Représentation graphique des ondes de phase dans un univers à cinq dimensions de O. Klein [1]

P. Ehrenfest et G.E. Uhlenbeck

Leiden (Hollande)

RESUME. La conception de de Broglie de l'électron libre en tant que groupe d'ondes de phase est interprétée dans la théorie de Klein et la représentation graphique correspondante indiquée.

ABSTRACT. De Broglie's conception of free electrons as phase-wave groups is interpreted in O. Klein's theory and the corresponding graphical representation is given.

§ **1.** Selon les idées de de Broglie [2], le mouvement d'un électron dans la "réalité" consiste en la propagation d'ondes présentant de la dispersion dans l'éther d'un univers à quatre dimensions. Cette théorie ondulatoire de la matière a considérablement progressé avec Schrödinger [3]. O. Klein est arrivé indépendamment à des conclusions semblables ; la différence essentielle consiste en ce que chez lui les ondes se propagent sans dispersion dans un univers à cinq dimensions. [1] Les ondes de de Broglie sont alors la "trace" des ondes à cinq dimensions dans l'espace ordinaire.

Dans le cas du mouvement libre de forces d'un électron nous allons examiner de plus près cette relation et la représenter graphiquement.

§ **2.** Selon Klein, dans le cas du mouvement libre de forces de l'électron, les ondes de phase pentadimensionnelles sont des ondes de phase qui satisfont à l'équation d'ondes sans dispersion :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+m^2c^2\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\right)U=0, \tag{1}$$

[1] Qui, comme l'admet Klein, est périodique dans la cinquième dimension, avec une période qui est reliée à la constante de Planck.

où x_0 se réfère à la cinquième dimension ; dans cette direction les ondes ont la période prescrite h.

Nous pouvons donc représenter ces ondes de phase (ou U-ondes) par

$$U = u \ \exp[(2\pi i/h)(h\nu t - px - qy - rz - x_0)], \tag{2}$$

dans laquelle les périodes $1/\nu$, h/p, h/q, h/r dans les directions t, x, y, z, sont reliées, suite à (1), par

$$p^2 + q^2 + r^2 + m^2c^2 = (h\nu/c)^2 \ . \tag{3}$$

Leurs "traces" dans l'univers ordinaire [2] sont aussi des ondes planes de vitesse supérieure à celle de la lumière, selon

$$V_{ph} = (h\nu)/c\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \ . \tag{4}$$

ce qui donne par (3) avec la loi de dispersion de de Broglie :

$$v_{ph} = h\nu/\sqrt{h^2\nu^2 - m^2c^4} \ . \tag{5}$$

§ **3.** Si, au lieu de prendre les trois directions usuelles de l'espace on en choisit une seule, par exemple x, nous pouvons alors procéder à une représentation graphique correspondante.

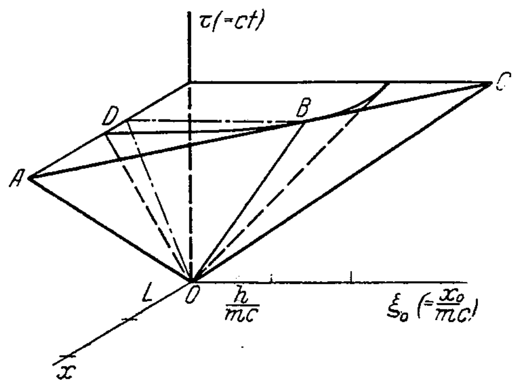

Figure 1.

[2] C'est-à-dire leur section avec un R_4, qui est déterminé par x_0 = constante.

Posons[3]:

$$\tau = ct \quad , \quad \xi_0 = x_0/mc$$

Nous voyons que dans l'espace $(x, \tau\ , \xi_0)$ les plans de même phase forment premièrement un angle de 45° avec l'axe des τ et sont au départ tangents au cône d'équation $x^2 + \xi_0^2 - \tau^2 = 0$ et que deuxièmement, dans la direction ξ_0, ces plans se répètent avec une période h/mc.

Les périodes dans les directions x et τ sont reliées entre elles par (2). Si on détermine la tangente OB, ces deux périodes sont également déterminées.

Si on affirme selon les idées de de Broglie, Schrödinger et Klein, que l'électron se meut comme un "groupe", modélisé par des ondes U, il est clair que OB représente la ligne d'univers de l'électron dans un univers à cinq (ici trois) dimensions. Car deux ondes U voisines ne peuvent se renforcer que le long de la ligne OB, de même phase. [4]

Dans l'espace $(x, \tau\ , \xi_0)$ tous les électrons ont la même vitesse. Dans un espace à quatre (ici deux) directions, la ligne d'univers de l'électron est représentée par la projection OD de OB sur le plan $xO\tau$. Il apparaît ainsi que toutes les vitesses sont inférieures à la vitesse de la lumière. On démontre aisément que :

a) Les grandeurs p, q, r, qui ne déterminaient que les périodes des ondes de phase dans les directions x, y, z, représentent aussi les composantes d'impulsion de l'électron.

Démonstration : l'équation de OD est $(h\nu/c)x - p\tau = 0$, donc la vitesse des électrons dans l'espace $xO\tau$ est

$$V_e = cp/h\nu \ , \tag{6}$$

et (3) devient

$$p^2 + m^2c^2 = (h\nu/c)^2 \ .$$

Si on pose $\beta = V_e/c$, il en découle que $p = mV_e/\sqrt{1-\beta^2}$.

b) Dans l'espace ordinaire à quatre (ici deux) dimensions la vitesse de l'électron est également la vitesse de groupe de la "trace" des ondes de phase.

---

[3] Pour les protons, il faut partout remplacer m par M ; l'échelle dans la direction ξ_0 est donc différente pour les protons et les électrons.

[4] De même que l'onde de phase, il faut naturellement admettre que OB se répète également dans la direction ξ_0 avec la période h/mc.

Démonstration : L'équation de OA est $(H\nu/c)\tau - px = 0$, donc la vitesse de la trace des ondes est

$$v_{ph} = H\nu/cp = h\nu/\sqrt{h^2\nu^2 - m^2c^4} \tag{7}$$

en concordance avec (4) et (5).

Il nous reste à démontrer qu'entre V_e et V_{ph} la relation usuelle entre vitesse de groupe et vitesse de phase est valable :

$$\frac{1}{V_e} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{V_{ph}}\right)$$

Ceci se vérifie aisément. [5] [6]

§ **4.** Si l'électron se déplace par exemple dans un anneau ou entre deux parois avec une période donnée, alors l'onde de phase doit avoir la même période.

De la figure et de la relation (3) il découle que si, à côté de la période h dans la direction x_0, une certaine période L est attribuée à la direction x, il ne peut apparaître qu'un nombre discret de tangentes OB, et par conséquent dans l'espace à quatre (ici deux) dimensions, qu'un nombre discret de vitesses.

Si n est un nombre entier, il faut que

$$L = n \cdot (h/p)$$

ou encore

$$pL = pdq = nh \ . \tag{8}$$

Ceci détermine, si p représente aussi l'impulsion de l'électron, les vitesses possibles. Comme on peut le voir à partir de la figure et de la relation (3), la périodicité temporelle est aussi déterminée.

Références

[1] O. Klein, *ZS. f. Phys.* **87**, 895, 1926.
[2] L. de Broglie, *Ann. de Phys.* (10) **8**, 22, 1925.
[3] E. Schrödinger, *Annalen der Physik* **79**, 361, 489, 734, 1926.

Leiden, Instituut voor theoretische Natuurkunde, août 1926

[5] Dans l'espace (x, t, x_0) les domaines de vitesse du proton et de l'électron sont différents.

[6] Celles-ci ont toujours, comme cela résulte de la figure et de la relation (4), une vitesse supérieure à celle de la lumière.