

Quelques remarques à propos de la mécanique quantique et de son interprétation

J. BASS

24 rue Ferdinand Jamin, F-92340 Bourg la Reine

RESUME. Dans la première partie, on rappelle l'interprétation hydrodynamique de l'équation de Schrödinger, en insistant sur la nécessité de faire jouer un rôle aux tensions du milieu continu, qui se réduisent dans certains cas à une pression.

On compare rapidement les résultats avec ceux du courant associé à l'équation de Dirac. Dans la seconde partie, on donne deux exemples de phénomènes usuels où se produisent des transitions actives entre des états périodiques stationnaires, analogues aux transitions de l'atome de Bohr, mais visibles.

ABSTRACT. In the first part the interpretation of quantum mechanics in terms of fluid dynamics is recalled. Emphasis is made over the role played by the stresses, which in certain cases reduce to a pressure. These results are briefly compared with the current deduced from Dirac equation. In the second part examples are given of common phenomena where active transitions arise between two states which are periodic and stationary, and are analogous to the transitions in Bohr's atom, but are apparent.

1. Introduction

La validité des principes de la mécanique quantique ne semble pas discutable. Ses applications sont suffisamment nombreuses et spectaculaires pour qu'il n'y ait aucun doute sur son efficacité. Ses bases mathématiques constituent un système cohérent, qui repose sur des théories solides : espace de Hilbert, valeurs propres, opérateurs hermitiens. Mais leur interprétation présente certaines singularités qui ont

conduit à des conceptions nouvelles, lesquelles ne sont pas universellement acceptées. La manière dont on conçoit les notions de particule, de trajectoire, d'onde reste discutée. L'interprétation probabiliste, qui est en contradiction partielle avec la théorie classique des probabilités, a reçu trop de justifications indépendantes pour qu'elles apparaissent toutes comme satisfaisantes.

Je me propose de montrer que certaines des singularités de la mécanique quantique, qui ont suggéré des interprétations originales, ne sont pas sans analogie avec des circonstances plus visibles, situées à une échelle plus accessible, et qui ne nous entraînent pas dans des conceptions philosophiques révolutionnaires. Cela me conduira à revenir aux débuts de la mécanique quantique. Ce qui, dans l'élan des découvertes, passait inaperçu entre 1920 et 1930, mérite peut-être d'être signalé aujourd'hui.

2. Mécanique quantique et mécanique des fluides

Il semble que, dans les débuts, la "mécanique ondulatoire" se soit inspirée surtout de la mécanique analytique (équation de Jacobi) et de la physique des ondes (équations de Maxwell, complétées par la relativité restreinte). Le point de vue de la mécanique des fluides ne s'est manifesté que temporairement et incomplètement. L'idée d'associer à l'équation de Schrödinger des équations hydrodynamiques se trouve chez Madelung dans un article paru en 1926 [5]. Mais elle n'est pas suffisamment développée et a ensuite été négligée au profit des interprétations probabilistes. On les trouve ultérieurement dans la thèse de J. Bass [1], en 1948. Je vais revenir sur ces idées anciennes, en les complétant sur quelques points.

Rappelons d'abord les équations de la mécanique des fluides (compressibles). Soit u_i la vitesse au point $x(x_1, x_2, x_3)$ et à l'instant t . Soit T_{ij} le tenseur des tensions, ou contraintes. Le fluide est soumis à des forces dérivant d'un potentiel V indépendant du temps. Si ρ est sa densité, on a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad T_{ik} = T_{ki}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (2)$$

Si le fluide est “parfait”, le tenseur des tensions se ramène à une pression, et (1) devient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (3)$$

Si la vitesse dérive d’un potentiel des vitesses φ ($\text{rot } u = 0$), les équations (3) peuvent s’intégrer et dérivent d’une seule équation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 + \int \frac{dp}{\rho} = V \quad (4)$$

Mais cette équation n’a de sens que si $\int dp/\rho$ existe. On doit donc supposer que p est une fonction de ρ . C’est le cas de la loi de Mariotte, ou de la loi adiabatique. Alors $\int dp/\rho = \int p'(\rho)/\rho d\rho$ est une fonction $q(\rho)$ et l’on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 + q(\rho) = V \quad (5)$$

Ecrivons maintenant l’équation de Schrödinger, pour une particule de masse unité :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar}{2} \Delta \psi = \frac{1}{\hbar} V \psi \quad (6)$$

En posant

$$\psi = a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \quad , \quad a = |\psi| \quad ,$$

on obtient les équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta a}{a} = V \quad (7)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial a}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = 0 \quad (8)$$

Si l’on pose $\rho = a^2$, l’équation (8) s’identifie à (2), dans le cas d’un potentiel des vitesses. C’est une “équation de continuité”, qui a été souvent citée et utilisée. La vitesse est $u_k = \partial \varphi / \partial x_k$, où φ/\hbar est l’argument (phase) de ψ . On notera que

$$\rho u_k = \psi \bar{\psi} u_k = \frac{\hbar}{2i} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \right).$$

L'équation (7) est presque identique à l'équation hydrodynamique (5) et les équations (7) et (8) définissent ce qu'on a appelé le fluide de probabilité ; la densité $\rho = a^2 = \psi\bar{\psi}$ étant interprétée comme une densité de probabilité de présence. Cependant, on a plutôt tendance à traiter (7) comme l'équation de Jacobi d'un problème de mécanique, le potentiel V étant simplement complété par un "*potentiel quantique*" $h^2/2 \cdot \Delta a/a$. Dans ce cas, l'équation (7) représente l'ensemble des trajectoires possibles d'un point matériel (une particule) en mouvement sous l'action du potentiel $V + h^2/2 \cdot \Delta a/a$. Ces trajectoires sont caractérisées par les données initiales. Elles n'ont entre elles aucune interaction. A une situation donnée correspond une seule de ces trajectoires.

Si au contraire on interprète $h^2/2 \cdot \Delta a/a$ comme un terme de *pression*, en posant

$$-\frac{h^2}{2} \frac{\Delta a}{a} = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (9)$$

on fait du fluide de probabilité non pas simplement une juxtaposition de trajectoires admissibles, mais un véritable fluide ; ayant une identité globale. Les trajectoires sont toutes présentes à la fois, chacune d'entre elles étant la trajectoire d'une "particule fluide". Mais la notion de particule fluide est très vague, et ne correspond à aucune réalité. C'est l'ensemble du fluide qui semble constituer la "particule" de la physique. Cette particule peut être localisée en n'importe quel point du fluide et elle est représentée en première approximation par le centre de gravité de la masse fluide. On peut se demander si cette image fluide, rendue consistante par l'introduction des tensions internes, a une réalité physique.

Seulement l'identification (9) n'est valable que si p est fonction de $\rho = a^2$, c'est-à-dire $\Delta a/a$ fonction de a . Cela revient à dire que a vérifie une équation de la forme

$$\Delta a = F(a) \quad (10)$$

Or l'équation de Schrödinger, avec certaines conditions accessoires, détermine ψ , et par suite a . La relation (10) n'est donc pas spontanément satisfaite. Elle l'est cependant dans beaucoup de cas usuels. En voici des exemples.

S'il existe des constantes α_k et une fonction f telles que

$$a = f\left(\sum_k \alpha_k x_k\right), \quad (11)$$

on a

$$\Delta a = \left(\sum \alpha_k^2 \right) f'' \left(\sum \alpha_k x_k \right) \quad (12)$$

Si f admet une fonction inverse g , on a donc

$$\Delta a = \left(\sum \alpha_k^2 \right) (f'' \circ g)(a) = F(a). \quad (13)$$

Si a est de la forme $f(r)$, où $r^2 = \sum x_k^2$, on trouve de même, en posant $r = g(a)$,

$$\Delta a = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = (f'' \circ g)(a) + \frac{2(f' \circ g)(a)}{g(a)}, \quad (14)$$

ce qui est bien de la forme $F(a)$.

Par contre, il est clair que, pour

$$a = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad , \quad \Delta a = 6(x_1 + x_2 + x_3), \quad (15)$$

Δa n'est pas de la forme $F(a)$. Sur un plan $x_1 + x_2 + x_3 = C$, a n'a pas une valeur unique. Il n'est pas d'ailleurs certain que cette forme de fonction a soit compatible avec l'équation de Schrödinger, par un choix de potentiel V indépendant du temps, sauf bien entendu si φ ne dépend pas du temps (mouvement permanent).

Si maintenant on dérive l'équation (7), on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\Delta a}{a} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad , \quad u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (16)$$

Or on vérifie facilement que, si l'on pose

$$T_{ik} = \frac{h^2}{2} a^2 \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{h^2}{2} \left(a \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_k} \right), \quad (17)$$

on a ¹

$$\frac{1}{\rho} \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\Delta a}{a} \quad , \quad \rho = a^2 \quad (18)$$

¹ Cette expression de T_{ik} n'est pas strictement déterminée. On peut la modifier en lui ajoutant une solution quelconque de l'équation homogène $\sum_k \partial T_{ik} / \partial x_k = 0$, soit $T_{ik} = \Delta U \delta_{ik} - \partial^2 U / \partial x_i \partial x_k$, où U est une fonction arbitraire.

(pour le vérifier, il est commode de poser $a = e^\lambda$).

On constate donc que le fluide associé à l'équation de Schrödinger est susceptible d'une seconde interprétation. Sa vitesse dérive toujours d'un potentiel, mais ses tensions ne s'expriment pas comme une pression. Il n'est plus alors nécessaire que Δa soit fonction de a . C'est la forme très remarquable de ces T_{ik} qui confère au fluide de probabilité sa structure particulière, et qui l'associe à une équation unique, l'équation de Schrödinger.

Quoi qu'il en soit, la question se pose à nouveau de savoir si l'interprétation hydrodynamique de l'équation de Schrödinger correspond à une réalité physique. On peut imaginer que, dans certaines circonstances, la particule se manifeste comme un point, centre de gravité du fluide. Dans d'autres, ce sont les propriétés de détail du fluide qui entrent en compte, c'est-à-dire le détail des trajectoires, avec leurs interactions. S'il en est ainsi, l'interprétation probabiliste de $\psi\bar{\psi}$ ne s'impose plus immédiatement

3. Courants et équation de Dirac

En ne partant pas de l'équation de Schrödinger, on peut se poser à l'envers les questions qui ont fait l'objet du paragraphe précédent. On donne une fonction complexe $\psi(x, t)$. On convient d'appeler (avec une seule variable d'espace x , pour simplifier l'écriture) :

$$\text{densité la quantité } \rho = \psi\bar{\psi}$$

$$\text{vitesse la quantité } u = \frac{h}{2i\rho} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right)$$

On cherche si, lorsque ρ et ψ satisfont une équation de l'hydrodynamique, la fonction complexe ψ satisfait à une équation fonctionnelle déterminée. Comme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{h}{2i} \left(\bar{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right)$$

On a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \bar{\psi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{h}{2i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] + \psi \left[\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} - \frac{h}{2i} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right],$$

ce qui est compatible avec une équation de la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{h}{2i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V \psi \quad , \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} - \frac{h}{2i} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} = V \bar{\psi} \quad (19)$$

Mais pour reconstituer l'équation complète, il faut faire intervenir l'équation (1) du mouvement. On peut former la combinaison $\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x$. Il faut alors la compléter par un terme de tensions compatible avec une équation du type (19). Le calcul est assez simple si l'on pose $\psi = e^\lambda$, ce qui revient à introduire implicitement l'argument de ψ et à refaire le calcul du paragraphe précédent.

La situation est un peu différente avec l'équation de Dirac, qui est du premier ordre. Rappelons rapidement de quoi il s'agit. Cette équation peut être écrite sous la forme générale

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \left(\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + A_k \psi \right) + B \psi = 0 \quad (20)$$

ψ est un vecteur à 4 composantes complexes, appartenant à un espace hermitien \mathbf{C}^4 . A_k, B sont des fonctions réelles. Les α_k sont 4 matrices hermitiennes qui, dans la théorie de Dirac, représentent des quaternions, et satisfont aux relations $\alpha_k \alpha_l = \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl}$.

On multiplie les deux membres de (20) par $\bar{\psi}$. Si $\langle \rangle$ désignent le produit scalaire dans \mathbf{C}^4 , on a :

$$\frac{1}{i} \sum \langle \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi \rangle + \sum A_k \langle \alpha_k \psi, \psi \rangle + B \langle \psi, \psi \rangle = 0. \quad (21)$$

On écrit le conjugué de (21). On remarque que

$$\overline{\langle \alpha_k \psi, \psi \rangle} = \langle \psi, \alpha_k \psi \rangle = \langle \alpha_k \psi, \psi \rangle$$

car les matrices α_k sont hermitiennes. De même pour le premier terme. On obtient

$$-\frac{1}{i} \sum \langle \alpha_k \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \rangle + \sum A_k \langle \alpha_k \psi, \psi \rangle + B \langle \psi, \psi \rangle = 0 \quad (22)$$

En retranchant (22) de (21), on obtient enfin

$$\frac{1}{i} \sum \langle \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi \rangle + \frac{1}{i} \langle \alpha_k \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \rangle = 0$$

On reconnaît la dérivée d'un produit scalaire dans \mathbf{C}^4 . On a donc

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \alpha_k \psi, \psi \rangle = 0 \quad (23)$$

Cette équation généralise l'équation de continuité du cas non relativiste. Si la matrice α_1 est la matrice unité, on a $\langle \alpha_1 \psi, \psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \sum_{k=1}^4 \psi_k \bar{\psi}_k$, ce qui généralise la densité $\rho = \psi \bar{\psi}$.

Cette équation conduit à considérer les 4 quantités $\langle \alpha_k \psi, \psi \rangle$ comme les composantes d'un "courant". Si la première a pour expression $\sum \psi_k \bar{\psi}_k$, elle généralise la densité $\psi \bar{\psi}$, et les trois autres peuvent être interprétées comme celles d'une quantité de mouvement, analogues à $1/2i(\psi \partial \bar{\psi} / \partial x_k - \bar{\psi} \partial \psi / \partial x_k)$. Mais la vitesse ainsi définie ne dérive pas d'un potentiel. Elle possède un rotationnel. Et surtout une seule équation de continuité ne suffit pas à caractériser une structure hydrodynamique. Il lui manque les tensions internes, traduisant les interactions entre les trajectoires des "particules fluides".

4. Trajectoires et périodicités

Revenons maintenant à l'équation de Schrödinger. Les trajectoires des particules fluides associées à cette équation satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (24)$$

Pour écrire explicitement cette équation, on doit d'abord résoudre l'équation de Schrödinger. On sépare les variables en posant

$$\psi = e^{i \frac{\omega}{\hbar} t} \theta(x) \quad (25)$$

Il est bien connu que θ vérifie l'équation réduite

$$\Delta \theta + \frac{2}{\hbar^2} (\omega - V) \theta = 0 \quad (26)$$

On doit la résoudre avec la condition $\int_D |\theta(x)|^2 dx = 1$, D étant le domaine occupé par le fluide. Plaçons-nous dans le cas où ce problème admet une infinité dénombrable de valeurs propres, auxquelles correspondent des fonctions propres normées $\theta_k(x)$. ψ est alors de la forme

$$\psi = \sum \lambda_k e^{i \frac{\omega_k}{\hbar} t} \theta_k(x) \quad (27)$$

les λ_k étant des constantes complexes telles que $\sum |\lambda_k|^2 = 1$. En chaque point x , ψ est donc une série de Fourier généralisée (*fonction presque-périodique*).

La vitesse du fluide est donnée par le gradient de

$$\varphi = \frac{h}{2}(\log \psi - \log \bar{\psi}). \quad (28)$$

On a donc l'équation différentielle

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_j} \right) = \frac{h}{2|\psi|^2} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_j} \right) \quad (29)$$

$\psi \bar{\psi}$, $\partial \psi / \partial x_j$, $\partial \bar{\psi} / \partial x_j$ sont des fonctions presque-périodiques. Leur quotient l'est aussi, sauf si la densité $a^2 = \psi \bar{\psi}$ s'annule en un point du domaine D . On a donc une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx_j}{dx} = P_j(x, t) = \sum f_{jk}(x) e^{i\mu_k t}, \quad (30)$$

P_j étant en chaque point x une fonction presque-périodique, dont le spectre $\{\mu_k\}$ se déduit de celui de ψ (des nombres ω_k) par des opérations assez compliquées à écrire.

Il semble que la nature des solutions de l'équation (30) soit peu connue. On peut seulement espérer que, dans bien des cas, les solutions sont des fonctions oscillantes de t . Ou bien ce sont des fonctions presque-périodiques, superpositions de fonctions sinusoidales, dont les fréquences résultent des μ_k par un processus plus ou moins simple. Ou bien ce sont des fonctions ayant un spectre continu, appelées aussi fonctions pseudo-aléatoires [2]. Mais d'autres circonstances ne sont pas exclues a priori. Les essais de résolution numérique et graphique de l'équation (30) ne permettent pas encore de se prononcer (cf.[3]).

5. Sur les transitions

La structure de l'atome de Bohr a bien vieilli. Il n'est peut-être pas inutile de faire quand même quelques remarques à son sujet. Elle suppose que les électrons "périphériques" d'un atome possèdent des fréquences, ce dont on fait une image commode en les assimilant à des points matériels en mouvement de rotation. Mais cette image est incompatible avec l'électromagnétisme classique. Un électron en mouvement de rotation

devrait émettre de l'énergie sous forme de rayonnement. Or les électrons de l'atome ne le font que lorsque la nature de leur mouvement change : ils passent d'un niveau à un autre et leur fréquence change. Il y a "transition".

Je vais donner deux exemples de phénomènes macroscopiques dans lesquels un mouvement oscillatoire stabilisé ne produit aucun effet extérieur, et ne se manifeste que lorsque sa fréquence change.

Exemple acoustique

On considère un tuyau sonore classique, par exemple un tuyau de flûte. Quand il est convenablement excité, il émet un son ; appelons-le ut_1 . Nous supposons qu'il s'agit là du son le plus grave qu'il peut donner. Mais en modifiant l'excitation, c'est-à-dire la manière de souffler sur la flûte, on obtient d'autres notes. Ces notes ne sont pas arbitraires. Elles appartiennent à une suite quantifiée. La première qu'on obtient est un ut à l'octave du premier (fréquence double), soit ut_2 . On obtient ensuite sol_2 , ut_3 , mi_3 , etc. Les fréquences de ces notes sont les valeurs propres d'un opérateur différentiel bien connu.

Si p désigne la pression de l'air en un point extérieur, lorsqu'on émet le son fondamental ut_1 , les variations de p sont représentées par une série de Fourier périodique :

$$a_1 \sin 2\pi(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin 2\pi(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \sin 2\pi(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

En général, le coefficient a_1 est prépondérant. Les différents termes de cette série constituent les harmoniques du son fondamental.

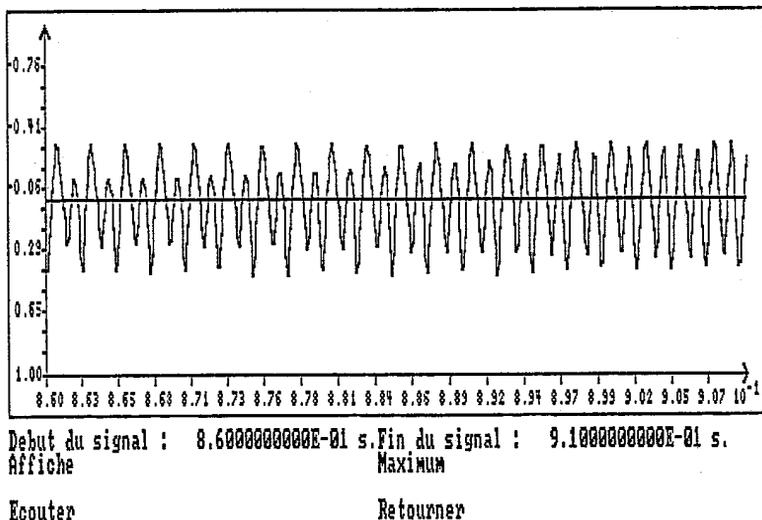


Figure 1.

Lorsqu'on modifie le souffle pour entendre ut_2 , le son est représenté par une nouvelle série de Fourier, différente de la précédente, et qui commence au terme en $\sin(2\pi(2\omega t + \varphi_2))$.² C'est ce que les musiciens appellent jouer en harmoniques.

L'oreille, organe récepteur, commence par être sensible à l'émission d'une note (ut_1). Mais si cette émission se prolonge, l'intérêt faiblit rapidement. Si au contraire on passe du premier ut au second (ut_2) l'intérêt renaît. D'une façon générale, l'oreille s'accoutume vite à une fréquence stabilisée, et s'intéresse à une succession de fréquences. Cette succession peut s'appeler une mélodie. Elle est constituée par les transitions entre des fréquences.

On a donc là un système qui peut vibrer suivant diverses périodes, et un récepteur qui en pratique ne réagit qu'aux changements de fréquence. Ce langage ressemble à celui qu'on emploie à propos de l'atome de Bohr.

Il est intéressant de voir en détail comment a lieu la transition entre une note et la note à l'octave. L'expérience a été faite par Mlle Castellango au laboratoire d'acoustique de l'université Pierre et Marie Curie.

² Dans bien des cas, ce n'est pas tout à fait de cette façon qu'on émet le ut_2 . On utilise des trous percés dans la paroi du tuyau, ce qui revient à diminuer sa longueur et à émettre le son fondamental d'un nouveau tuyau plus court.

La figure 1 donne l'enregistrement, en fonction du temps, des variations de pression au voisinage d'une flûte. La fréquence est d'abord de l'ordre de 400. Pendant la durée de l'expérience (environ 1/20 seconde), on modifie la pression de l'air pour passer à l'octave. Des oscillations supplémentaires s'interposent pendant 1/40 seconde environ, et aboutissent à une fréquence double. L'oreille, qui suit difficilement des sons se succédant à des intervalles de 1/12 seconde, est cependant sensible à une transition qui dure 1/40 seconde, mais n'est pas capable de l'analyser. Le passage de ut_1 à ut_2 ne lui semble pas discontinu, bien qu'il soit très différent d'un passage progressif (comme on pourrait le faire sur une corde de violon, sans chercher à jouer en harmoniques).

Exemple mécanique

Le régulateur centrifuge de Watt est probablement le plus ancien des systèmes asservis. Il comporte un losange articulé $OAMB$. Le point O est fixe. Le point M est mobile sur un axe vertical xy . Le losange peut tourner autour de l'axe xy . Deux masses égales sont placées en P et Q sur les côtés OA et OB . On pose

$$OP = OQ = l \quad , \quad OA = OB = AM = BM = a \quad , \quad PQ = 2r$$

L'angle θ de OA avec xy dépend de la vitesse angulaire ω de la rotation.

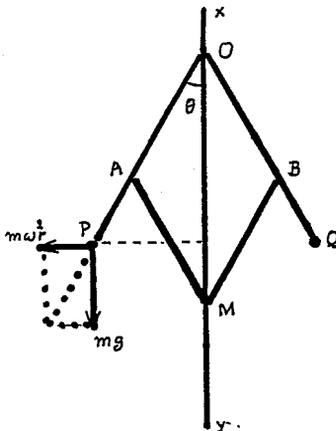


Figure 2.

On suppose les masses placées en P et Q assez grandes pour qu'on puisse négliger les masses des côtés du losange. En position d'équilibre, leur poids équilibre la force centrifuge, et l'on a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega^2 r}{g} \quad , \quad \text{avec} \quad \sin \theta = \frac{r}{l}, \quad (31)$$

donc

$$\cos \theta = \frac{g}{l\omega^2} \quad (32)$$

L'angle θ n'existe que si $\omega^2 > g/l$. Mais il y a toujours une position d'équilibre, stable ou instable, donnée par $\theta = 0$.

Si la vitesse angulaire varie en fonction du temps, la variation de θ résulte d'une équation différentielle facile à écrire, à savoir

$$\theta'' + \sin \theta \left(\frac{g}{l} - \omega^2(t) \cos \theta \right) = 0 \quad (33)$$

Choisissons pour fonction $\omega(t)$ la fonction égale à ω_1 pour $t < 0$, égale à ω_2 pour $t = T$, et linéaire sur $[0, T]$. Il faut donc intégrer l'équation différentielle avec

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) \frac{t}{T} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T \\ \omega &= \omega_2 \quad \text{pour} \quad t \geq T \end{aligned} \quad (34)$$

et avec les conditions initiales

$$\theta = \theta_1 \quad , \quad \theta' = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 \left(\cos \theta_1 = \frac{g}{l\omega_1^2} \right)$$

Le système part d'une position d'équilibre. En un temps T , il retrouve une valeur fixe de ω pour laquelle il existe une position d'équilibre. Mais à l'instant T , on n'a pas simultanément $\theta = \theta_2$, $\theta' = 0$. On doit donc s'attendre à des oscillations autour de la valeur d'équilibre θ_2 , ces oscillations étant d'autant plus faibles que le temps T mis à passer de la première valeur de ω à la seconde est plus grand. C'est ce que montrent les courbes des figures 3 et 4. On a pris successivement :

$$T = 3 \quad \text{et} \quad T = 9.$$

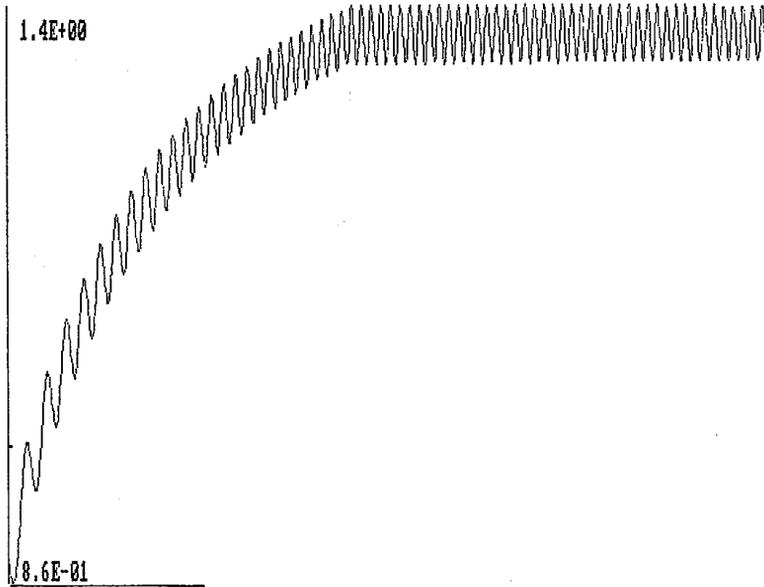


Figure 3. $\omega_1 = 4\pi$ $\omega_2 = 8\pi$ $T =$ durée totale 20

On a choisi $l = 9,81\text{cm}$, pour que $g/l = 100$. On est parti avec 2 tours par seconde ($\omega_1 = 4\pi$) pour terminer avec 4 tours par seconde ($\omega_2 = 8\pi$). Les valeurs d'équilibre de θ sont données par

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= 0,6332 & \theta_1 &= 0,88 \text{ rad} = 51^\circ \\ \cos \theta_2 &= 0,1583 & \theta_2 &= 1,41 \text{ rad} = 81^\circ\end{aligned}$$

Au voisinage de la position d'équilibre θ_2 correspondant à ω_2 , on peut admettre que les oscillations sont de faible amplitude. On pose

$$\theta = \theta_2 + \varphi \quad \text{avec} \quad \cos \theta_2 = \frac{g}{l\omega_2^2} \quad (35)$$

Si φ est petit, l'équation (33) se réduit à

$$\varphi'' + \omega_2^2 \sin^2 \theta_2 \varphi = 0 \quad (36)$$

Les oscillations sont pratiquement sinusoïdales, de période $2\pi/\omega_2 \sin \theta_2$. Dans l'exemple numérique, on trouve la période 0,253, ce qu'on vérifie sur les graphiques.

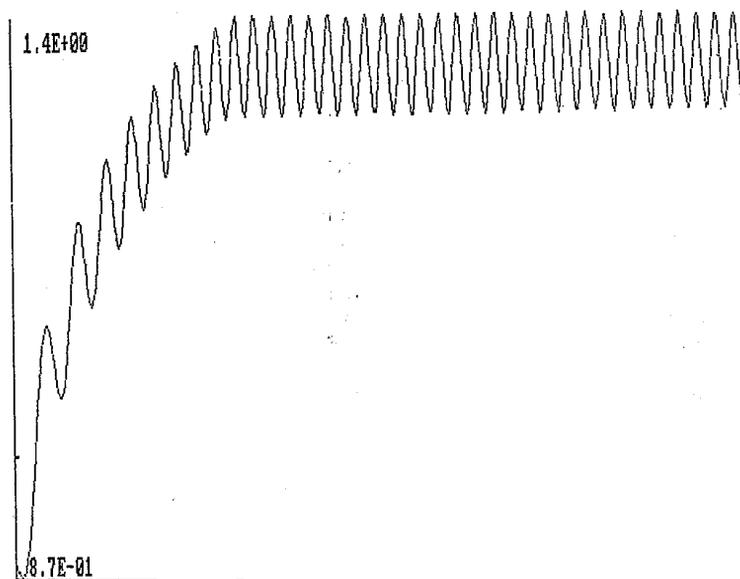


Figure 4. $\omega_1 = 4\pi$ $\omega_2 = 8\pi$ $T = 3$ durée totale 10

Bien entendu, dans un modèle réel, les résistances passives amortissent rapidement les oscillations. Pratiquement, on atteint tout de suite la position d'équilibre θ_2 .

Si θ est petit, l'équation (33) se réduit à

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l} - \omega^2(t) \right) \theta = 0 \quad (37)$$

Elle n'est valable que si $\omega^2 < g/l$. Dans ce cas, la seule position d'équilibre est $\theta = 0$, qui dans les autres cas est encore une position d'équilibre, mais instable.

Le système considéré comporte donc des états de rotation périodique, qui ont un caractère stationnaire. On passe d'un de ces états à un autre par une transition continue. Supposons que l'on utilise un appareil qui mesure les variations de θ , ou mieux celles du point M sur l'axe de rotation, et d'une façon plus précise la vitesse de M . Cet appareil ne réagit pas dans les états stationnaires. Il ne réagit que lorsque M se met en mouvement, c'est-à-dire entre deux états de rotation stationnaire. Les termes employés ressemblent beaucoup à ceux dont on se

sert pour décrire les transitions dans l'atome de Bohr. Les dispositifs d'enregistrement ne sont sensibles qu'aux transitions, ou si l'on veut aux changements de trajectoires des masses P et Q . Il faut cependant remarquer que, a priori, les périodes des mouvements stationnaires du régulateur ne sont pas quantifiées. Toutes les périodes sont admissibles, en dessous d'une période maximale $2\pi\sqrt{l/g}$. Mais on pourrait imaginer un dispositif qui oblige les ω à ne prendre que certaines valeurs privilégiées. Cela ne change rien à la nature des transitions.

Références

- [1] J. Bass, *Lois de probabilité, équations hydrodynamiques et mécanique quantique*, (la revue scientifique, n° 3299, 1948). Article résumant la thèse de doctorat.
- [2] J. Bass, *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications*, (Masson, 1984).
- [3] L. de Broglie, *L'électron magnétique (théorie de Dirac)*, (Hermann, 1934).
- [4] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique*, (Gauthier-Villars, 1982).
- [5] E. Madelung, *Quanten theorie in hydrodynamischer Form* (Zeit. Phys., 40, 1926), Trad. française AFLB 15, 1990.
- [6] C. Dewdney et P.R. Holland, *Particle trajectories and quantum correlations* ; dans : *Quantum mechanics versus local realism, the Einstein, Podolski, Rosen Paradox*, Edité par F. Selleri, Plenum press, 1988.

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1989)