vérifie :

$$R\tilde{R} = 1 \quad \text{et} \quad R = \overline{R}$$

Il suppose donc que $\rho$ n'est pas nul.

En théorie de Dirac, Jakobi et Lochak avaient établi que le $\Psi$ de Dirac pouvait être écrit [11] :

$$\Psi = \sqrt{\rho}e^{\frac{A}{2}\gamma}R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-26}$$

Les deux relations sont identiques, et l'angle $\beta$ de la théorie d'Hestenes n'est autre que l'angle $A$ d'Yvon-Takabayasi. Mais si l'égalité (3-26) n'est pas du tout évidente, l'égalité (3-25) coule de source, pour toute fonction qui peut être écrite :

$$\psi = e^{\mu} \tag{3-27}$$

où $\mu$ est aussi un élément pair de l'algèbre d'espace-temps.

En effet, puisque le produit de 2 éléments pairs est pair, l'exponentielle est une application de l'ensemble des éléments pairs dans lui-même. Or tout élément pair est somme d'un scalaire, d'un pseudo-scalaire et d'un bivecteur. Donc nous pouvons écrire:

$$\mu = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\gamma + \varphi \tag{3-28}$$

où $\alpha/2$ est le scalaire, $\beta/2\gamma$ le pseudo-scalaire et $\varphi$ le bivecteur. Et comme chacun des trois termes commute avec les deux autres, nous aurons:

$$e^{\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{\beta}{2}}e^{\varphi} = e^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\gamma+\varphi} = e^{\mu}$$

Nous obtiendrons donc :

$$\psi = e^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} e^{\varphi} = e^{\frac{\alpha}{2}} e^{\varphi} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} = e^{\varphi} e^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} = \ldots \tag{3-29}$$

Pour avoir (3-25), il suffit donc de poser $\rho = e^{\alpha}$ et $R = e^{\varphi}$. Avec ces notations, les expressions conjuguées s'expriment ainsi :

$$\tilde{\mu} = \frac{\alpha}{2} - \varphi + \frac{\beta}{2}\gamma \tag{3-30}$$

donc :

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} \tilde{R} \tag{3-31}$$

et comme $\tilde{R} = e^{-\varphi} = R^{-1}$, $\tilde{R}R = R\tilde{R} = 1$. Et alors :

$$\begin{aligned} \psi\tilde{\psi} &= \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} R \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} \tilde{R} = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} R\tilde{R} \\ &= \rho e^{\beta\gamma} = \rho(\cos\beta + \gamma \sin\beta) = \tilde{\psi}\psi \end{aligned} \tag{3-32}$$

La supposition que fait Hestenes que $\rho > 0$ équivaut à supposer que $\psi\tilde{\psi}$ n'est pas nul, ou encore que $\psi$ est un élément du groupe de Lie constitué par les éléments pairs inversibles de l'algèbre d'espace-temps.

Lochak a pourtant établi qu'il existe d'intéressantes solutions dans le cas où $\rho$ est nul, c'est-à-dire dans le cas où $\psi$ appartient à l'algèbre de Lie des éléments pairs, mais pas au groupe de Lie. Ces solutions correspondent physiquement à des paires monopôles-antimonopôles de masse nulle. D'après l'équivalence étudiée plus haut, ces solutions de l'équation de Dirac sont aussi des solutions de l'équation d'Hestenes. La théorie d'Hestenes ne peut donc être considérée comme complète.

$\psi\tilde{\psi}$ est la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire. On peut vérifier que la partie scalaire n'est autre que l'invariant relativiste $\Omega_1$ de la théorie de Dirac et que la partie pseudo-scalaire n'est autre que l'invariant $\Omega_2$, de sorte que nous avons :

$$\psi\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\gamma} = \Omega_1 + \gamma\Omega_2 \quad , \quad \Omega_1 = \rho\cos\beta \quad , \quad \Omega_2 = \rho\sin\beta \tag{3-33}$$

$$\operatorname{tg}\beta = +\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad , \quad \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \tag{3-34}$$

A partir de $\psi$ et de $\tilde{\psi}$, il est possible de construire les 4 vecteurs $\psi\gamma_\mu\tilde{\psi}$. Hestenes note $e_\mu$ les vecteurs transformés, par la rotation d'espace-temps $R$, des $\gamma_\mu$ :

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R} \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{3-35}$$

Nous avons les relations :

$$\psi\gamma_\mu\tilde{\psi} = \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R\gamma_\mu\tilde{R}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}e^{\frac{-\beta}{2}\gamma}R\gamma_\mu\tilde{R} = \rho e_\mu \quad (3\text{-}36)$$

Nous avons utilisé le fait que $\gamma$ anticommute avec chacune des matrices $\gamma_\mu$ donc commute avec le produit de deux matrices $\gamma_\mu\gamma_\nu$ et donc avec la rotation $R$. Nous avons donc :

$$\psi\gamma_\mu\tilde{\psi} = \rho e_\mu \quad , \quad \mu = 0,1,2,3 \quad (3\text{-}37)$$

Le vecteur-courant densité de probabilité est ici :

$$\psi\gamma_0\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} J_0 & -J \\ J & -J_0 \end{pmatrix} \quad (3\text{-}38)$$

$$J_0 = s^2 + H^2 + E^2 + p^2 = \mid \psi_1 \mid^2 + \mid \psi_2 \mid^2 + \mid \psi_3 \mid^2 + \mid \psi_4 \mid^2 \quad (3\text{-}39)$$

Les grandeurs de la théorie de Dirac sont toutes présentes dans la théorie d'Hestenes, et pour une étude détaillée on pourra se reporter aux travaux de Casanova [6] et Boudet [7]

## 4 - EQUATION NON LINEAIRE, JAUGE ELECTRIQUE ET JAUGE MAGNETIQUE

Lochak [2] [3] [4] a proposé une équation non linéaire permettant de décrire des monopôles de masse non nulle. Il remplace le terme de masse linéaire $mc/\hbar$ par

$$\frac{1}{2}m(\rho^2)\frac{c}{\hbar}(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5) \quad , \quad \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \quad (4\text{-}1)$$

Rappelons que : $\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5 = \Omega_1 + \gamma\Omega_2 = \psi\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\gamma} = \rho\cos\beta + (\rho\sin\beta)\gamma$.

On peut établir, en reprenant les calculs du paragraphe 3, que l'équation non linéaire :

$$\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{c}{2\hbar}m(\rho^2)\psi\gamma_0\psi\tilde{\psi} + \frac{1}{\hbar c}(eP_v + gP_t)\psi = 0 \quad (4\text{-}2)$$

où $\psi$ est un élément pair de l'algèbre d'espace-temps, redonne l'équation de Lochak :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu + \frac{g}{\hbar c}B_\mu\gamma_5) + i\frac{c}{2\hbar}m(\rho^2)(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)]\Psi = 0 \quad (4\text{-}3)$$

Comme Lochak a établi que (4-3) était invariante sous les deux transformations de jauge :

$$\Psi' = e^{i\varphi}\Psi \quad , \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar c}{e}\partial_\mu\varphi \quad \text{(jauge électrique)} \tag{4-4}$$

$$\Psi' = e^{i\gamma_5\chi}\Psi \quad , \quad B'_\mu = B_\mu - \frac{\hbar c}{g}\partial_\mu\chi \quad \text{(jauge magnétique)} \tag{4-5}$$

l'équation (4-2) doit être invariante elle aussi sous les deux transformations de jauge, mais celles-ci prendront une forme nettement moins évidente :

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{4-6}$$

nous donne

$$\begin{aligned}
\Phi'_1 = \begin{pmatrix} \psi'_1 & -\overline{\psi}'_2 \\ \psi'_2 & \overline{\psi}'_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\psi_1 & -e^{-i\varphi}\overline{\psi}_2 \\ e^{i\varphi}\psi_2 & e^{-i\varphi}\overline{\psi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \\
&= \Phi_1 e^{i\varphi\sigma_3}, \\
\Phi'_2 = \Phi_2 e^{i\varphi\sigma_3}
\end{aligned} \tag{4-7}$$

Il est d'ailleurs assez difficile d'établir directement sur l'équation d'Hestenes ces invariances de jauge, car l'opérateur $\partial\!\!\!/$ ne commute pas avec $\psi$.

Si nous appelons $u$ le terme $\begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_1$ alors la transformation de jauge électrique s'écrit, en algèbre d'espace-temps :

$$P'_v = P_v - \frac{\hbar c}{e}\partial\!\!\!/\varphi \quad , \quad \psi' = \psi e^{\varphi u} \quad , \quad P'_t = P_t \tag{4-8}$$

Le champ électromagnétique devient, dans la transformation de jauge :

$$F' = \partial\!\!\!/(P_v - \frac{\hbar c}{e}\partial\!\!\!/\varphi + P_t) = \partial\!\!\!/(P_v + P_t) - \frac{\hbar c}{e}\,\Box\varphi = F - \frac{\hbar c}{e}\,\Box\varphi \tag{4-9}$$

Le champ n'est pas invariant, mais seule sa partie scalaire est modifiée. En outre, si $\Box\varphi = 0$, le champ est invariant. La théorie classique, qui annule la partie scalaire, ne peut que voir une invariance du champ électromagnétique. Nous avions, en [9], remarqué que la condition $\Box\varphi = 0$ semblait requise pour l'invariance du champ, et pas pour l'invariance de la théorie de Dirac.

La transformation de jauge magnétique étudiée par Lochak s'écrit :

$$\Psi' = e^{i\gamma_5\chi}\Psi = \begin{pmatrix} \cos\chi\psi_1 + i\sin\chi\psi_3 \\ \cos\chi\psi_2 + i\sin\chi\psi_4 \\ \cos\chi\psi_3 + i\sin\chi\psi_1 \\ \cos\chi\psi_4 + i\sin\chi\psi_2 \end{pmatrix} \tag{4-10}$$

Ceci donne, pour le $\psi$ d'Hestenes :

$$\psi' = \psi(\cos\chi + \sin\chi\gamma) = \psi e^{+\chi\gamma} \tag{4-11}$$

En algèbre d'espace-temps, la transformation de jauge magnétique s'écrit donc :

$$P'_t = P_t + \frac{\hbar c}{g}\partial\!\!\!/(\chi\gamma) \quad , \quad P'_v = P_v \quad , \quad \psi' = \psi e^{+\chi\gamma} \tag{4-12}$$

Dans cette transformation, le champ électromagnétique devient :

$$\begin{aligned} F' &= \partial\!\!\!/(P'_v + P'_t) = \partial\!\!\!/(P_v + P_t + \frac{\hbar c}{g}\partial\!\!\!/(\chi\gamma)) \\ &= \partial\!\!\!/(P_v + P_t) + \frac{\hbar c}{g}\ \Box(\chi\gamma) = F + \frac{\hbar c}{g}\ \Box(\chi\gamma) \end{aligned} \tag{4-13}$$

Là aussi, la partie bivecteur est effectivement invariante, mais la partie pseudo-scalaire n'est invariante que si $\Box\chi = 0$. La théorie classique, qui annule la partie pseudo-scalaire, trouve forcément le champ invariant.

## 5 - SUPERPOSITION DANS LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Si les lois de l'électromagnétisme étaient uniquement les lois du second ordre $\Box P = 4\pi/cJ$ alors il serait possible de séparer totalement les parties électriques et magnétiques :

$$\Box P_v = \frac{4\pi}{c}J_v, \tag{5-1}$$

le potentiel électrique ne dépend que des charges et des courants électriques. Et de même :

$$\Box P_t = \frac{4\pi}{c} J_t, \tag{5-2}$$

le potentiel magnétique ne dépend que des charges et des courants magnétiques.

Mais les équations de l'électromagnétisme, tout comme l'équation de Dirac, sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Or nous avons :

$$F = \partial\!\!\!/ P = \partial\!\!\!/ P_v + \partial\!\!\!/ P_t \tag{5-3}$$

Le champ électromagnétique se présente donc comme une superposition de contributions venant des charges et courants électriques et de contributions venant des charges et courants magnétiques. Si nous connaissons les valeurs du champ électromagnétique, nous ne pouvons donc pas calculer de façon unique les potentiels, ne sachant pas quelle est la contribution de $P_v$ et quelle est celle de $P_t$.

Ainsi, dans le calcul du champ créé par une charge électrique ponctuelle au repos, nous savons que le champ électrique créé par la particule est en $r^{-2}$ :

$$\vec{E} = k\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5-4}$$

Lorsque, dans l'équation de Dirac, nous calculons l'interaction entre deux charges électriques, nous attribuons ce champ $E$ en totalité à la partie électrique du potentiel, posons $E = -\nabla V - \partial\!\!\!/_0 A$ et trouvons un terme d'interaction :

$$I = \frac{e^2}{r} \tag{5-5}$$

C'est ce terme qui nous fournit les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène avec une très grande précision. Par contre, lorsque Lochak calcule le potentiel magnétique créé par une charge électrique, il attribue le champ $E$, en totalité, à la partie magnétique du potentiel, pose $E = \nabla \times B$ et en déduit un terme d'interaction :

$$I = \frac{eg}{\hbar c}\frac{1}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}\sigma_2 e^{i\sigma_3\varphi} \tag{5-6}$$

entre la charge électrique fixe et le monopôle.

La seule condition de continuité sous le groupe des rotations lui permet alors d'obtenir, de manière très élégante, la relation de Dirac :

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \tag{5-7}$$

où $n$ est un entier naturel.

Or il n'y a aucune raison d'attribuer le champ $E$ en totalité, soit à $-\nabla V - \not{\partial}_0 A$ soit à $\nabla \times B$, suivant la nature de la particule qui voit le champ. Il est par contre possible que l'on ait :

$$-\nabla V - \partial_0 A = k_1 \frac{\hat{r}}{r^2} \quad , \quad \nabla \times B = k_2 \frac{\hat{r}}{r^2} \quad , \quad E = (k_1 + k_2) \frac{\hat{r}}{r^2} \tag{5-8}$$

où $\hat{r}$ désigne le vecteur unitaire $\hat{r} = \hat{r}/r \cdot \vec{\sigma}$. Nous aurons alors :

$$\nabla \times B = xe \frac{\hat{r}}{r^2} \tag{5-9}$$

où $x$ est un coefficient inconnu. La condition de continuité trouvée par Lochak donne alors :

$$x \frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \tag{5-10}$$

Donc rien n'empêche, si $x$ est grand, que $g$ soit très petit. Ainsi pourrait s'expliquer l'observation par Mikhaïlov [10] d'une charge magnétique élémentaire $g = \alpha e/6$, charge considérablement plus petite que la charge prédite par la relation de Dirac, et de plus impossible si la relation de Dirac est exacte. Nous pensons donc que les lois de l'électromagnétisme peuvent rendre compte, non seulement de l'existence de monopôles magnétiques, mais encore de monopôles de charge beaucoup plus petite que ce que l'on croyait jusqu'ici. La petitesse de ces charges a pu faire passer les particules correspondantes à travers tous les dispositifs expérimentaux traquant les monopôles, dispositifs qui ont tous été conçus jusqu'ici pour mettre en évidence la charge magnétique prévue par la relation de Dirac.

Ou bien cette relation est exacte, et alors les résultats de Mikhaïlov sont faux car impossibles: il ne peut exister de charge 50 000 fois plus petite que celle prévue par la relation de Dirac. Ou bien les résultats expérimentaux sont exacts, et il faut alors expliquer comment ils peuvent être compatibles avec la relation de Dirac.

Gageons que la confirmation des expériences de Mikhaïlov serait, pour la physique, d'une importance considérable.

## Références

[1] D. Hestenes : *Real Spinor Fields.* Journal of Mathematical Physics Vol. 8 number 4. 1967

[2] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* 1/2 . Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol 8 no. 4 1983 et Vol 9 no. 1 1984

[3] G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* 1/2 *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

[4] G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole* International journal of Theoretical Physics Vol 24 no. 10 1985

[5] Louis de Broglie : *Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion)* Gauthier-Villars 1954

[6] G. Casanova : *L'Algèbre Vectorielle.* Presses Universitaires de France 1976.

[7] R. Boudet : *Conservation laws in the Dirac theory.* J. Math. Phys. 26 (4), April 1985

[9] C. Daviau : *Equation de Dirac, symétrie unitaire.* Annales de la Fondation Louis de Broglie (à paraître)

[10] V.F. Mikhaïlov : *Observation of the magnetic effect in the experiments with ferromagnetic aerosols.* Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol 12 no. 4 1987.

[11] Jakobi & G. Lochak : *Introduction des paramètres relativistes de Cayley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac.* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences t.243 p 234-237 16-7-1956

*(Manuscrit reçu le 21 décembre 1988, modifié le 11 mai 1989)*