L'Univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire*

Louis de Broglie

RESUME. Le but de cet article est d'exposer la forme remarquablement simple que prend la mécanique, aussi bien sous son aspect ancien que sous son nouvel aspect ondulatoire, quand on adopte l'idée d'un Univers à cinq dimensions mis en avant par MM. Kaluza et Kramers. La conséquence la plus attrayante de cette idée est de faire entièrement disparaître de la mécanique la notion de force et de la remplacer par des concepts géométriques, même dans le cas du mouvement d'une charge électrique ponctuelle dans un champ électromagnétique. De plus, grâce à la théorie de l'Univers à cinq dimensions, il est possible de donner aux lois de propagation, dans la nouvelle mécanique ondulatoire, une forme très satisfaisante ; ce fait avait déjà été signalé dans un intéressant travail par M. O. Klein, mais l'équation de propagation proposée par lui paraît devoir être modifiée dans le sens indiqué dans le présent mémoire.

ABSTRACT. The aim of this article, is to show the remarkably simple form given to Mechanics, either Classical or more recent Wave mechanics, by the concept of a 5-dimensional Universe, as suggested by Kaluza and Kramers. The most appealing consequence of this idea is to rid Mechanics of the force concept, replacing it by geometry, even in the case of a pointlike charged particle in an electromagnetic field. Moreover, following such a 5-dimensional theory of Universe, propagation laws take a very satisfactory form in Wave Mechanics. This had already been outlined in an interesting paper by O. Klein, but it seems that the propagation equation he suggested ought to be modified in the way hereafter indicated.

* Cet article a été publié originellement dans: Jour. Phys. série VI, t. 3, n°2, (1927), p. 65.

I. INTRODUCTION

1. La notion de force et la relativité généralisée

La conséquence essentielle du principe d'équivalence est d'avoir fait disparaître la notion métaphysique de force de la théorie de la gravitation. Le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation est défini, dans la conception d'Einstein, par la simple condition que la ligne d'espace-temps représentant ce mouvement est une géodésique. Si le champ de gravitation est nul, l'espace-temps est euclidien et les géodésiques sont des droites, comme le veut le principe de l'inertie. Si le champ de gravitation n'est pas nul, l'espace-temps n'est pas euclidien et les géodésiques ne sont plus des droites, de sorte que les trajectoires spatiales des points matériels sont courbes.

Le succès de cette belle interprétation du champ gravifique rend très tentant d'expulser entièrement de la Physique la notion de force en la remplaçant par des notions tirées de la géométrie métrique, mais il y a une difficulté dont il faut bien se rendre compte. Dans l'état actuel de nos connaissances, il semble que toutes les forces dont l'expérience nous révèle l'existence se ramènent à 2 types seulement : les forces de gravitation et les forces électromagnétiques. Nous l'avons dit, le premier type de forces est entièrement ramené à la notion de courbure de l'espace-temps, mais il n'en est pas de même pour le second. En effet, la trajectoire d'une charge ponctuelle dans une région où règne un champ électromagnétique, mais où le champ gravifique est insensible, n'est pas rectiligne, bien que l'espace-temps soit euclidien : la ligne d'univers de la charge n'est donc pas une géodésique. Bien plus, des points matériels de même masse portant des charges différentes auront des trajectoires différentes, de sorte qu'aucune classe de courbes de l'espace-temps définie par une propriété *intrinsèque* ne peut être identifiée avec les lignes d'univers possibles des charges ponctuelles, lignes qui dépendent de la nature du mobile par l'intermédiaire du rapport e/m_0 de la charge à la masse propre.

Pour parachever l'oeuvre d'Einstein et pour ramener la force électromagnétique à des grandeurs géométriques, M. Kaluza [1] a développé une théorie hardie mais très belle : la théorie de relativité à 5 dimensions. M. O. Klein [2] a montré que cette relativité à 5 dimensions permettait d'écrire d'une façon remarquablement symétrique les équations de la nouvelle mécanique ondulatoire. Comme toutes ces conceptions sont assez peu connues des physiciens et que, de plus, je préfère écrire différemment certaines équations du travail de M. Klein, je crois utile de résumer ici le côté dynamique de cette question. [1]

II. POINT DE VUE DES MECANIQUES NON ONDULATOIRES

2. Mouvement d'un point dans un champ gravifique

Envisageons le mouvement d'un point matériel de masse propre m_0 dans un champ gravifique où l'on a la relation métrique

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \ , \tag{1}$$

avec la convention habituelle de sommation des indices.

En changeant le signe ordinairement choisi, nous appellerons action hamiltonienne du point l'intégrale curviligne :

$$A(M) = \int_0^M m_0 c ds \tag{2}$$

prise le long de la ligne d'univers depuis un point origine O jusqu'au point M. Le principe d'Hamilton nous montre donc que les lignes d'univers sont les géodésiques de l'espace-temps.

On obtient très facilement les équations du mouvement en écrivant :

$$\delta \int_0^M m_0 c ds = \delta \int_0^M m_0 c g_{ik} \frac{dx^i}{ds} dx^k = \delta \int_0^M m_0 c g_{ik} u^i u^k ds = 0 \tag{3}$$

et en remarquant que, *les extrémales cherchées étant des géodésiques*, $s(M)$ ne varie pas (au premier ordre) quand on varie la ligne d'intégration. Les équations classiques d'Euler-Lagrange correspondant à (3) sont donc :

$$\frac{d}{ds}(m_0 c g_{ik} u^k) = \frac{1}{2} m_0 c \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} u^\mu u^\nu. \tag{4}$$

Ce sont les équations du mouvement et il est facile de vérifier qu'en première approximation elles conduisent à la théorie newtonienne de la

[1] N.D.L.R. Einstein a écrit deux articles sur la théorie de Kaluza : Akad. Wiss., phys.-math. Kl., p. 23-25, 1927 ; A. Einstein et P. Bergmann, Ann. Math., Series 2, p. 683-701, **39**, 1938.

gravitation. Ce point est aujourd'hui si connu qu'il paraît inutile d'y insister.

3. Mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électromagnétique

Pour simplifier, supposons le champ gravifique négligeable et prenons des axes rectangulaires. Au point de vue relativiste, le champ électromagnétique est défini par un vecteur d'espace-temps $\vec{\varphi}$ dont les composantes sont données en fonction du potentiel scalaire ψ et du potentiel vecteur $\vec{a}$ par les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_4 = \varphi^4 = \frac{\psi}{c} \quad &, \quad \varphi_1 = -\varphi^1 = -\frac{a_x}{c} \quad , \\ \varphi_2 = -\varphi^2 = -\frac{a_y}{c} \quad &, \quad \varphi_3 = -\varphi^3 = -\frac{a_z}{c} \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Nous savons que les champs électrique et magnétique sont définis par les formules :

$$\vec{h} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi - \frac{\partial a}{\partial t} \quad , \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{a} \ . \tag{6}$$

La force qui agit sur la charge e est, d'après Lorentz :

$$\vec{f} = e\{\vec{h} + \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]\} \ . \tag{7}$$

L'action hamiltonienne du mobile doit ici s'écrire :

$$A(M) = \int_0^M (m_0 c + e\varphi_s) ds \ , \tag{8}$$

φ_s étant la composante du vecteur $\vec{\psi}$ tangentielle à la ligne d'univers. Comme φ_s dépend en général des x_i, la ligne d'univers n'est plus une géodésique et dépend du rapport e/m_0.

Les extrémales du problème de variation hamiltonien n'étant plus des géodésiques, nous écrirons, pour avoir une intégrale à limites non variables :

$$\delta \int_{t_0}^{tm} L dt = 0 \ , \tag{9}$$

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + e(c\varphi_4 + v_x\varphi_x + v_y\varphi_y + v_z\varphi_z),$$

v_x, v_y, v_z étant les composantes de la vitesse au sens usuel. Les équations de Lagrange sont alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

et l'on vérifie aisément qu'elles ont la forme vectorielle :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^x}}\right) = e\vec{f}\ . \tag{11}$$

Ce sont les équations de la dynamique de l'électron où la notion de force subsiste.

4. La relativité à 5 dimensions

Imaginons, avec MM. Kaluza et Kramers, que, pour représenter l'ensemble des événements de l'Univers, il faille employer une multiplicité à 5 dimensions, c'est-à-dire ajouter à l'espace-temps une cinquième dimension correspondant à une cinquième variable x^0. Les variations de cette cinquième variable échappent complètement à nos sens, de telle sorte que deux points de l'Univers correspondant aux mêmes valeurs des 4 variables d'espace-temps mais à des valeurs différentes de la variable x^0 sont pour nous indiscernables l'un de l'autre. Nous sommes comme enfermés dans notre multiplicité espace-temps à 4 dimensions et nous ne percevons que les projections sur cet espace-temps des points de l'Univers à 5 dimensions.

Dans ces conditions, l'élément de ligne d'univers sera donné par la formule :

$$d\sigma^2 = \gamma_{00}(dx^0)^2 + 2\sum_1^4 \gamma_{0i} dx^0 dx^i + \sum_1^4 \sum_1^4 \gamma_{ik} dx^i dx^k\ , \tag{12}$$

où nous supposerons tous les γ indépendants de la coordonnée x^0.

En passant d'un système d'axes de référence à un autre animé d'un mouvement quelconque par rapport au premier, nous pouvons opérer toutes sortes de changements de variables dans l'espace-temps, mais ces changements de variables ne sauraient affecter la variable x^0. Il paraît donc logique de dire que tous les changements de variables qui sont *humainement* possibles sont de la forme :

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{13}$$

La quantité

$$\gamma_{00} dx_0^2 + \sum_1^4 \gamma_{0i} dx^0 dx^i$$

est donc *pour nous*, un invariant, et on voit de suite qu'il en est de même de

$$ds^2 = \left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^k \ . \tag{14}$$

Dans la formule (14) et dans celles qui suivront, il faut toujours n'effectuer la sommation des indices que pour les valeurs $1, 2, 3, 4$ correspondant à l'espace-temps.

Posons alors :

$$d\theta = \sqrt{\gamma_{00}}\ dx^0 + \frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}} dx^i \ . \tag{15}$$

C'est pour nous un invariant et l'on peut évidemment écrire :

$$d\sigma^2 = ds^2 + d\theta^2 \ . \tag{16}$$

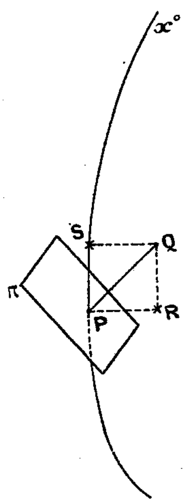

Figure 1. $\overline{PQ} = d\sigma$, $\overline{PS} = d\theta$, $\overline{PR} = ds$.

Pour parvenir à l'interprétation des phénomènes électromagnétiques, il est nécessaire d'introduire les potentiels. Les γ_{0i} se transformant comme des vecteurs d'espace-temps, on est amené à poser :

$$\gamma_{0i} = \alpha\gamma_{00}\varphi_i \tag{17}$$

les φ_i étant définis par (5), et α étant une constante d'homogénéité. L'équation $d\theta = 0$ exprime que le déplacement infinitésimal considéré est normal à la direction x^0, c'est-à-dire à l'intersection des surfaces $x^1 = Cte$, $x^2 = Cte$, $x^3 = Cte$, $x^4 = Cte$, intersection qui, en général, n'est pas normale à notre espace-temps $x^0 = Cte$. L'équation $d\theta = 0$ n'est intégrable, d'après la définition (17) de γ_{0i}, que si les champs électriques et magnétiques sont nuls ; il n'existe donc pas, en général, de multiplicité à 4 dimensions qui soit normale en tout point à la direction x^0. Mais il est naturel de supposer que l'élément de toute ligne d'Univers satisfaisant à la condition $d\theta = 0$ (c'est-à-dire partout normale à la cinquième dimension) a une mesure entièrement déterminée par les phénomènes de gravitation et qu'il est, par suite, donné par l'expression $g_{ik}dx^i dx^k$ de la théorie d'Einstein. D'après (16) et (14), ceci nous amène à poser :

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} = g_{ik} + \gamma_{00}\alpha^2\varphi_i\varphi_k\ . \tag{18}$$

Il est intéressant de se représenter les choses géométriquement au moyen de la figure ci-contre (fig.1). Sur cette figure est tracée une ligne coordonnée x^0. En un point P de cette ligne est représentée, par un élément de plan π oblique sur la direction x^0, une petite portion de la multiplicité à 4 dimensions $x^0 =$ Constante passant par P. $\overline{PQ}$ est un élément de ligne d'Univers de longueur $d\sigma$; PS, sa projection orthogonale sur la direction x^0 (composante covariante de $d\sigma$ suivant x^0) ; $\overline{PR}$, sa projection normale à la direction x^0. La formule (16) montre de suite que l'on a :

$$\overline{PS} = d\theta \quad , \qquad \overline{PR} = ds.$$

Nous verrons plus loin [formule (26)] que la tangente $d\theta/ds$ de l'angle QPR est proportionnelle au rapport e/m_0 du point matériel dont PQ est l'élément de ligne d'Univers. De là résulte que la ligne d'Univers de tout mobile fait en chaque point le même angle avec la direction x^0, angle qui est droit si la charge électrique est nulle.

Il est donc évident que les lignes coordonnées x^0 possèdent, en un certain sens, un caractère absolu, notre espace-temps peut-être considéré comme une coupe quelconque à 4 dimensions de l'Univers à 5 dimensions, les intersections de cette coupe avec les lignes coordonnées x^0 ayant seules un sens absolu. Ceci peut s'interpréter en admettant, avec Klein, que les lignes x^0 sont fermées et que leur longueur totale est inférieure à tout ce que nous pouvons mesurer ; l'Univers serait en quelque sorte filiforme dans le sens normal à la cinquième dimension.

On peut, à l'aide d'un principe de variation, déduire de la conception de l'Univers à cinq dimensions la loi de gravitation d'Einstein et, du même coup, les équations de Maxwell [3]. Je n'insiste pas ici sur ce côté de la question et je me borne à noter qu'il résulte de ces raisonnements la conséquence suivante : le produit $\gamma_{00}\alpha^2$ est relié à la constante usuelle de gravitation G par la relation :

$$\gamma_{00}\alpha^2 = \frac{16\pi G}{c^2} \ . \tag{19}$$

5. La ligne d'Univers de tout point matériel est une géodésique

En admettant l'existence d'une cinquième dimension d'Univers, on peut énoncer le principe suivant : "*Dans l'univers à cinq dimensions, la ligne d'Univers de tout point matériel est une géodésique*". Nous allons le vérifier en montrant que ce principe conduit bien aux équations de la dynamique einsteinienne à condition de faire une hypothèse qui détermine la signification géométrique de la charge électrique.

Nous définirons une vitesse d'Univers à 5 composantes :

$$u^i = \frac{dx^i}{d\sigma} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{20}$$

et nous écrirons, pour définir les géodésiques :

$$\delta \int_0^M \frac{1}{2} d\sigma = \delta \int_0^M \frac{1}{2} [\gamma_{00}(u^0)^2 + 2\gamma_{0i}u^0u^i + \gamma_{ik}u^iu^k] d\sigma = 0, \tag{21}$$

O et M étant deux points fixes de l'Univers. Les extrémales étant des géodésiques, nous avons à varier une intégrale de la forme $\int L d\delta$ prise entre des limites fixes (voir paragraphe 2) et nous pouvons écrire les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \ . \tag{22}$$

On obtient d'abord ainsi, en tenant compte de (15) :

$$\gamma_{00}u^0 + \gamma_{0i}u^i = \sqrt{\gamma_{00}}\frac{d\theta}{d\sigma} = Cte = p_0 \ . \tag{23}$$

Puis, pour les variables d'indices 1, 2, 3, 4, on trouve :

$$\frac{d}{d\sigma}(g_{ik}u^k + \alpha p_0 \varphi_i) = \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} + \alpha p_0 u^\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} \ . \tag{24}$$

Si le champ électromagnétique est nul, on n'a qu'à prendre s comme variable indépendante au lieu de σ pour retrouver l'équation (4) de la théorie d'Einstein. Si le champ de gravitation est nul, les g_{ik} sont constants et l'on a :

$$\frac{d}{d\sigma}(g_{ik}u^k) = \alpha p_0 u^\mu \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right) = \alpha\sqrt{\gamma_{00}}\frac{d\theta}{d\sigma}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right)u^\mu \ . \tag{25}$$

Supposons que l'inclinaison de la ligne d'Univers d'un mobile de masse m_0 et de charge e sur la direction x^0 soit définie par la relation fondamentale :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{e}{\alpha\sqrt{\gamma_{00}}m_0 c} \ . \tag{26}$$

Alors, l'équation (25) peut s'écrire :

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{e}{m_0 c}\cdot\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right) \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \tag{27}$$

et, à l'aide des définitions (5), nous retrouvons aisément les équations (11) en coordonnées rectangulaires.

Donc avec les significations géométriques que nous avons attribuées aux potentiels et au rapport e/m_0, les lignes d'Univers à 5 dimensions des points matériels sont toujours des géodésiques. *La notion de force est complètement bannie de la mécanique.*

Comme les constantes α et γ_{00} ne peuvent pas dépendre des propriétés du mobile envisagé, l'équation (26) nous mène à poser :

$$m_0 c = I\frac{ds}{d\sigma} \quad , \quad \frac{e}{\alpha\sqrt{\gamma_{00}}} = I\frac{d\theta}{d\sigma}, \tag{28}$$

I étant un invariant qui, en raison de (16), est tel que : [2]

$$I^2 = m_0^2 c^2 + \frac{e^2}{\alpha^2 \gamma_{00}}. \tag{29}$$

Pour retrouver, dans le cas de la charge nulle, l'action hamiltonienne de la formule (2), nous poserons :

$$\begin{aligned} A(M) = \int_0^M I d\sigma &= \int_0^M I \left(\frac{d\theta}{d\sigma} d\theta + \frac{ds}{d\sigma} ds \right) \\ &= \int_0^M \left(\frac{e}{\alpha\sqrt{\gamma_{00}}} d\theta + m_0 c ds \right) = \frac{e}{\alpha} x_0 + f(x_1 x_2 x_3 x_4), \end{aligned} \tag{30}$$

III. POINT DE VUE DE LA MECANIQUE ONDULATOIRE

6. La mécanique ondulatoire et la relativité à 4 dimensions

J'ai exposé, dans un précédent article, les principes de la mécanique ondulatoire [4]. L'idée essentielle de cette nouvelle doctrine est de considérer la matière comme un phénomène de nature ondulatoire représenté par une fonction qui obéit à certaines équations de propagation. Lorsque les conditions permettant d'étudier les solutions de l'équation de propagation au moyen des procédés de l'optique géométrique sont réalisées, chaque unité matérielle peut être comparée à un groupe d'ondes monochromatiques de fréquences comprises dans un très petit intervalle $\nu - \delta\nu$, $\nu + \delta\nu$; la superposition des ondes du groupe donne naissance à un point particulier de concordance de phase se déplaçant suivant un des *rayons* de l'onde centrale de fréquence ν, et ce point singulier, traduction analytique du point matériel, se meut suivant les lois des dynamiques anciennes. Quand les approximations de l'optique géométrique ne sont plus valables, il faut étudier rigoureusement les solutions des équations de propagation ; c'est en cela que la nouvelle mécanique généralise l'ancienne et la fécondité de cette généralisation déjà attestée par les

[2] Les quantités (28) sont les composantes dans la direction x^0 et normalement à cette direction du vecteur de longueur I porté tangentiellement à la ligne d'Univers. Ce vecteur est évidemment la généralisation à cinq dimensions de l'impulsion d'Univers.

beaux résultats de M. Schrödinger est encore loin d'être entièrement épuisée.

Dans le cas du mouvement en dehors de tout champ, nous avons trouvé l'équation de propagation (en coordonnées galiléennes rectangulaires) :

$$\Delta u - \frac{1}{c_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} u, \tag{31}$$

m_0 étant une constante caractéristique du mobile (masse propre). En employant les notations de la relativité (à 4 dimensions), on peut écrire (31) sous la forme :

$$g^{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u, \tag{32}$$

en posant comme d'habitude

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ .$$

Supposons qu'il y ait un champ de gravitation, mais pas de champ électromagnétique. Nous ne pouvons conserver la forme (32) parce que les $\partial^2 u/\partial x^i \partial x^k$ ne sont pas les composantes d'un tenseur. En introduisant la dérivée covariante du gradient de u, on est amené à remplacer l'équation (32) par l'équation invariante :

$$g^{ik}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} - \left\{\frac{ik}{r}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u \ , \tag{33}$$

avec la notation bien connue :

$$\left\{\frac{ik}{r}\right\} = \frac{1}{2} g^{r\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu}\right). \tag{34}$$

L'équation (33) sera l'équation de propagation des ondes matérielles dans le champ gravifique. Vérifions qu'au degré d'approximation de l'optique géométrique, nous retrouvons la dynamique einsteinienne du champ de gravitation. En effet, l'onde centrale du groupe correspondant à une unité matérielle doit alors pouvoir s'écrire :

$$u = C e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}. \tag{35}$$

Substituons (35) dans (33) et, puisque nous employons les approximations de l'optique géométrique, ne conservons au 1er membre que les termes du second degré par rapport aux dérivés premières de u ; il vient :

$$g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = m_0^2c^2 \ , \tag{36}$$

d'où l'on tire :

$$\varphi = m_0c\int_0^M u_i dx^i = \int_0^M m_0 c ds \ . \tag{37}$$

φ est donc identique à l'action hamiltonienne définie par (2) et les rayons de l'onde centrale (35) sont des géodésiques de l'espace-temps. Comme la trajectoire du point matériel est un de ces rayons, nous retrouvons la dynamique einsteinienne du point matériel dans un champ gravifique.

7. La mécanique ondulatoire et l'Univers à 5 dimensions

L'équation (33) est valable quand on fait abstraction des phénomènes électromagnétiques. Pour en tenir compte, en introduisant les idées de Kaluza, il suffit de généraliser l'équation (33), en admettant que le phénomène périodique matériel est, dans l'Univers à 5 dimensions, une solution de l'équation :

$$\gamma^{ik}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^k} - \left\{\frac{ik}{r}\right\}\frac{\partial u}{\partial x^r}\right] = -\frac{4\pi^2}{h^2}I^2u, \tag{38}$$

où I est l'invariant défini par (29), invariant qui s'introduit naturellement à la place de m_0c dans le cas des points électrisés. [3]

Si les procédés de l'optique géométrique sont valables, on démontre, comme au paragraphe précédent, que l'onde centrale du groupe définissant un point matériel a pour expression

$$Ce^{\frac{2\pi i}{h}A} = f(x,y,z,t)e^{\frac{2\pi i}{h}\cdot\frac{ex_0}{\alpha}} \ . \tag{38}$$

où A est l'action de la formule (30). Il en résulte que la ligne d'Univers à 5 dimensions de tout point matériel est une géodésique et, par suite, à

[3] Naturellement, dans l'équation (38), les indices varient de 0 à 4.

l'approximation de l'optique géométrique, nous retrouvons la dynamique einsteinienne de gravitation et la dynamique de l'électron.

O. Klein a écrit l'équation (38) sans le second membre, et il en conclut que les lignes d'Univers sont des géodésiques de longueur nulle ; il ne semble pas douteux que le second membre de (38) soit nécessaire et que les lignes d'Univers soient des géodésiques, mais non pas des géodésiques de *longueur nulle.*

Sans plus supposer l'optique géométrique applicable, voyons ce que devient l'équation (38) en l'absence de champ de gravitation. Les g_{ik} prennent alors, en coordonnées rectangulaires, leurs valeurs galiléennes et les relations (17) et (18) donnent les γ_{ik}. De là, on tire facilement les γ^{ik}. Comme, d'après (19), le produit $\gamma_{00}\alpha^2$ est de l'ordre de 10^{-27} cgs, on peut supposer les termes de cet ordre négligeables par rapport à l'unité. Nous ne pouvons plus supposer que u est de la forme

$$Ce^{\frac{2\pi i}{h}A} ,$$

mais nous ne considérons encore que u est le produit d'une fonction de x, y, z, t, par $\sin 2\pi/hex_0/\alpha$. Dans ces conditions, un calcul facile permet, à l'approximation envisagée, d'écrire (38) sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left[\frac{1}{\gamma_{00}} + \frac{\sigma^2}{c^2}(\psi^2 - a^2)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}& \\ -2\sum_{xyz}\alpha\frac{a_x}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial x} - \frac{2\alpha\psi}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial t} &= -\frac{4\pi^2 I^2}{h^2}u\end{aligned} \tag{39}$$

ou, en tenant compte de la forme admise pour u :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{4\pi i}{h}\sum_{xyz}\frac{ea_x}{c}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4\pi i}{h}\frac{e\psi}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}& \\ + \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\psi^2 - a^2)\right]u &= 0 .\end{aligned} \tag{40}$$

Cette équation est l'équation (59) de mon article déjà cité du *Journal de Physique.* Après avoir donné cette équation, j'ajoutais : "Il faut cependant remarquer que l'équation (59) contient des termes imaginaires et ceci soulève peut-être quelques objections au point de vue physique". On voit qu'ici l'anomalie disparaît, puisque (40) n'est qu'une forme dégénérée de (39).

8. Conclusion

L'équation (38) qui, en vertu de (29) et (19), peut encore s'écrire sous la forme très remarquable :

$$\gamma^{ik}\left[\frac{\partial x^i \partial x^k}{\partial^2 u} - \left\{\frac{ik}{r}\right\}\frac{\partial u}{\partial x^r}\right] + \frac{4\pi^2 c^2}{h^2}\left[m_0^2 + \frac{e^2}{16\pi G}\right] u = 0 \qquad (41)$$

paraît être l'équation générale de la mécanique ondulatoire du point matériel. Pour approfondir le problème de la matière et de sa structure atomique, il sera sans doute nécessaire de se placer systématiquement au point de vue de l'Univers à 5 dimensions qui semble plus fécond que celui de M. Weyl. Si l'on parvient à interpréter la façon dont interviennent, dans l'équation (41), les constantes e, m_0 , c, h et G, on sera bien près d'avoir compris quelques-uns des secrets les plus troublants de la Nature.

Références

[1] Kaluza, *Sitzungsber. d. Ber. Akad.*, (1921), p. 966 ; Kramers, *Proc. Amst.*, t. 28 (1922), p. 7.
[2] O. Klein, *Zts. f. Phys.*, t. 36 (1926), p. 895.
[3] O. Klein, *loc. cit.*, p. 897-899.
[4] *Journal de Physique*, t. 7 (novembre 1926), p. 321.