Electromagnétisme, monopôles magnétiques et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps (2ème partie)*

C. Daviau

La Lande, Pouillé-les-coteaux
44522 Mésanger

RESUME. Le formalisme de l'algèbre d'espace-temps d'Hestenes a été utilisé dans la première partie pour: 1- écrire les équations de l'électromagnétisme de Maxwell et de Louis de Broglie, lorsqu'il existe des monopôles magnétiques. 2- expliquer l'équivalence entre les équations de Dirac et d'Hestenes, et élargir cette équivalence à la théorie de Lochak des monopôles magnétiques. 3- établir qu'il peut exister des monopôles de charge magnétique très petite, 4- ici, (seconde partie de cet article) nous utiliserons l'algèbre d'espace-temps pour rapprocher les ondes des fermions de l'électromagnétisme, associer un champ électromagnétique à l'onde de Dirac - Hestenes, et rapprocher l'équation de Maxwell - De Broglie de l'équation de Dirac - Hestenes.

ABSTRACT. The formalism of space-time algebra of Hestenes is used : - in the first part to write the equations of electromagnetism of Maxwell and Louis de Broglie, when magnetic monopoles exist; - second to explain equivalence between the equations of Dirac and Hestenes, and to extend this equivalence to Lochak's theory of magnetic monopoles; - to establish that monopoles can exist with very small magnetic charge; - in this second part, to compare waves of fermions and electromagnetism, to associate an electromagnetic field to Dirac's waves and to join the equation of Maxwell - de Broglie to the equation of Dirac - Hestenes.

6 - ONDES DE MATIERE ET ELECTROMAGNETISME

Lorsque Louis de Broglie a associé une onde au mouvement de toute particule, il était clair, dans son esprit, que cela généralisait la situation

---

* Travail présenté au séminaire de la Fondation Louis de Broglie le 6 mars 1989

du photon dans l'onde électromagnétique de la lumière. L'onde associée à l'électron devait avoir un lien étroit avec l'électromagnétisme. Par la suite, une autre interprétation a prévalu, où le carré du module de l'onde donne la densité de probabilité de présence de la particule. C'est un point de vue que De Broglie a accepté à contre-coeur, puis contre lequel il a osé s'élever à partir des années 1950.

Nous allons voir qu'il est possible d'attacher un champ électromagnétique à l'onde de l'électron, de telle sorte que l'équation de Dirac apparaisse comme une approximation linéaire de l'équation de Maxwell - De Broglie.

Une partie importante du travail a été effectuée par Hestenes [1] [2], qui a écrit une équation équivalente à celle de Dirac, mais n'utilisant que des tenseurs classiques, ce qui est le cas de la théorie électromagnétique. Nous avons expliqué de manière détaillée, dans la première partie de cet article, comment l'équation d'Hestenes est équivalente à l'équation de Dirac. Nous avons vu également comment était formulé l'électromagnétisme, dans l'algèbre d'espace-temps. Nous avons établi que l'électromagnétisme, avec un champ bivecteur et des courants, pouvait être équivalent à un champ somme d'un scalaire, d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire. Le champ électromagnétique est alors un élément pair quelconque de l'algèbre d'espace-temps, exactement comme l'onde d'Hestenes.

Dans un article récent [3], Fryberger obtient d'ailleurs les mêmes lois pour l'électromagnétisme complété par des termes de magnétisme libre, mais il n'introduit pas les termes de masse propre du photon, qui seront ici essentiels.

Ces termes de masse propre du photon, Louis de Broglie [4] y attachait beaucoup d'importance depuis qu'il les avait découverts. Ils sont certainement extrêmement petits, mais ils permettent de faire du photon une particule comme les autres. Nous allons voir que ce sont justement ces termes qui vont nous permettre de rapprocher les équations de Dirac et de Maxwell. Rappelons (voir la première partie de cet article) que les lois de l'électromagnétisme de Maxwell - De Broglie se résument à :

$$\not\partial F + k_0^2 P_v = \frac{4\pi}{c} J_v \tag{6-1}$$

et

$$\not\partial P_v = F \tag{6-2}$$

L'équation d'Hestenes, équivalente à celle de Dirac, s'écrit :

$$\partial\!\!\!/ \psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi = 0 \tag{6-3}$$

Cette équation nous a paru ressembler de manière frappante à l'équation de Maxwell (6-1), puisqu'elle contient le même potentiel P_v, le même opérateur différentiel, le même type d'objets mathématiques, puisque ψ et F sont tous deux des éléments pairs de l'algèbre d'espace-temps. La principale différence tient au fait que dans l'équation de Maxwell P_v est seul, tandis que dans l'équation de Dirac il est multiplié par ψ à droite.

Or il est généralement possible, en algèbre d'espace-temps, de multiplier l'équation de Dirac - Hestenes par ψ^{-1} à droite, car ψ est généralement inversible. En effet on a :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 & \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 & \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \\ \psi_3 & \overline{\psi}_4 & \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 & \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi} = \gamma_0\psi^+\gamma_0 = \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 & -\overline{\psi}_3 & -\overline{\psi}_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & -\psi_4 & \psi_3 \\ -\overline{\psi}_3 & -\overline{\psi}_4 & \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 \\ -\psi_4 & \psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \tag{6-4}$$

$$\psi\tilde{\psi} = \Omega_1 + \Omega_2\gamma = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_1 & 0 & i\Omega_2 \\ i\Omega_2 & 0 & \Omega_1 & 0 \\ 0 & i\Omega_2 & 0 & \Omega_1 \end{pmatrix} \tag{6-5}$$

où les Ω_1 et Ω_2 sont les invariants de la théorie de Dirac, c'est-à-dire :

$$\Omega_1 = \psi_1\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_4 \tag{6-6}$$

$$\Omega_2 = i(\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_4\overline{\psi}_2) \tag{6-7}$$

Or le calcul du déterminant de la matrice $\psi\tilde{\psi}$ est aisé :

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_1 & 0 & i\Omega_2 \\ i\Omega_2 & 0 & \Omega_1 & 0 \\ 0 & i\Omega_2 & 0 & \Omega_1 \end{vmatrix} = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2 \tag{6-8}$$

De plus

$$\det \tilde{\psi} = \det \gamma_0 \psi^+ \gamma_0 = (\det \gamma_0)^2 \det \psi^+ = \overline{\det \psi}$$

$$\det(\psi\tilde{\psi}) = \det \psi \cdot \det \tilde{\psi} = \mid \det \psi \mid^2 = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2$$

Donc on obtient $\mid \det \psi \mid = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$. En fait le calcul direct du déterminant de ψ, s'il est un peu plus long, nous fournit exactement :

$$\det \psi = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \rho^2 \tag{6-9}$$

Or Hestenes suppose (implicitement) que Ω_1 et Ω_2 ne sont pas tous deux nuls, ce qui est vrai notamment dans le cas de l'onde plane monochromatique, où le premier des deux invariants n'est pas nul. Notons cependant qu'il existe d'intéressantes solutions de l'équation de Dirac dans le cas où les deux invariants sont nuls, donc dans le cas où ψ n'est pas inversible. C'est ce que Lochak a bien montré dans son étude des monopôles magnétiques. [5] [6] [7]

Nous supposerons donc maintenant que les deux invariants ne sont pas simultanément nuls. Dans ce cas Hestenes écrit :

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} R \tag{6-10}$$

où R est une rotation d'espace-temps. On a alors :

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} \tilde{R} \quad , \quad \tilde{R} = R^{-1} \quad , \quad \psi\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\gamma} = \Omega_1 + \gamma\Omega_2$$
$$\Omega_1 = \rho \cos\beta \quad , \quad \Omega_2 = \rho \sin\beta \tag{6-11}$$

$$\psi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{-\beta}{2}\gamma} \tilde{R} = \frac{1}{\rho} e^{\beta\gamma} \tilde{\psi} = \frac{1}{\rho^2} (\Omega_1 - \gamma\Omega_2) \tilde{\psi} \tag{6-12}$$

Multiplions donc l'équation de Dirac - Hestenes à droite par ψ^{-1} :

$$\partial\!\!\!/ \psi \gamma_1 \gamma_2 \psi^{-1} + \frac{mc}{\hbar} \psi \gamma_0 \psi^{-1} + \frac{e}{\hbar c} P_v = 0 \tag{6-13}$$

Dans le cas d'un électron, nous avons un courant électrique :

$$J_v = -ce\psi\gamma_0\tilde{\psi} \tag{6-14}$$

donc l'équation de Maxwell (6-1) s'écrit :

$$\partial\!\!\!/ F + 4\pi e \psi \gamma_0 \tilde{\psi} + k_0^2 P_v = 0 \tag{6-15}$$

Multipliant par $e/\hbar c k_0^2$, nous obtenons :

$$\partial\!\!\!/ \frac{e}{\hbar c k_0^2} F + 4\pi \frac{\alpha}{k_0^2} \psi\gamma_0\tilde{\psi} + \frac{e}{\hbar c} P_v = 0$$

α étant la constante de structure fine. Nous sommes donc amenés à supposer qu'à l'onde de Dirac ψ est associé un champ électromagnétique microscopique :

$$F = k_0^2 \frac{\hbar c}{e} \psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} = k_0^2 \frac{e}{\alpha} \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\gamma} R\gamma_1\gamma_2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{-\beta}{2}\gamma} \tilde{R} = k_0^2 \frac{e}{\alpha} R\gamma_1\gamma_2\tilde{R} \tag{6-16}$$

Soit $k_1 = k_0^2 e/\alpha$. Posons avec Hestenes :

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}. \tag{6-17}$$

Nous obtenons :

$$F = k_1 e_1 e_2 = k_1 e_1 \wedge e_2 \tag{6-18}$$

Le champ microscopique F est un pur bivecteur, comme dans la théorie classique. Il est à noter que la densité et l'angle β disparaissent, dans le calcul de F. Le champ ne dépend que des seuls vecteurs e_1 et e_2, qui sont orthogonaux et du genre espace, car :

$$e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}(e_1e_2 + e_2e_1) = \frac{1}{2}(R\gamma_1\gamma_2\tilde{R} + R\gamma_2\gamma_1\tilde{R}) = \frac{1}{2}R(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1)\tilde{R} = 0$$

$$(e_i)^2 = R\gamma_i\tilde{R}R\gamma_i\tilde{R} = R(\gamma_i)^2\tilde{R} = -R\tilde{R} = -1 \tag{6-19}$$

Effectuons, dans le plan de ces vecteurs, une rotation d'angle θ. Soit (e'_1, e'_2) la nouvelle base :

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \quad , \quad e'_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \\ e'_1e'_2 &= -\cos\theta\sin\theta(e_1)^2 + \cos^2\theta e_1e_2 - \sin^2\theta e_2e_1 + \sin\theta\cos\theta(e_2)^2 \\ &= \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta e_1e_2 + \sin^2\theta e_1e_2 - \sin\theta\cos\theta \\ &= e_1e_2 \end{aligned} \tag{6-20}$$

$$e'_1e'_2 = e_1e_2 \quad , \quad F = k_1e'_1e'_2 \tag{6-21}$$

Donc F est inchangé pour toute rotation dans le plan P défini par ces deux vecteurs. C'est la forme que prend dans la théorie d'Hestenes l'invariance de jauge électrique :

$$\begin{aligned} P_v \to P'_v &= P_v + \frac{\hbar c}{e}\partial\!\!\!/\varphi \\ \psi \to \psi' &= \psi e^{\varphi\gamma_1\gamma_2} \quad , \quad \psi^{-1} \to {\psi'}^{-1} = e^{-\varphi\gamma_1\gamma_2}\psi^{-1} \end{aligned} \tag{6-22}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
F' &= k_1\psi'\gamma_1\gamma_2\psi'^{-1} = k_1\psi e^{\varphi\gamma_1\gamma_2}\gamma_1\gamma_2 e^{-\varphi\gamma_1\gamma_2}\psi^{-1} = k_1\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} = F\\
e'_1 &= \frac{1}{\rho}\psi'\gamma_1\tilde{\psi}' = \frac{1}{\rho}\psi e^{\varphi\gamma_1\gamma_2}\gamma_1 e^{-\varphi\gamma_1\gamma_2}\tilde{\psi}\\
&= \frac{1}{\rho}\psi(\cos 2\varphi\gamma_1 + \sin 2\varphi\gamma_2)\tilde{\psi} \qquad (6\text{-}23)
\end{aligned}$$

$$e'_1 = \cos 2\varphi e_1 + \sin 2\varphi e_2 \quad , \quad e'_2 = -\sin 2\varphi e_1 + \cos 2\varphi e_2 \qquad (6\text{-}24)$$

Ceci correspond bien à une rotation dans le plan P.

Remarquons qu'il n'y a aucune restriction sur l'angle φ, alors que dans la théorie électromagnétique classique, l'invariance de jauge du champ F est subordonnée à la condition $\Box\varphi = 0$. L'invariance de jauge du champ microscopique ne subit aucune restriction, exactement comme pour l'équation de Dirac.

Notons aussi que la théorie de Dirac - Hestenes contenait un autre bivecteur :

$$\mathcal{F} = B\psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi} \quad \text{où} \quad B = \frac{-e\hbar}{2mc} \qquad (6\text{-}25)$$

C'est le bivecteur densité de moment électrique et de moment magnétique. Il ne faut surtout pas confondre ces deux bivecteurs. On a entre eux la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{B}{k_1}F\psi\tilde{\psi} = \frac{B}{k_1}F\rho e^{\beta\gamma} \qquad (6\text{-}26)$$

Regardons maintenant comment l'introduction du champ électromagnétique F permet de rapprocher les équations de Maxwell - De Broglie et de Dirac - Hestenes. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\partial\!\!\!/ F &= k_1\partial\!\!\!/(\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}) = k_1\gamma^\mu\partial_\mu(\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1})\\
&= k_1\gamma^\mu(\partial_\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} + \psi\gamma_1\gamma_2\partial_\mu\psi^{-1})\\
&= k_1(\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} + \gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\partial_\mu\psi^{-1}) \qquad (6\text{-}27)
\end{aligned}$$

Et comme $\psi\psi^{-1} = 1$: $(\partial_\mu\psi)\psi^{-1} + \psi\partial_\mu\psi^{-1} = 0$; $\psi\partial_\mu\psi^{-1} = -(\partial_\mu\psi)\psi^{-1}$ $\partial_\mu\psi^{-1} = -\psi^{-1}(\partial_\mu\psi)\psi^{-1}$ par conséquent :

$$\begin{aligned}
\partial\!\!\!/ F &= k_1\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} - k_1\gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi\psi^{-1}\\
&= k_1\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} - \gamma^\mu F\partial_\mu\psi\psi^{-1} \qquad (6\text{-}28)
\end{aligned}$$

L'équation de Maxwell - De Broglie (6-15) nous donne donc :

$$k_1 \partial\!\!\!/ \psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} - \gamma^\mu F\partial_\mu\psi\psi^{-1} + 4\pi e\psi\gamma_0\tilde{\psi} + k_0^2 P_v = 0 \qquad (6\text{-}29)$$

Multipliant à droite par $1/k_1\psi$, nous obtenons donc :

$$\partial\!\!\!/ \psi\gamma_1\gamma_2 - \gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi + \frac{4\pi e}{k_1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi = 0 \qquad (6\text{-}30)$$

Il suffit donc, pour obtenir l'équation de Dirac-Hestenes, de remplacer $-\gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi + 4\pi e/k_1\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi$ par $\frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0$ et nous obtenons :

$$\partial\!\!\!/ \psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi = 0$$

Appelons équation de linéarisation l'équation

$$-\gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi + \frac{4\pi e}{k_1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 \qquad (6\text{-}31)$$

C'est une linéarisation, car cette équation emplace le premier membre, qui est non linéaire en ψ par le second membre, qui est linéaire. Si l'équation (6-31) est exacte, alors l'équation de Dirac - Hestenes est équivalente à l'équation de Maxwell - De Broglie.

Notons que k_1 est une constante très petite, donc le terme $\gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi$ est souvent négligeable devant $4\pi e/k_1\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi$. Donc l'équation de linéarisation nous donne :

$$\frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 \approx \frac{4\pi e}{k_1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi \qquad (6\text{-}32)$$

INVARIANCE RELATIVISTE DE LA DEFINITION DU CHAMP

Sous une rotation d'espace-temps L, F et ψ se transforment en :

$$F' = LF\tilde{L} \quad , \quad \psi' = L\psi \quad , \quad {\psi'}^{-1} = (L\psi)^{-1} = \psi^{-1}L^{-1} = \psi^{-1}\tilde{L} \qquad (6\text{-}33)$$

Donc nous avons :

$$k_1\psi'\gamma_1\gamma_2{\psi'}^{-1} = k_1 L\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\tilde{L} = LF\tilde{L} = F' \qquad (6\text{-}34)$$

La définition (6-16) du champ F est donc indépendante du repère d'espace-temps.

Multiplions (6-16) à droite par $1/k_1\psi\gamma_2\gamma_1$:

$$\frac{1}{k_1}F\psi\gamma_2\gamma_1 = \frac{k_1}{k_1}\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\psi\gamma_2\gamma_1 = \psi$$

Nous avons donc :

$$\psi = \frac{1}{k_1}F\psi\gamma_2\gamma_1 = \frac{1}{k_1}F(\frac{1}{k_1}F\psi\gamma_2\gamma_1)\gamma_2\gamma_1 = -\frac{1}{k_1^2}F^2\psi \tag{6-35}$$

Et par conséquent :

$$(1+\frac{1}{k_1^2}F^2)\psi = 0 \tag{6-36}$$

et comme ψ est inversible, nous obtenons :

$$k_1^2 + F^2 = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad H^2 = k_1^2 + E^2 \quad \text{et}$$

$$E\cdot H = 0 \quad , \quad F(-\frac{1}{k_1^2}F) = 1 \quad , \quad F^{-1} = -\frac{1}{k_1^2}F \tag{6-37}$$

DE NOUVELLES QUANTITES COVARIANTES

La théorie de Dirac permet de définir cinq champs de caractère tensoriel bien déterminés, relativistes et invariants de jauge. Ce sont les grandeurs de la forme $D = \psi d\tilde{\psi}$, où d vaut $1, \gamma_0, \gamma_1\gamma_2, \gamma_3, \gamma$ (voir par exemple l'excellent petit livre de Casanova [8]). Or nous voyons ici qu'en utilisant non pas $\tilde{\psi}$ mais ψ^{-1}il est possible d'introduire de nouvelles grandeurs, également relativistes et invariants de jauge, à savoir les grandeurs de la forme $\psi\, d\,\psi^{-1}$:

$$1 = \psi\psi^{-1}$$

$$\begin{aligned} f_0 = \psi\gamma_0\psi^{-1} &= \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R\gamma_0\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{\frac{-\beta}{2}\gamma}\tilde{R} \\ &= e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R\gamma_0\tilde{R}e^{\frac{-\beta}{2}\gamma} = e^{\beta\gamma}e_0 = e_0e^{-\beta\gamma} \end{aligned} \tag{6-38}$$

$$\sigma = \psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} = \frac{1}{k_1}F = e_1e_2 \tag{6-39}$$

$$f_3 = \psi\gamma_3\psi^{-1} = e^{\beta\gamma}e_3 = e_3 e^{-\beta\gamma} \tag{6-40}$$

Les grandeurs de la forme $\psi d\tilde{\psi}$ et $\psi d\psi^{-1}$ se transforment en effet de la même manière sous une rotation L d'espace-temps :

$$D = \psi d\tilde{\psi} \quad \text{devient} \quad D' = \psi' d\tilde{\psi}' = L\psi d\tilde{\psi}\tilde{L} = LD\tilde{L}$$

$$\Delta = \psi d\psi^{-1} \quad \text{devient} \quad \Delta' = \psi' d\psi'^{-1} = L\psi d\psi^{-1}L^{-1} = L\Delta\tilde{L}$$

La théorie de Dirac ne pouvait évidemment pas utiliser ψ^{-1}, puisque le Ψ de Dirac est une matrice unicolonne, non inversible. La théorie d'Hestenes n'utilise pas non plus ψ^{-1}, puisque ψ est un élément d'une algèbre de Clifford, considéré uniquement comme un objet géométrique, somme de tenseurs antisymétriques. Nous considérons, nous, que ψ est A LA FOIS un élément d'une algèbre de Clifford et une matrice. En tant que matrice, il est inversible. La nature matricielle de ψ est liée au fait que les matrices de Dirac permettent d'obtenir une réalisation (à deux valeurs) du groupe de Lorentz. Et dans un groupe, il y a nécessairement la notion d'élément inverse.

Les grandeurs de la forme $\Delta = \psi d\psi^{-1}$ sont invariantes de jauge, exactement comme $\psi d\tilde{\psi}$ et pour les mêmes raisons, à savoir que d commute avec $\gamma_1\gamma_2$ lorsque d vaut $1, \gamma_0, \gamma_1\gamma_2, \gamma_3, \gamma$.

Les grandeurs $\psi d\psi^{-1}$ ont pour particularité remarquable de ne pas dépendre de la densité ρ. Leur intensité est rigoureusement la même là où l'onde ψ est très intense, ou bien là où l'onde ψ est évanescente, en fait partout où et quand ψ est inversible. L'onde électromagnétique F associée à l'électron serait donc une onde d'intensité extraordinairement petite, mais uniforme. Nous voyons donc apparaître une sorte de quantification du champ électromagnétique. Un autre aspect qui rapproche le ψ d'Hestenes de l'électrodynamique quantique est que ψ et F sont des matrices, donc peuvent être associés à des applications linéaires agissant sur un espace vectoriel de dimension 4.

7 - INVARIANTS DE ψ ET F AU SENS DU CALCUL MATRICIEL

Lorsque nous utilisons ψ^{-1}, nous nous servons du fait que ψ est une matrice, construite à partir des matrices de Dirac. On pourrait alors craindre que les objets que nous avons étudiés jusqu'ici dépendent de cette réalisation très particulière de l'algèbre de Clifford, et en particulier puissent dépendre du choix effectué arbitrairement pour choisir les matrices de Dirac.

En réalité, il n'en est rien. Car le théorème de Pauli nous indique que si deux ensembles de quatre matrices $\{\gamma^\mu\}$ et $\{\gamma'^\mu\}$ vérifient chacun les relations métriques :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I \quad , \quad \gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu}I \tag{7-1}$$

alors il existe une matrice inversible S telle que, pour chacune des quatre valeurs de l'indice μ, on ait :

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{7-2}$$

et alors on a aussi $\gamma'^\mu\gamma'^\nu = S\gamma^\mu S^{-1}S\gamma^\nu S^{-1} = S\gamma^\mu\gamma^\nu S^{-1}$, donc toute matrice de l'algèbre d'espace-temps D devient, lors du remplacement de γ^μ par γ'^μ :

$$D' = SDS^{-1} \tag{7-3}$$

Pour étudier les grandeurs indépendantes de S, en calcul matriciel, on diagonalise la matrice, et pour cela on commence par chercher les valeurs propres de la matrice étudiée. Nous allons le faire ici pour tout élément pair de l'algèbre d'espace-temps, c'est-à-dire pour toute matrice D de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} & c & \overline{d} \\ b & \overline{a} & d & -\overline{c} \\ c & \overline{d} & a & -\overline{b} \\ d & -\overline{c} & b & \overline{a} \end{pmatrix} \tag{7-4}$$

Les valeurs propres de D sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\mathrm{Det}(D - xI) = 0 \tag{7-5}$$

Or le calcul de ce déterminant nous donne :

$$\begin{gathered} \mathrm{Det}(D - xI) = x^4 - 2Ax^3 + (A^2 + B^2 + 2\Omega_1)x^2 - 2(A\Omega_1 + B\Omega_2)x + \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \\ A = a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(D) \quad , \quad B = \frac{1}{i}(c - \overline{c}) = 2\mathrm{Im}(c) \\ \Omega_1 = a\overline{a} + b\overline{b} - c\overline{c} - d\overline{d} \quad , \quad \Omega_2 = i(a\overline{c} + b\overline{d} - c\overline{a} - d\overline{b}) \end{gathered} \tag{7-6}$$

Les coefficients de l'équation caractéristique sont les mêmes pour D et pour $D' = SDS^{-1}$, donc les grandeurs A, B, Ω_1 et Ω_2 sont indépendantes du choix des matrices de Dirac. Nous avons noté Ω_1 et Ω_2 les deux derniers coefficients, parce que si $D = \psi$, ce sont les deux invariants de la théorie de Dirac, dont on sait bien qu'ils ne dépendent pas du choix des matrices γ^μ. Si nous posons :

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} = s + iY = \begin{pmatrix} s + iY_z & iY_x + Y_y \\ iY_x - Y_y & s - iY_z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c & \overline{d} \\ d & -\overline{c} \end{pmatrix} = X + ip = \begin{pmatrix} X_z + ip & X_x - iX_y \\ X_x + iX_y & -X_z + ip \end{pmatrix} \tag{7-7}$$

Alors on a :

$$A = 2s \quad , \quad B = 2p \quad , \quad \Omega_1 = s^2 + Y^2 - X^2 - p^2 \quad , \quad \Omega_2 = 2(sp - X \cdot Y) \tag{7-8}$$

Soit alors $Z = u + iv$ une racine carrée du nombre complexe $X^2 - Y^2 - 2iX \cdot Y$ c'est-à-dire un nombre complexe tel que :

$$u^2 - v^2 = X^2 - Y^2 \quad , \quad uv = -X \cdot Y \tag{7-9}$$

alors on peut vérifier que l'équation caractéristique s'écrit :

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = 0, \tag{7-10}$$

où les α_i sont les valeurs propres de D :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s + ip + Z = s + u + i(p + v) \\ \alpha_2 &= s + ip - Z = s - u + i(p - v) \\ \alpha_3 &= \overline{\alpha}_1 = s - ip + \overline{Z} = s + u - i(p + v) \\ \alpha_4 &= \overline{\alpha}_2 = s - ip - \overline{Z} = s - u - i(p - v) \end{aligned} \tag{7-11}$$

Ces valeurs propres sont, elles aussi, indépendantes du choix des matrices car ce sont les mêmes pour D et $D' = SDS^{-1}$. Les invariants, par rapport au choix des matrices γ^μ, sont donc s, p, $Y^2 - X^2$ et $X \cdot Y$.

Dans le cas du champ électromagnétique, où

$$F = \begin{pmatrix} iH & E \\ E & iH \end{pmatrix} \tag{7-12}$$

les invariants sont $s = 0$, $p = 0$, et les invariants de la théorie classique, c'est-à-dire $H^2 - E^2$ et $E \cdot H$.

Pour le champ électromagnétique $F = k_1\sigma$, que nous avons associé précédemment à l'électron, nous avons vu que $H^2 - E^2 = k_1^2$ et $E \cdot H = 0$, donc les valeurs propres sont ik_1 et $-ik_1$. On en déduit aisément que $\operatorname{Det} F = k_1^4$.

8 - EQUATION DE DIRAC NON LINEAIRE

Nous allons maintenant refaire, pour l'équation non linéaire (6-30), le calcul du paragraphe 3, c'est à dire passer d'une équation du type Hestenes à une équation utilisant les spineurs de Dirac. Il est en soit intéressant qu'un tel passage soit possible, et cette possibilité devrait permettre de plus facilement comparer ce que nous faisons ici à la théorie classique.

Pour éviter de recommencer les calculs dans le cas électrique et dans le cas magnétique, nous supposerons que l'équation de départ contient à la fois des termes de courant électrique et magnétique :

$$J_v = -ce\psi\gamma_0\tilde{\psi} \quad , \quad J_t = -cg\psi\gamma_3\tilde{\psi}\gamma \tag{8-1}$$

Nous écrirons donc l'équation (6-30) sous la forme complète :

$$\begin{aligned} \partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2 - \gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi + 4\pi e k_1^{-1}\psi\gamma_0\tilde{\psi}\psi \\ + 4\pi g k_1^{-1}\psi\gamma_3\tilde{\psi}\psi\gamma + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi + \frac{g}{\hbar c}P_t\psi = 0 \end{aligned} \tag{8-2}$$

Or nous avons $\psi\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\psi = \Omega_1 + \Omega_2\gamma$ $\psi^{-1} = \tilde{\psi}\tilde{\psi}^{-1}\psi^{-1} = \tilde{\psi}(\psi\tilde{\psi})^{-1}$

$$(\psi\tilde{\psi})^{-1} = (\Omega_1 + \Omega_2\gamma)^{-1} = \frac{1}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}(\Omega_1 - \Omega_2\gamma) = \frac{1}{\rho^2}(\Omega_1 - \Omega_2\gamma)$$

$$\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} = \psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi}(\psi\tilde{\psi})^{-1} = \psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi} \cdot \frac{1}{\rho^2}(\Omega_1 - \Omega_2\gamma) \tag{8-3}$$

$$\begin{aligned} \psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi} = & \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 & \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 & \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \\ \psi_3 & \overline{\psi}_4 & \psi - 1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 & \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 & -\overline{\psi}_3 & -\overline{\psi}_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & -\psi_4 & \psi_3 \\ -\overline{\psi}_3 & -\overline{\psi}_4 & \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 \\ -\psi_4 & \psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} iA & i\overline{B} & C & \overline{D} \\ iB & -iA & D & -C \\ C & \overline{D} & iA & i\overline{B} \\ D & -C & iB & -iA \end{pmatrix} \tag{8-4}$$

$$\begin{cases} A = -\mid \psi_1 \mid^2 + \mid \psi_2 \mid^2 + \mid \psi_3 \mid^2 - \mid \psi_4 \mid^2 \\ B = 2(\overline{\psi}_3\psi_4 - \overline{\psi}_1\psi_2) \\ C = i(\overline{\psi}_2\psi_4 + \psi_1\overline{\psi}_3 - \overline{\psi}_4\psi_2 - \psi_3\overline{\psi}_1) \\ D = 2i(\psi_2\overline{\psi}_3 - \overline{\psi}_1\psi_4) \end{cases} \tag{8-5}$$

Soit alors

$$Y = \begin{pmatrix} A & \overline{B} \\ B & -A \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} C & \overline{D} \\ D & -C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} &= \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} iY & X \\ X & iY \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_1 & -i\Omega_2 \\ -i\Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} i(Y\Omega_1 - X\Omega_2) & X\Omega_1 + Y\Omega_2 \\ X\Omega_1 + Y\Omega_2 & i(Y\Omega_1 - X\Omega_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8-6}$$

$$\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} = \begin{pmatrix} iH' & E' \\ E' & iH' \end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$H' = \frac{1}{\rho^2}(\Omega_1 Y - \Omega_2 X) \quad , \quad E' = \frac{1}{\rho^2}(\Omega_1 X + \Omega_2 Y) \tag{8-7}$$

L'équation (8-2) nous donne par conséquent :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_0 & \nabla\!\!\!/ \\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iH' & E' \\ E' & iH' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_0\phi_1 & \partial_0\phi_2 \\ \partial_0\phi_2 & \partial_0\phi_1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iH' & E' \\ E' & iH' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_j\phi_1 & \partial_j\phi_2 \\ \partial_j\phi_2 & \partial_j\phi_1 \end{pmatrix} \\ &+ 4\pi e k_1^{-1}\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_1 & i\Omega_2 \\ i\Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}8) \\ &+ 4\pi g k_1^{-1}\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_1 & i\Omega_2 \\ i\Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{e}{\hbar c}\begin{pmatrix} V & -A \\ A & -V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix} + \frac{g}{\hbar c}\begin{pmatrix} iB & -iW \\ iW & -iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Cette équation matricielle 4×4 nous donne 4 équations matricielles 2×2, mais il n'y a que deux équations indépendantes car 2 termes sont exactement les opposés des deux autres. donc l'équation (8-8) est équivalente aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}&-i(\partial_0\phi_1\sigma_3+\nabla\!\!\!/\phi_2\sigma_3)-iH'\partial_0\phi_1-E'\partial_0\phi_2-\sigma^jE'\partial_j\phi_1\\&-i\sigma^jH'\partial_j\phi_2+4\pi ek_1^{-1}(\Omega_1\phi_1-i\Omega_2\phi_2)\\&+4\pi gk_1^{-1}(-\Omega_2\phi_2\sigma_3-i\Omega_1\phi_1\sigma_3)+\frac{e}{\hbar c}(V\phi_1-A\phi_2)+\frac{ig}{\hbar c}(B\phi_1-W\phi_2)=0\end{aligned}\tag{8-9}$$

$$\begin{aligned}&-i(\partial_0\phi_2\sigma_3+\nabla\!\!\!/\phi_1\sigma_3)-iH'\partial_0\phi_2-E'\partial_0\phi_1-\sigma^jE'\partial_j\phi_2\\&-i\sigma^jH'\partial_0\phi_1+4\pi ek_1^{-1}(i\Omega_2\phi_1-\Omega_1\phi_2)\\&+4\pi gk_1^{-1}(i\Omega_1\phi_2\sigma_3+\Omega_2\phi_1\sigma_3)+\frac{e}{\hbar c}(V\phi_2-A\phi_1)+\frac{ig}{\hbar c}(B\phi_2-W\phi_1)=0\end{aligned}\tag{8-10}$$

Multiplions (8-9) par i et (8-10) par $-i$:

$$\begin{aligned}&\partial_0\phi_1\sigma_3+\nabla\!\!\!/\phi_2\sigma_3+H'\partial_0\phi_1-iE'\partial_0\phi_2-i\sigma^jE'\partial_j\phi_1\\&\quad+\sigma^jH'\partial_j\phi_2-\frac{g}{\hbar c}(B\phi_1-W\phi_2)+4\pi iek_1^{-1}(\Omega_1\phi_1-i\Omega_2\phi_2)\\&\quad+4\pi igk_1^{-1}(-\Omega_2\phi_2\sigma_3-i\Omega_1\phi_1\sigma_3)+\frac{ie}{\hbar c}(V\phi_1-A\phi_2)=0\end{aligned}\tag{8-11}$$

$$\begin{aligned}&-\partial_0\phi_2\sigma_3-\nabla\!\!\!/\phi_1\sigma_3-H'\partial_0\phi_2+iE'\partial_0\phi_1+i\sigma^jE'\partial_j\phi_2\\&-\sigma^jH\partial_j\phi_1+4\pi iek_1^{-1}(\Omega_1\phi_2-i\Omega_2\phi_1)\\&+4\pi igk_1^{-1}(-\Omega_2\phi_1\sigma_3-i\Omega_1\phi_2\sigma_3)+\frac{ie}{\hbar c}(A\phi_1-V\phi_2)-\frac{g}{\hbar c}(W\phi_1-B\phi_2)=0\end{aligned}\tag{8-12}$$

Chacune de ces deux équations est une équation matricielle 2×2, et nous donne 4 équations numériques. L'écriture développée de chacune nous permet de voir, comme au paragraphe 3, que 2 équations, à chaque fois, sont les conjuguées complexes des deux autres, donc que le système de 4 équations est équivalent au système de 2 équations ne contenant que les ψ_i et pas les $\overline{\psi}_i$.

Donc avec $\varphi=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}$ et $\chi=\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$, et comme ϕ_1 et $\phi_1\sigma_3$ ont tous deux pour première colonne φ, tandis que ϕ_2 et $\phi_2\sigma_3$ ont tous deux pour première colonne χ, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\partial_0\varphi + \nabla\!\!\!/\chi + H'\partial_0\varphi - iE'\partial_0\chi - i\sigma^j E'\partial_j\varphi\\&+\sigma^j H'\partial_j\chi + 4\pi iek_1^{-1}(\Omega_1\varphi - i\Omega_2\chi)\\&+4\pi igk_1^{-1}(-\Omega_2\chi - i\Omega_1\varphi) + \frac{ie}{\hbar c}(V\varphi - A\chi) + \frac{g}{\hbar c}(W\chi - B\varphi) = 0\end{aligned} \tag{8-13}$$

$$\begin{aligned}&-\partial_0\chi - \nabla\!\!\!/\varphi - H'\partial_0\chi + iE'\partial_0\varphi + i\sigma^j E'\partial_j\chi\\&-\sigma^j H'\partial_j\varphi + 4\pi iek_1^{-1}(\Omega_1\chi - i\Omega_2\varphi)\\&+4\pi igk_1^{-1}(-\Omega_2\varphi - i\Omega_1\chi) + \frac{ie}{\hbar c}(A\varphi - V\chi) + \frac{g}{\hbar c}(B\chi - W\varphi) = 0\end{aligned} \tag{8-14}$$

Le système formé par les deux équations précédentes peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\partial_0 & \nabla\!\!\!/\\ -\nabla\!\!\!/ & -\partial_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}H' & -iE'\\ iE' & -H'\end{pmatrix}\partial_0\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}\\&+\begin{pmatrix}-i\sigma^j E' & \sigma^j H'\\ -\sigma^j H' & i\sigma^j E'\end{pmatrix}\partial_j\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} + \frac{4\pi ie}{k_1}[\Omega_1\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - i\Omega_2\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\end{pmatrix}]\\&+\frac{4\pi g}{k_1}[-i\Omega_2\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\end{pmatrix} + \Omega_1\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}] + \frac{ie}{\hbar c}\begin{pmatrix}V & -A\\ A & -V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}\\&+\frac{g}{\hbar c}\begin{pmatrix}W & -B\\ B & -W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = 0\end{aligned} \tag{8-15}$$

Nous obtenons donc l'équation

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \gamma^0\begin{pmatrix}H' & -iE'\\ -iE' & H'\end{pmatrix}\partial_0\Psi + \gamma^j\begin{pmatrix}H' & -iE'\\ -iE' & H'\end{pmatrix}\partial_j\Psi\\&+\frac{4\pi ie}{k_1}(\Omega_1\Psi - i\Omega_2\gamma_5\Psi) + \frac{4\pi g}{k_1}(-i\Omega_2\gamma_5 + \Omega_1)\Psi\\&+\frac{g}{\hbar c}\gamma^\mu B_\mu\gamma_5\Psi + \frac{ie}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu\Psi = 0\end{aligned} \tag{8-16}$$

Si nous utilisons la matrice :

$$M = I_4 + \begin{pmatrix}H' & -iE'\\ -iE' & H'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_2 + H' & -iE'\\ -iE' & I_2 + H'\end{pmatrix} \tag{8-17}$$

Nous obtiendrons finalement l'équation de Dirac non linéaire :

$$\begin{aligned}&\big[\gamma^\mu(M\partial_\mu+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu+\frac{g}{\hbar c}B_\mu\gamma_5)\\&+\frac{4\pi ie}{k_1}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)+\frac{4\pi g}{k_1}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)\big]\Psi=0\end{aligned}\qquad(8\text{-}18)$$

Dans le cas purement électrique où g est nul, nous obtenons :

$$\gamma^\mu(M\partial_\mu+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu)+4\pi iek_1^{-1}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)]\Psi=0\qquad(8\text{-}19)$$

Tandis que dans le cas purement magnétique où e est nul, nous obtenons :

$$[\gamma^\mu(M\partial_\mu+\frac{g}{\hbar c}B_\mu\gamma_5)+4\pi gk_1^{-1}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)]\Psi=0\qquad(8\text{-}20)$$

Les équations proposées ici ressemblent à l'équation étudiée par Lochak, qui s'écrit,

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu+\frac{g}{\hbar c}B_\mu\gamma_5)+\frac{1}{2}m(\rho^2)\frac{c}{\hbar}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)]\Psi=0$$

Le terme $\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5$ s'introduit dans nos équations à partir du terme de courant. Les équations contiennent, outre ce terme non linéaire, la matrice M, elle aussi dépendante de ψ, mais indépendante de sa norme car M ne varie pas si l'on multiplie ψ par une constante.

Conclusion

L'algèbre d'espace-temps se révèle un outil mathématique extrêmement intéressant pour étudier l'électromagnétisme. Nous pouvons y écrire très simplement les équations de Maxwell, les compléter pour tenir compte du magnétisme libre, s'il existe, ou pour tenir compte de la masse propre du photon, ainsi que le pensait Louis de Broglie. En faisant cela, nous voyons que l'électromagnétisme et la théorie de Dirac utilisent le même opérateur différentiel, le même potentiel, les mêmes éléments pairs de l'algèbre d'espace-temps. Nous sommes alors conduits à essayer de rapprocher le ψ de Dirac - Hestenes et le champ électromagnétique F. Ceci nous amène à associer un champ électromagnétique microscopique et quantifié à l'onde de matière ψ. L'équation de Dirac apparait alors comme une linéarisation de l'équation de Maxwell - De Broglie.

Il reste bien sûr à étudier en détail les équations ici obtenues. Il serait particulièrement intéressant de savoir si nos équations non linéaires admettent des solutions de type soliton.

La linéarisation que nous avons étudiée jusqu'ici mêlait une grandeur classique de la théorie de Dirac-Hestenes, $\psi\gamma_0\tilde{\psi}$ et une grandeur nouvelle : $\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}$.

Une autre possibilité est que les deux termes soient tous deux du type $\psi d\psi^{-1}$ ce qui parait plus audacieux, mais aussi plus symétrique. Or si nous avons :

$$F = k_1\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} \quad , \quad J_v = k_2(-e)\psi\gamma_0\psi^{-1} \tag{8-21}$$

où k_2 est une constante, l'équation de Maxwell - De Broglie (6-1) nous donne :

$$\partial\!\!\!/(k_1\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}) + k_0^2 P_v = \frac{4\pi}{c}k_2(-e)\psi\gamma_0\psi^{-1} \tag{8-22}$$

avec (6-28), nous obtenons donc :

$$k_1\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} + \frac{4\pi}{c}k_2 e\psi\gamma_0\psi^{-1} + k_0^2 P_v = k_1\gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi\psi^{-1} \tag{8-23}$$

Multipliant alors par $1/k_1\psi$ à droite, nous obtenons :

$$\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{4\pi}{c}k_2 e\frac{1}{k_1}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v = \gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi \tag{8-24}$$

Posant alors

$$\frac{mc}{\hbar} = \frac{4\pi}{c}\frac{k_2}{k_1}e \tag{8-25}$$

c'est-à-dire :

$$k_2 = \frac{1}{2\alpha}\frac{mc^2}{h}k_0^2 = \frac{k_0^2}{2\alpha}\nu \tag{8-26}$$

L'équation de Maxwell - De Broglie est équivalente à :

$$\partial\!\!\!/\psi\gamma_1\gamma_2 + \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma_0 + \frac{e}{\hbar c}P_v\psi = \gamma^\mu\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1}\partial_\mu\psi \tag{8-27}$$

L'équation d'Hestenes, donc aussi celle de Dirac, s'obtiennent en annulant purement et simplement le terme non linéaire du second membre de (8-27). Donc si (8-21) est correct, le terme de masse de l'équation de Dirac n'est autre que le terme de courant de l'équation de Maxwell

- De Broglie. L'équation de Dirac est une approximation de l'équation de Maxwell - De Broglie décrivant l'évolution des champs et courants microscopiques, champs et courants indépendants de la densité de probabilité de présence. La linéarisation consiste à ignorer complètement le terme non linéaire. La validité de l'équation de Dirac est donc forcément limitée aux cas pour lesquels cette liquidation du terme non linéaire est sans importance.

Une étude détaillée reste à faire, mais il est probable que le cas où la linéarisation est acceptable doit correspondre aux états stationnaires de la théorie classique, les situations transitoires nécessitant, elles, de tenir compte aussi du terme non linéaire de l'équation (8-27).

Références

[1] D. Hestenes : *Real Spinor Fields.* Journal of Mathematical Physics Vol. 8 number 4. 1967

[2] D. Hestenes : *A Unified Language for Mathematics and Physics, Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics.* JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)

[3] D. Fryberger : *On Generalized Electromagnetism and Dirac Algebra*, Foundations of Physics, Vol 19, no. 2, 1989

[4] Louis de Broglie : *Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion)*, Gauthier-Villars 1954

[5] G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole*, International journal of Theoretical Physics Vol 24 no. 10 1985

[6] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* 1/2. Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol 8 no. 4 1983 et Vol 9 no. 1 1984

[7] G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* 1/2 *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

[8] G. Casanova : *L'Algèbre Vectorielle.* Presses Universitaires de France 1976.

(Manuscrit reçu le 11 mai 1989)