

Remarques sur le choix des équations fondamentales, dans les théories de champs à bosses

J. LAMEAU

ENSM, 1, rue de la Noë
44072 NANTES Cedex 03

RESUME. Cet article a pour but de compléter celui que l'auteur a publié dans ces Annales en 1988 [1], intitulé : "Remarques sur les théories de champs à bosses : équations du mouvement d'une particule, onde et moment magnétique associés à une particule".

On présente quelques remarques qui peuvent s'avérer utiles pour le choix de l'équation fondamentale d'une théorie de champ à bosse.

On corrige une erreur commise dans [1], relativement à la notion de centre d'une bosse de champ.

ABSTRACT. The aim of this paper is to complete the one that the author has published in these Annals in 1988 [1] and which was entitled : "Remarks about the bunched field theories : particle dynamics equations, wave and magnetic moment associated with a particle".

Some remarks are presented, that can be useful to choose the fundamental equations in a bunched field theory.

An error which was introduced in [1], about the notion of particle center, has also been corrected.

Dans tout cet article, on utilisera les mêmes notations que dans [1].

1. Remarques sur la solution statique à symétrie sphérique, en théorie électromagnétique non linéaire

On a vu que, dans les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld, la solution statique à symétrie sphériques (SSSS dans la suite) est déterminée à partir de l'équation algébrique

$$F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^2 + \frac{q^2}{r^4} = 0 \quad (1)$$

Born et Infeld ont développé la théorie dans les deux cas suivants [2][3] :

$$L = \frac{2}{\beta} [\sqrt{1 + \beta F} - 1] \quad (2)$$

$$L = \frac{2}{\beta} [\sqrt{1 + \beta F - \beta^2 G^2} - 1] \quad (3)$$

Infeld et Hoffmann [4] ont proposé le lagrangien

$$L = \frac{1}{\beta} \log[1 + \beta F] \quad (4)$$

Ces lagrangiens ont les deux propriétés suivantes :

1) si β tend vers zéro, L tend vers F , lagrangien de la théorie de Maxwell ;

2) si F est petit, L est approximativement égal à F .

Comme $G = 0$ dans le cas de la *SSSS*, on a, pour les deux lagrangiens de Born-Infeld,

$$F = \frac{-q^2}{\beta q^2 + r^4} \quad (5)$$

D'où l'intensité du champ électrique,

$$E = \frac{q}{\sqrt{\beta q^2 + r^4}} \quad (6)$$

Si r est grand, ou si β tend vers zéro, on retrouve approximativement le champ coulombien.

Dans le cas du lagrangien d'Infeld-Hoffmann, on a, comme solution tendant vers zéro à l'infini,

$$F = \frac{1}{2\beta^2} \left[- \left(2\beta + \frac{r^4}{q^2} \right) + (\operatorname{sgn} q) \frac{r^2}{q} \sqrt{4\beta + \frac{r^4}{q^2}} \right] \quad (7)$$

et, comme en théorie de Born-Infeld, on a encore $E = -\sqrt{F}$. A grande distance de l'origine, E ne se comporte pas comme un champ coulombien. Il tend vers zéro plus vite que $1/r^2$, comme on le constate en utilisant l'identité, valable pour tout $x > 0$,

$$\sqrt{x^2 + 1} - x < \frac{1}{x}$$

Mais on peut remarquer qu'il en est de même dans la théorie linéaire où l'on admet que la masse du photon n'est pas nulle.

D'autre part, aussi bien en théorie de Born-Infeld qu'en théorie d'Infeld-Hoffmann, le champ électrique n'est pas nul pour $r = 0$, ce qui fait que l'origine est, tout comme en théorie de Maxwell, un point singulier pour le champ électrique. En ce point, bien que l'intensité E soit bornée, la direction du champ vectoriel $\vec{E}$ n'est pas définie. Ces *SSSS* ne satisfont donc pas la condition exigée par Einstein et Louis de Broglie pour les théories de champs à bosse : "... le monde physique doit être entièrement décrit à l'aide de grandeurs de champ bien définies en tout point de l'espace-temps, et obéissant à des équations bien déterminées à caractère non aléatoire." [5]

Pour une *SSSS* correspondant à un champ bien défini en tout point, le champ électrique doit être nul pour $r = 0$. Le potentiel électrique V est alors localement maximum ou minimum à l'origine, puisque, pour un champ électrostatique, on a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Il ne semble pas qu'on ait proposé de lagrangien conduisant à une *SSSS* qui vérifie cette condition.

Enfin, une remarque importante peut être faite au sujet de l'équation (1). C'est une équation algébrique où l'inconnue est F . Avec les lagrangiens que l'on vient de citer, elle a une solution réelle pour n'importe quelle valeur de r . Mais, bien évidemment, il n'en est pas ainsi avec n'importe quel lagrangien. Il est clair qu'avec certains choix du lagrangien L , on obtiendra des champs qui ne seront pas définis sur certains intervalles, pour la variable r . Par exemple, a et b étant deux constantes positives, on pourra obtenir un champ défini pour $0 < r < a$, puis non défini pour $a < r < b$, et enfin défini de nouveau pour $b < r$. Entre les sphères centrées à l'origine et ayant les rayons a et b , le champ n'est pas véritablement nul, il n'est même pas défini. Ce qui, à vrai dire, pour le physicien, revient au même. Avec d'autres lagrangiens, on obtiendra un champ défini pour $0 < r < a$, puis non défini pour $a < r$, donc un champ à support borné.

De tels champs ne peuvent évidemment pas correspondre à la réalité physique. Le choix du lagrangien devra donc respecter les conditions suivantes :

a) il donne une *SSSS* où le champ électrique $\vec{E}$ est bien défini en tout point (pas de point singulier, pas de domaine où le champ n'est pas défini);

b) lorsque r tend vers l'infini, le champ a un comportement asymptotique convenable, comparable à celui qu'il présente en théorie linéaire.

Ces conditions éliminent évidemment un grand nombre de lagrangiens. On peut aussi noter que l'équation algébrique (1) ne peut être résolue exactement que dans quelques cas très particuliers. Par exemple, en théorie de Born-Infeld, on doit trouver la racine d'un polynôme du premier degré, et en théorie d'Infeld-Hoffmann les racines d'un polynôme du deuxième degré. Des remarques analogues peuvent évidemment être faites pour toutes les théories de champs à bosses, et non seulement pour la *SSSS*, mais aussi pour les solutions plus compliquées, aussi bien en ce qui concerne les variables d'espace que la variable temps.

Terminons ce paragraphe en corrigeant une erreur commise dans [1], et relative à la notion de centre d'une bosse de champ. Page 209, ce centre est défini comme le point où l'intensité du champ est maximum. Or, on vient de voir que, pour certaines *SSSS*, on peut, et même on doit, avoir un champ nul au centre de la bosse. Il faut donc définir autrement la notion de centre d'une bosse.

Pour un champ scalaire, on pourra définir le centre comme le point où le gradient du champ est nul. Dans les cas plus compliqués de champs vectoriels ou tensoriels, on pourra considérer l'intensité du champ, et définir le centre comme le point où le gradient de ce champ scalaire est nul.

2. Remarques sur l'amplitude de l'onde associée à une particule

Rappelons d'abord brièvement l'essentiel du paragraphe 7 de la référence [1], relatif à l'onde associée à une particule immobile. On considère le cas particulier où la structure initiale de la bosse de champ a un centre de symétrie, ce qui fait que ce centre reste immobile. On désigne toujours par U le champ fondamental, qui peut être scalaire, vectoriel ou tensoriel, par U_S la *SSSS*, et par u_0 le champ complémentaire qui correspond à la petite déformation initiale. L'état initial de la particule correspond donc au champ $U_S + u_0$. Si la bosse de champ est stable, et si elle correspond à la réalité physique, où à toute particule immobile est associée une onde stationnaire, la déformation $u(P, t)$ peut se mettre sous la forme

$$u(P, t) = a(P)\phi(t),$$

$\phi(t)$ étant une fonction périodique du temps.

Dans le cas où $u(P, t)$ reste suffisamment petit en tout point et à tout instant, on peut admettre que son évolution est régie par l'équation aux variations associée à la *SSSS*, et que

$$\phi(t) = e^{i\omega t}$$

Par exemple, si le champ est régi par l'équation de Klein-Gordon non linéaire

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + F(U) = 0,$$

la déformation $u(P, t)$ est régie par l'équation linéaire associée à la *SSSS*

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F'(U_S)u = 0$$

D'où, pour l'amplitude $a(P)$, l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla^2 a + \left[\frac{\omega^2}{c^2} + F'(U_S) \right] a = 0,$$

qui ne fournit malheureusement pas de fréquence propre bien déterminée. Ces considérations sont bien sûr valables pour toute théorie de champ à bosse, y compris pour la future théorie conforme à la réalité physique, qui reste à découvrir.

Toutefois, deux questions se posent au sujet de l'amplitude $a(P)$:

- 1) pourquoi n'est-elle pas nulle ?
- 2) dans quelle mesure la linéarisation proposée est-elle valable ?

A la première question, il est facile de répondre. La *SSSS* n'est jamais réalisée exactement dans la nature, car une particule n'est jamais rigoureusement soustraite à toute action d'origine extérieure. La déformation initiale $u_0(P)$ n'est donc jamais nulle, et, pour une particule stable, il y aura toujours une onde associée.

Le domaine où $a(P)$ n'est pas négligeable peut très bien être beaucoup plus étendu que la bosse de champ, où la non-linéarité joue un rôle appréciable, de telle sorte que la particule semble pratiquement ponctuelle par rapport à l'onde qui l'accompagne.

Pour la deuxième question, il est évident que la linéarisation n'est jamais rigoureusement valable ; elle ne l'est qu'approximativement, et

d'autant mieux que l'amplitude de l'onde est plus petite. Il est vraisemblable que, dans certaines circonstances, cette amplitude peut être trop grande pour que la linéarisation soit permise. Mais, dans ce cas, les difficultés mathématiques liées à la non-linéarité des équations fondamentales sont bien plus grandes. Il se peut que cette non-linéarité ait pour conséquence une limitation de l'ensemble des valeurs possibles pour l'amplitude, comme cela se constate pour certains oscillateurs non linéaires.

Soulignons enfin le fait que, pratiquement, une particule ne reste jamais parfaitement immobile par rapport à un référentiel galiléen. En effet, une bosse de champ ne peut que très exceptionnellement avoir un centre de symétrie. Comme on l'a vu dans [1], son centre, en général, ne peut pas rester fixe. Tout comme la *SSSS*, la bosse de champ parfaitement symétrique est purement imaginaire.

3. Comparaison avec la théorie de la double solution

En théorie de la double solution, la particule est représentée par une bosse de champ de nature entièrement ondulatoire. Le champ se met sous la forme $u = u_0 + v$. u_0 est très grand dans la bosse de champ qui constitue la particule, et négligeable en dehors. v a par contre une valeur faible, mais non négligeable, dans un domaine bien plus étendu que la bosse. u est régi par une équation fondamentale non linéaire, tandis que v , sauf dans la bosse de champ où la non-linéarité a des effets appréciables, est régi par l'approximation linéaire de cette équation fondamentale. L'onde statistique ψ de la Mécanique ondulatoire vérifie par hypothèse la relation $\psi = Cv$, C étant une constante.

Par contre, dans les théories de champ à bosse telles que les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld, la bosse de champ n'est pas de nature ondulatoire. Pour une particule immobile, u_0 est remplacé par le champ statique représenté par la *SSSS*. Quant à v , elle est remplacée par le champ ondulatoire qui est désigné par u au paragraphe précédent, et qui correspond à la petite déformation de la bosse de champ. Mais, contrairement au point de vue présenté dans ce paragraphe 2, l'onde v de la théorie de la double solution n'a rien à voir avec la notion de stabilité d'une bosse de champ. Il est cependant évident que ce problème de stabilité se pose aussi en théorie de la double solution, pour des particules de nature entièrement ondulatoire. Il s'agit alors de la stabilité d'un paquet d'ondes très intense dont l'évolution est gouvernée par une équation aux dérivées partielles non linéaire.

On pourrait enfin noter que la théorie de la double solution ne réalise pas l'incorporation de la particule à un champ unique, dans le cas d'une particule chargée électriquement, car elle est alors source de deux champs, le champ ondulatoire scalaire v , et le champ électromagnétique. Et l'on a même trois champs si l'on prend en compte la gravitation, qui joue vraisemblablement un rôle dans la bosse de champ, en raison de la très grande intensité qu'y prend la partie principale u_0 du champ scalaire.

4. Fonction d'onde statistique associée à une particule en mouvement quelconque

Jusqu'ici, on n'a traité que le cas d'une particule qui reste immobile dans un référentiel galiléen donné. Il faut traiter aussi le cas d'une particule en mouvement accéléré. Considérons par exemple un électron en mouvement dans un atome d'hydrogène. Pour simplifier, considérons cet électron comme n'étant rien de plus qu'une bosse d'un champ électromagnétique, obéissant aux équations fondamentales d'une théorie du type Born-Infeld ou de la théorie de Mie. Admettons que le champ électrique créé par le proton central est un champ coulombien à symétrie sphérique.

En chaque point, à chaque instant, interviennent quatre champs électromagnétiques :

- 1) le champ coulombien f_p du proton ;
- 2) la partie principale F_0 du champ propre de l'électron, qui correspond à la $SSSS$ dans le cas de l'électron immobile, et au champ u_0 , intense dans la bosse de champ, en théorie de la double solution ; ce champ dépend du temps, mais n'est pas de nature ondulatoire ;
- 3) un champ ondulatoire f qui est l'analogue du champ u de déformation du paragraphe 2, du champ $(\delta\vec{E}, \delta\vec{B})$ de la note [1], ou encore du champ faible v de la théorie de la double solution ; l'existence de ce champ traduit la stabilité de l'électron ; il ne s'agit plus cependant d'une onde stationnaire ;
- 4) un champ f_s , faible, de nature aléatoire, traduisant la présence de l'environnement de l'atome.

Les notations F_0, f, f_p, f_s ont été choisies par analogie avec la notation $f_{\alpha\beta}$ souvent utilisée en formalisme quadridimensionnel pour représenter le tenseur champ électromagnétique.

Le champ total $F = F_0 + f + f_p + f_s$ est évidemment solution des équations fondamentales du champ. Dans la bosse de champ qui constitue l'électron, F_0 est très grand, de telle sorte que la non-linéarité y joue un rôle essentiel. En dehors de cette bosse, F_0 est assez faible pour que le champ total F obéisse à l'approximation linéaire des équations fondamentales. Quant à f , f_p , f_s , on admet qu'ils sont partout d'un ordre de grandeur pour lequel l'approximation linéaire est pleinement justifiée. On néglige ainsi ce qui se passe au voisinage immédiat du proton central, où le champ coulombien a une très grande intensité.

Relativement au champ ondulatoire f , on peut cependant faire l'hypothèse suivante : dans certaines circonstances, il est possible que ce champ prenne une amplitude trop grande pour que la non-linéarité puisse être négligée, même loin de la bosse de champ qui constitue la particule. Si cette amplitude a tendance à croître et à prendre des valeurs incompatibles avec les équations fondamentales du champ, on peut imaginer qu'elle revienne à une faible valeur à la suite de l'émission d'un paquet d'onde, c'est-à-dire, dans le cas de l'électron, de l'émission d'un photon, qui pourrait être une particule de nature entièrement ondulatoire, du type soliton, comme les particules considérées en théorie de la double solution. Cette hypothèse permettrait peut-être d'expliquer l'émission d'un photon lors des sauts d'énergie dans l'atome.

En raison de la non-linéarité des équations fondamentales, il est difficile de traiter mathématiquement le problème du mouvement accéléré de l'électron dans l'atome. Comme on l'a déjà montré dans [1], la dynamique d'une particule a nécessairement un caractère probabiliste, d'une part à cause du champ stochastique f_s , d'autre part à cause du fait que la bosse de champ est un objet déformable. La connaissance de l'évolution de la forme d'une bosse de champ, au cours d'un mouvement accéléré, représente un problème mathématique d'une extrême complexité. Et rien ne permet de déterminer expérimentalement la forme d'une particule.

La description exacte du mouvement d'une bosse de champ étant donc impossible, on est naturellement amené à se poser la question de la possibilité d'obtenir des renseignements de nature statistique sur ce mouvement. En théorie de la double solution, Louis de Broglie postule la relation $\psi = Cv$. Par quoi pourrait-on remplacer cette hypothèse dans les théories de champs à bosse où la partie principale du champ propre d'une particule n'est pas de nature ondulatoire ?

On pourrait envisager la solution suivante. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, on considère toutes les solutions des équations fondamentales du champ qui correspondent à un niveau d'énergie donné, ainsi qu'à une valeur donnée du moment cinétique et de sa composante suivant un axe. Ces solutions sont en nombre infini, puisque, comme conditions initiales pour la bosse de champ déformable qu'est l'électron, il y a une infinité de possibilités. On choisit au hasard un très grand nombre N de ces solutions, désignées par $F_k(P, t)$. On définit le champ moyen

$$\Phi_N(P, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F_k(P, t) \quad (8)$$

Si l'on admet que l'électron, c'est-à-dire ici la bosse de champ électromagnétique où la non-linéarité a des effets appréciables, est beaucoup plus petit que l'atome, alors, pour presque toutes les valeurs de k , le point P est en dehors de la bosse de champ. Autrement dit, pour tout point P , la non-linéarité n'intervient que pour un très petit nombre de valeurs de k . Comme N est très grand, on peut négliger dans (8) les termes $F_k(P, t)$ qui correspondent à ces quelques valeurs de k . Ce qui fait que le champ abstrait Φ_N est régi par l'approximation linéaire des équations fondamentales du champ. En raison de son caractère aléatoire, le champ f_s donnera une moyenne nulle.

On définit ensuite le champ

$$\Phi(P, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(P, t) \quad (9)$$

Ce champ, comme Φ_N , est régi par l'approximation linéaire des équations fondamentales du champ. Sa définition présente toutefois une difficulté. En effet, l'ensemble de toutes les solutions considérées n'est pas dénombrable, et elles devraient être identifiées par un indice qui varie de manière continue. Ces solutions correspondant chacune à un état initial de la bosse de champ, elles sont trop nombreuses pour être identifiées par un nombre réel, et même par plusieurs. On ne peut donc pas envisager un procédé de passage à la limite où le symbole $\sum_{k=0}^N$ fournirait une intégrale simple ou multiple. On peut toutefois proposer la solution suivante : on choisit au hasard, parmi toutes les solutions possibles, un ensemble infini dénombrable de solutions F_k des équations fondamentales du champ, et le passage à la limite défini par (9) ne s'applique qu'à ces solutions. Si elles sont assez voisines les unes des autres, on peut admettre que la limite obtenue ne dépend pas du choix que l'on a fait.

Il est alors naturel de faire l'hypothèse suivante : “la probabilité de présence de l'électron, au point P , à l'instant t , est proportionnelle à la norme (ou peut-être à son carré) du champ $\Phi(P, t)$ ”.

Cette hypothèse est naturelle, car pour toute particule, en dehors du très petit domaine où son champ propre est très intense et où il peut varier de manière très compliquée, ce champ décroît régulièrement quand on s'éloigne de la particule. C'est donc là où le champ moyen Φ est le plus élevé que l'on a le plus de chances de trouver l'électron.

Dans le cas d'un champ scalaire, la norme du champ est sa valeur absolue. Dans le cas d'une théorie électromagnétique, le problème est plus compliqué : on peut utiliser soit une norme construite à partir des champs électrique et magnétique, soit une norme construite à partir du quadripotentiel-vecteur.

Bien évidemment, on ne considère que les solutions qui satisfont certaines conditions : comportement asymptotique correct, uniformité, régularité.

Par ailleurs, on notera que l'on a laissé de côté les solutions qui ne correspondent pas à un état stationnaire de l'atome. En effet, ces solutions correspondent à un processus où l'énergie de l'atome varie, avec émission d'un photon. Ces solutions contiennent donc deux bosses de champ, l'électron et le photon. Le problème est alors beaucoup plus compliqué que dans le cas d'un état stationnaire.

5. Onde associée, et énergie d'une particule

Revenons au cas idéal de la *SSSS* légèrement déformée. La partie principale du champ est constituée par cette *SSSS*, désignée encore par $U_S(P)$. La partie ondulatoire du champ, régie par l'équation aux variations associée à la *SSSS*, est encore désignée par $u(P, t)$. L'existence de cette partie ondulatoire traduit la stabilité de la bosse de champ. Il est naturel de se poser la question suivante : l'énergie contenue dans la particule déformée est-elle égale à l'énergie qui correspond à la *SSSS* ? Il est impossible de répondre en toute généralité à cette question. Dans le cas des théories électromagnétiques du type Born-Infeld, si l'amplitude de $u(P, t)$ est faible, les deux énergies sont égales, car, dans le cas de la *SSSS*, le tenseur $\Theta_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ est tel que $\Theta_{00, \lambda\mu} = 0$ (cf. [1], page 208). Rappelons que ce tenseur est défini par l'équation

$$\delta T_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta, \lambda\mu} f^{\lambda\mu},$$

$T_{\alpha\beta}$ étant le tenseur d'énergie-impulsion, et $f^{\lambda\mu}$ le tenseur champ électromagnétique. L'indice 0 est l'indice temporel, et δT_{00} est la variation de densité d'énergie due à la partie ondulatoire du champ. La variation d'énergie due à l'onde stationnaire de déformation est donc alors nulle. L'onde stationnaire n'est donc pas porteuse d'énergie. On peut rapprocher ce fait de remarques formulées par F. Selleri dans [6], relativement à la possibilité de l'existence d'ondes réelles, physiques, qui ne transporterait pas d'énergie.

Relativement à ce problème de l'énergie propre d'une particule conçue comme bosse d'un champ, on peut faire une autre remarque, concernant la démonstration par Louis de Broglie de la relation

$$W = h\nu$$

Rappelons l'essentiel de cette démonstration. On considère une particule immobile par rapport à un référentiel galiléen S_0 . Relativement à un second référentiel galiléen S , elle a une vitesse v et se déplace le long de l'axe des z , dans le sens positif. Dans S_0 , elle est associée à une onde stationnaire dont le facteur de phase est $\cos 2\pi\nu_0 t_0$. Dans S , d'après l'une des formules de la transformation de Lorentz, le facteur de phase devient

$$\cos 2\pi\nu_0 \left(\frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

Relativement à S , la fréquence de l'onde associée à la particule est donc

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10)$$

D'autre part, d'après la Dynamique de la Relativité restreinte, si W_0 est l'énergie de la particule relativement à S_0 , et W son énergie par rapport à S , on a

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11)$$

D'après les égalités (10) et (11),

$$\frac{W}{\nu} = \frac{W_0}{\nu_0}$$

Quel que soit le référentiel galiléen S , on a donc

$$W = k\nu,$$

avec

$$k = \frac{W_0}{\nu_0}.$$

k est constante en ce sens qu'elle ne dépend pas du référentiel S . Mais on pourrait très bien imaginer qu'elle dépende de la nature de la particule considérée (électron, proton, etc.) Or, l'expérience montre qu'il n'en est rien. Dans [7], après avoir fait le raisonnement que l'on vient de résumer, Louis de Broglie désigne immédiatement par h la constante qui est ici désignée par k , et il écrit (page 43) : "... h désigne une constante de proportionnalité que, *naturellement*, nous prendrons égale à la constante de Planck". Peut-être n'a-t-on pas assez insisté sur le fait que k est égal à h pour toutes les particules. Il y a sans doute là un argument très fort en faveur de la possibilité d'élaborer une théorie unitaire des champs et des particules. Par ailleurs, il faudrait aussi insister sur le fait que le raisonnement de Louis de Broglie est indépendant de la structure de la particule et de la nature de l'onde qui lui est associée. Ce raisonnement s'applique aussi bien à des particules du type soliton, à des paquets d'onde, tels que les particules considérées par la théorie de la double solution, qu'à des particules où la partie principale de la bosse de champ correspond à la $SSSS$ et où la partie ondulatoire correspond au champ de déformation désigné ci-dessus par $u(P, t)$. Il est valable quel que soit le type de champ associé à la particule, qu'il soit scalaire, vectoriel ou tensoriel.

6. Conclusion

Dans la note [1] et dans celle-ci qui la complète, la notion fondamentale est celle de *stabilité* d'une bosse de champ.

Dans le cas de la $SSSS$, on a vu que l'étude de la stabilité de cette solution, pour une déformation ayant un centre de symétrie, conduisait à la définition d'une onde associée stationnaire qui, si son amplitude est assez petite, est régie par l'équation aux variations associée à la $SSSS$.

Dans le cas d'une bosse de champ en mouvement rectiligne uniforme, on se ramène au cas précédent en changeant de référentiel galiléen.

Dans le cas d'une particule en mouvement accéléré, il n'est plus possible d'utiliser l'équation aux variations associée à une solution particulière des équations fondamentales du champ. En effet, considérons, par exemple, d'une part la $SSSS$, d'autre part une bosse de champ, supposée stable, en mouvement accéléré sous l'action d'un champ électrique

uniforme, et qui, à l'instant initial, coïncide avec la *SSSS*. Il est clair que ces deux solutions particulières ne peuvent pas être considérées comme voisines, même si le champ électrique est très faible. Ce n'est que dans le cas d'une bosse de champ dont le centre reste immobile que les équations aux variations peuvent être utilisées. C'est seulement dans ce cas que l'étude de la stabilité d'une bosse de champ se ramène à l'étude de la stabilité mathématique d'une solution particulière des équations du champ.

Toutes ces considérations ne peuvent évidemment aboutir à des résultats précis que si l'on connaît la nature du champ unitaire et l'équation fondamentale qui régit sa structure et son évolution. Sur cette esquisse de théorie où la partie principale du champ à bosse n'est pas de nature ondulatoire, on pourrait faire des remarques identiques à celles que publiait la Rédaction de ces Annales dans la référence [8], au sujet de la théorie de la double solution : "Cela étant, il faut souligner que dans le problème de la représentation des particules par des solitons, l'essentiel reste à faire : à savoir découvrir un principe physique au nom duquel on pourra écrire une équation de champ non linéaire, représentant effectivement la réalité, tout comme l'a fait Einstein lorsqu'il posa l'équation de la théorie relativiste de la gravitation.

Pour l'instant, tant que ce principe n'est pas découvert, toutes les équations non linéaires que l'on écrit, y compris malheureusement celles que nous avons nous-mêmes écrites et étudiées, ne constituent qu'une collection de modèles mathématiques plus ou moins suggestifs, mais non pas encore une théorie physique."

Il est clair que ces remarques s'appliquent exactement au travail ici présenté.

Quand Einstein élaborait la théorie de la Relativité Générale, il fût essentiellement guidé par son désir de bâtir une théorie géométrique de la Gravitation. Lors de ses tentatives de construction d'une théorie unitaire, il fût encore guidé par ce désir de construire une théorie géométrique, en utilisant des espaces plus compliqués que les espaces de Riemann. De plus, il a toujours admis que les équations fondamentales devaient être des équations aux dérivées partielles du second ordre se déduisant d'un principe variationnel appliqué à un lagrangien bien choisi.

Ces principes étant admis, les équations possibles étaient fort peu nombreuses. Par exemple, dans la théorie de la Relativité Générale, le lagrangien, si l'on néglige la constante cosmologique, n'est autre que le scalaire de courbure de l'espace-temps. Il contient les dérivées partielles

secondes du tenseur métrique fondamental. Or, en général, si un lagrangien contient des dérivées secondes, il donne des équations du quatrième ordre. Ce n'est que dans ce cas particulier du lagrangien de la Relativité Générale que l'on obtient des équations du second ordre, parce que ce lagrangien dépend linéairement des dérivées secondes.

La même remarque peut être faite au sujet de tous les lagrangiens des nombreuses théories unitaires [3], qu'elles soient à quatre ou à cinq dimensions. On sait que, malheureusement, toutes ces théories n'ont jamais réussi à donner une représentation exacte de la réalité physique. Elles n'ont jamais pu rendre compte, ni du double caractère, ondulatoire et corpusculaire, de la matière, ni expliquer la quantification de la masse et de la charge électrique des particules.

Einstein et les autres auteurs de théories unitaires n'ont peut-être pas choisi la bonne voie en voulant construire une théorie qui soit à la fois unitaire et géométrique. Il était bien naturel que, encouragé par les succès de la Relativité Générale, Einstein veuille construire une théorie unitaire de nature géométrique, en utilisant des espaces dont la structure est plus complexe que celle des espaces de Riemann. On connaît sa remarque sur l'équation fondamentale de la Relativité Générale, où le premier membre, de nature géométrique, est comparé à du marbre fin, alors que le second membre, de nature non géométrique, est comparé à du bois de qualité inférieure. Manifestement, pour lui, la bonne théorie unitaire devait entièrement représenter la réalité physique par un ensemble de propriétés géométriques de l'espace-temps.

Il est cependant permis de se demander si c'est là la bonne solution. Une réalité physique se réduisant totalement à des propriétés géométriques, ne serait-ce pas en quelque sorte une forme vide ? Il est naturel de penser qu'on pourrait peut-être envisager aussi une théorie où la gravitation correspondrait toujours à la courbure d'un espace-temps riemannien, où l'on conserverait l'équation fondamentale de la Relativité Générale, avec son premier membre de nature géométrique, mais où le second membre ferait intervenir le tenseur d'énergie-impulsion d'un champ unitaire (gravitation mise à part) de nature non géométrique.

Dans une telle théorie, à l'équation fondamentale de la Relativité Générale, il faudrait ajouter l'équation fondamentale du champ non géométrique, source du champ de gravitation. L'électromagnétisme y jouerait vraisemblablement un rôle essentiel. Peut-être pourrait-on reprendre l'étude de la théorie de Mie [3], basée, pour les équations de

l'électromagnétisme, sur l'emploi du lagrangien

$$L = \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} - f(\phi_\mu \phi^\mu),$$

$\phi_{\mu\nu}$ représentant le tenseur champ électromagnétique, et ϕ_μ le quadri-potentiel-vecteur. $f(\phi_\mu \phi^\mu)$ est une fonction suffisamment régulière, de valeur négligeable pour les champs de faible intensité.

Que cette théorie de Mie soit valable ou non, la théorie unitaire conforme à la réalité physique devrait certainement être basée sur les principes suivants :

1) Les équations fondamentales sont des équations aux dérivées partielles du second ordre au plus ;

2) Elles respectent le principe de Relativité Générale ;

3) Elles dérivent d'un principe variationnel appliqué à un lagrangien bien choisi (en ce qui concerne la partie relative au champ de gravitation, on reprendrait simplement le lagrangien de la Relativité Générale, égal au scalaire de courbure) ;

4) Les solutions qui représentent la réalité physique sont définies en tout point de l'espace-temps ;

5) Ces solutions sont régulières, c'est-à-dire continues et suffisamment dérivables en tout point de l'espace-temps ;

6) Elles ont un comportement asymptotique convenable (décroissance suffisamment rapide quand on s'éloigne des particules qui sont les sources du champ) ;

7) Dans les équations fondamentales ne figurent qu'un très petit nombre de constantes universelles (il serait étonnant que, dans une théorie unitaire, il y ait de nombreuses constantes indépendantes les unes des autres) ;

8) Sans aucune hypothèse supplémentaire, l'étude de la stabilité des bosses de champ conduit à associer à toute particule immobile une onde stationnaire de fréquence bien déterminée ;

9) Toujours sans faire aucune hypothèse supplémentaire, l'étude de la stabilité des bosses de champ donne l'explication de la quantification de la masse des particules, de leur charge électrique, de leur spin, etc.

Ces neuf conditions sont bien sûr loin d'être suffisantes pour déterminer a priori l'équation fondamentale du champ unitaire. De plus, la non-linéarité rend extrêmement difficile l'étude du mouvement accéléré

d'une particule, et encore plus l'étude de l'interaction de deux particules qui se rencontrent. Même dans le cas d'une particule immobile, on ne peut obtenir de solution exacte que dans le cas de la *SSSS*, et seulement pour certaines théories, comme les théories électromagnétiques du type Born-Infeld.

Cependant, dans le cas de la *SSSS*, il est permis d'espérer que l'étude de la stabilité d'une bosse de champ permettra peut-être d'associer à toute particule une onde stationnaire de fréquence bien déterminée, et de résoudre le problème de la quantification de la charge et de la masse. Ce résultat constituerait à lui seul un très grand succès.

Il serait sans doute extrêmement intéressant d'entreprendre une étude systématique de la stabilité de la *SSSS*, pour toutes les théories non linéaires connues, et aussi pour d'autres théories qu'on peut imaginer. Cette étude de stabilité s'impose aussi bien pour les théories de champs à bosse telles que la théorie de Born-Infeld, que pour les théories où les particules sont du type soliton, comme la théorie de la double solution.

Références

- [1] J. Lameau, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **13-2** (1988), p. 199.
- [2] M. Born, L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.*, [**A**], t. 144, 1934, p. 425.
- [3] M.-A. Tonnelat, *Les théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Gauthier-Villars, 1965.
- [4] B. Hoffmann, L. Infeld, *Phys. Review*, t. 51, 1937, p. 765.
- [5] L. de Broglie, *Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la Mécanique Ondulatoire*, Gauthier-Villars, 1963.
- [6] F. Selleri, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **7-1** (1982), p. 45.
- [7] L. de Broglie, *Introduction à l'étude de la Mécanique Ondulatoire*, Hermann, 1930.
- [8] *Ann. Fond. L. de Broglie*, Note de la Rédaction, **3-1**, (1978), p. 1.

(Manuscrit reçu le 28 août 1989)