

Une interprétation hydrodynamique de la mécanique quantique

Y. CASIER

D.E.T.N.

361, avenue du Président Wilson
93211 La Plaine Saint-Denis

RESUME. Dans cet article, on considère une particule comme une entité microscopique qui obéit aux lois de la mécanique quantique dont le caractère est probabiliste. Il en résulte, pour cette particule, un comportement moyen que l'on décrit en introduisant une entité macroscopique ou fluide, comme l'ont déjà fait certains auteurs [1]. Ce fluide, que nous appellerons ici fluide stochastique, est supposé obéir aux lois de la mécanique des milieux continus comme un fluide classique. On établit alors les équations générales (non relativistes) du fluide stochastique équivalent à un corpuscule ponctuel et l'on constate que l'équation de Schrödinger n'est qu'un cas très particulier de ces équations: dans ce cas le fluide stochastique est un fluide particulier ou fluide quantique. Le fluide quantique est ainsi introduit d'abord dans un contexte non relativiste pour une particule de spin 0 (équation de Schrödinger), ce qui permet en particulier de retrouver et d'interpréter l'effet Aharonov-Bohm. En généralisant le problème au cas non relativiste d'une particule de spin 1/2, puis au cas relativiste d'une particule de spin 0, on obtient deux ensembles d'équations qui permettent de retrouver respectivement l'équation de Pauli et l'équation de Klein-Gordon.

ABSTRACT. In this article, a particle is considered as a microscopic entity which obeys the laws of quantum mechanics which are probabilistic. the particle therefore has a mean behaviour which can be described by introducing a macroscopic entity or fluid, as already done by several authors [1]. This fluid, here called stochastic fluid, is assumed to obey the law of mechanics of continuous media, like a standard fluid. General (non relativistic) equations of the stochastic fluid equivalent to a point particle are then established and we observe that the Schrodinger equation is only one very particular case of these equations: in this case, the stochastic fluid is a particular fluid or quantum fluid. The quantum fluid is first introduced in a nonrelativistic context for a spinless particule (Schrodinger equation). It

is thus possible to observe and interpret the Aharonov-Bohm effect. By generalizing the problem to the nonrelativistic case of a particule with spin 1/2 and then to the relativistic case of a spinless particule, two sets of equations are obtained, from which, respectively, the Pauli and Klein-Gordon equations can be found.

I - Ecoulement irrotationnel d'un fluide stochastique dans un champ de forces extérieur dérivant d'un potentiel

1-1 Avant propos

t désigne le temps et $x = (x_1, x_2, x_3)$, les coordonnées d'un point M repéré dans un référentiel R . Certaines grandeurs seront fonctions de x , de t et d'une variable λ indépendante de x et de t ; la moyenne d'une fonction $\phi(x, t, \lambda)$ sera définie comme:

$$\overline{\phi(x, t, \lambda)} = \frac{1}{\Lambda' - \Lambda} \int_{\Lambda}^{\Lambda'} \phi(x, t, \lambda) d\lambda = \bar{\phi}(x, t) \quad \text{pour } \Lambda \leq \lambda \leq \Lambda'$$

On appelle fluide stochastique un fluide de masse volumique $\rho(x, t)$ dont la vitesse en M au temps t dépend de λ ; nous la noterons:

$$\vec{v}(x, t, \lambda)$$

Il diffère d'un fluide classique dont la vitesse ne dépend que de x et t .

Dans l'immédiat, nous ferons pour le fluide stochastique les trois hypothèses suivantes:

- 1) Sa masse ne se conserve localement qu'en moyenne,
- 2) Sa vitesse $\vec{v}$ est irrotationnelle,
- 3) Le champ de forces extérieur dérive d'un potentiel massique U .

1-2 Vitesses et moyennes

Nous poserons :

a) $\vec{u}(x, t)$ = vitesse moyenne du fluide en M à t :

$$\overline{\vec{v}(x, t, \lambda)} = \vec{u}(x, t) \tag{1.1}$$

b) $\vec{w}(x, t, \lambda) = \text{fluctuation} = \text{vitesse} - \text{vitesse moyenne}$:

$$\vec{w}(x, t, \lambda) = \vec{v}(x, t, \lambda) - \vec{u}(x, t) \quad (1.2)$$

qui est donc en moyenne nulle :

$$\overline{\vec{w}(x, t, \lambda)} = 0 \quad (1.3)$$

Puisque $v^2 = u^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + w^2$, nous aurons également la relation:

$$\overline{w^2} = \overline{v^2} - \overline{u^2} \quad (1.4)$$

et nous appellerons H l'énergie cinétique moyenne de fluctuation par unité de masse de fluide :

$$H = \frac{1}{2} \overline{w^2} \quad (1.5)$$

1-3 Conservation locale moyenne de la masse

La masse du fluide ne se conserve pas localement. On posera :

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = s(x, t, \lambda) \quad (1.6)$$

où s est la densité volumique de sources si $s > 0$ ou de puits si $s < 0$, mais la conservation moyenne locale de la masse s'écrit (hypothèse 1) :

$$\bar{s} = 0 \quad (1.7)$$

soit en prenant la moyenne de (1.6):

$$\partial_t \bar{\rho} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{u}) = 0 \quad (1.8)$$

qui représente la conservation moyenne locale de la masse du fluide. En faisant (1.6) – (1.8), on obtient alors :

$$s = \text{div}(\rho \vec{w}) \quad (1.9)$$

1-4 Dynamique du fluide stochastique

La vitesse étant irrotationnelle (hypothèse 2), $\vec{\nabla} \otimes \vec{v} = 0$, soit:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \eta \quad (1.10)$$

avec $\eta = \eta(x, t, \lambda)$, soit en prenant la moyenne :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \bar{\eta} \quad (1.11)$$

En introduisant la fonction $\varphi(x, t, \lambda)$ telle que :

$$\varphi = \eta - \bar{\eta} \quad (1.12)$$

on obtient, avec $\bar{\varphi} = 0$:

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1.13)$$

L'unité de masse du fluide est supposée soumise à une force extérieure dérivant d'un potentiel (hypothèse 3):

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U$$

et à une force intérieure $\vec{f}'$, d'où l'équation de la dynamique appliquée au mouvement moyen du fluide ($d\vec{x} = \vec{u}dt$):

$$\vec{f}' - \vec{\nabla} U = d_t \vec{u} = \partial_t \vec{u} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) - \vec{u} \wedge \vec{r} \text{ot } \vec{u}$$

soit en tenant compte de (1.11):

$$\vec{f}' = \vec{\nabla} \left(\partial_t \bar{\eta} + \frac{1}{2} u^2 + U \right)$$

En posant :

$$\partial_t \bar{\eta} + \frac{1}{2} u^2 + U = -Q$$

on obtient:

$$\vec{f}' = -\vec{\nabla} Q \quad (1.14)$$

$$d_t \vec{u} = -\vec{\nabla} Q - \vec{\nabla} U \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{2} u^2 + Q + U = -\partial_t \bar{\eta} = e_M \quad (1.16)$$

où (1.16) exprime la conservation locale moyenne de l'énergie mécanique du fluide (Bernoulli), avec e_M = énergie mécanique moyenne par unité de masse de fluide. Dans le cas du fluide stochastique, nous admettrons que la présence de sources (ou de puits) engendre une pression p ou

pression stochastique, qui intervient dans le bilan des forces appliquées à un élément de volume; ce bilan s'écrit alors:

$$\overline{\partial_t(\rho v_j) + \partial_k(\rho v_j v_k)} = -\partial_j p + \rho f_j \quad (1.17)$$

En introduisant le tenseur des contraintes internes au fluide:

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} - \rho \overline{w_j w_k} \quad (1.18)$$

l'équation (1.17) prend la forme:

$$\partial_t(\rho u_j) + \partial_k(\rho u_j u_k) = \partial_k \sigma_{jk} + \rho f_j$$

soit encore, en simplifiant grâce à (1.8):

$$d_t u_j = \frac{1}{\rho} \partial_k \sigma_{jk} + f_j$$

avec $f_j = -\partial_j U$, ce qui donne en comparant avec (1.15):

$$\rho \partial_j Q + \partial_k \sigma_{jk} = 0 \quad (1.19)$$

et avec (1.18) :

$$\rho \partial_j Q - \partial_j p - \partial_k(\rho \overline{w_j w_k}) = 0$$

On obtient alors successivement:

$$\partial_k(\rho w_j w_k) = \text{div}(\rho w_j \vec{w}) = w_j \text{div}(\rho \vec{w}) + \rho \vec{w} \cdot \vec{\nabla} w_j = s w_j + \rho \vec{w} \cdot \vec{\nabla} w_j$$

$$\vec{w} \cdot \vec{\nabla} w_j = \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \partial_j \varphi = \vec{w} \cdot \partial_j \vec{\nabla} \varphi = \vec{w} \cdot \partial_j \vec{w} = \partial_j \left(\frac{1}{2} w^2 \right)$$

$$\partial_k(\rho \overline{w_j w_k}) = \overline{s w_j} + \rho \partial_j H$$

d'où la relation:

$$\rho \partial_j (Q - H) - \partial_j p - \overline{s w_j} = 0 \quad (\text{R})$$

Relions alors p et s . Pour cela, considérons une petite masse μ de fluide engendrée par une source en un point M (ou absorbée par un puits); en

désignant par D le débit de la source et par τ le volume contenant μ et la source, nous aurons les relations:

$$D = s\tau \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\mu}{\rho}$$

En vertu du théorème d'Euler, la source exerce alors sur μ la force de composantes:

$$R_j = -\overline{Dv_j} = -\overline{sv_j}\tau = -\overline{(u_j + w_j) \operatorname{div}(\rho \vec{w})}\tau = -\overline{w_j \operatorname{div}(\rho \vec{w})}\tau$$

soit :

$$R_j = -\overline{sw_j}\tau = -\overline{sw_j}\frac{\mu}{\rho}$$

Cherchons une autre expression de $\vec{R}$: si μ est maintenant engendrée par la source au point M' voisin de M , la différence entre l'énergie nécessaire pour produire μ en M et l'énergie nécessaire pour produire μ en M' est égale au travail de compression δT exercé par la source sur μ (pression p) lors du passage de M en M' :

$$\delta T = -p\delta\tau$$

d'où :

$$R_j = \partial_j T = -p\partial_j\tau = -\mu p\partial_j\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

soit:

$$\overline{sw_j} = -\frac{p}{\rho}\partial_j\rho \quad (1.20)$$

(R) donne alors :

$$\partial_j(Q - H - \frac{p}{\rho}) = 0$$

soit :

$$Q = H + \frac{p}{\rho} + \chi(t) \quad (1.21)$$

II - Fluide stochastique équivalent à un corpuscule ponctuel

2-1 Equivalence fluide-corpuscule

Considérons un corpuscule ponctuel de masse propre m . Afin d'établir les bases d'une mécanique stochastique du point (microscopique discontinu), définissons l'équivalence entre le corpuscule et le

fluide stochastique (macroscopique continu) dont les propriétés hydrodynamiques viennent d'être établies :

1) La masse totale du fluide est égale à la masse du corpuscule; celui ci pouvant évoluer de façon générale dans l'espace tout entier E (ou à la rigueur dans une partie de l'espace), nous aurons :

$$\iiint_E \rho d\tau = m \quad (2.1)$$

2) La densité de probabilité de présence du corpuscule $\xi(x, t)$ est proportionnelle à la masse volumique du fluide, soit:

$$\xi = \frac{\rho}{m} \quad (2.2)$$

car :

$$\iiint_E \xi d\tau = 1$$

3) Si le corpuscule est au point M à l'instant t , sa vitesse est celle du fluide en M à t , soit:

$$\vec{v}(x, t, \lambda)$$

mais cette vitesse n'est pas définie du fait de la présence de λ .

Nous supposons d'autre part que la densité de probabilité de présence du corpuscule est nulle à l'infini, ainsi que son gradient; en désignant par Σ une surface fermée dont les dimensions sont aussi grandes que l'on veut, nous aurons:

$$\rho(\Sigma) = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \rho(\Sigma) = 0 \quad (2.4)$$

L'intégrale de (1.8) donne alors une valeur nulle :

$$\partial_t m + \iint_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

2-2 Cas d'un champ de forces extérieur dérivant d'un potentiel

Si le corpuscule se trouve en M à t , son énergie mécanique moyenne (énergie cinétique moyenne + énergie potentielle) vaut:

$$m(\frac{1}{2}\overline{v^2} + U)$$

et statistiquement, son énergie mécanique moyenne probable est obtenue par une intégration pondérée par ξ , donc par ρ , soit:

$$E_M(t) = \iiint_E \rho(\frac{1}{2}\overline{v^2} + U)d\tau = \iiint_E \rho(\frac{1}{2}u^2 + H + U)d\tau$$

qui doit, en accord avec l'équivalence fluide-corpuscule, être égale à l'énergie mécanique moyenne du fluide, qui vaut d'après (1.16) et (1.21):

$$\begin{aligned} E_M(t) &= \iiint_E \rho(\frac{1}{2}u^2 + Q + U)d\tau \\ &= \iiint_E \rho[\frac{1}{2}u^2 + H + \frac{p}{\rho} + \chi(t) + U]d\tau \end{aligned}$$

d'où la condition:

$$\iiint_E p d\tau = -m\chi(t) \quad (2.5)$$

2-3 Cas d'un champ de forces extérieur quelconque

Dans ce cas, $\vec{u}$ n'est plus irrotationnelle, mais nous admettrons que :

- 1) La fluctuation est encore irrotationnelle (1.13),
- 2) La densité massique de force intérieure dérive encore d'un potentiel (1.14).

Nous pouvons alors regrouper toutes les équations nécessaires à la description de l'équivalence entre le fluide stochastique et un corpuscule ponctuel de masse m plongé dans un champ de forces extérieur quelconque, ces équations étant définies au gradient d'une fonction φ près, en moyenne nulle :

- | | |
|---|---|
| (a) $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ | (b) $\bar{\varphi} = 0$ |
| (c) $\overline{w^2} = \overline{v^2} - \overline{u^2}$ | (d) $H = \frac{1}{2}\overline{w^2} = \frac{1}{2}\overline{(\vec{\nabla}\varphi)^2}$ |
| (e) $\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = s$ | (f) $\bar{s} = 0$ |
| (g) $\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$ | (h) $s = \text{div}(\rho \vec{w}) = \text{div}(\rho \vec{\nabla}\varphi)$ |
| (i) $d_t \vec{u} = \vec{f} + \vec{f}'$ | (j) $f'_j = -\partial_j Q = (1/\rho)\partial_k \sigma_{jk}$ |
| (k) $\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} - \rho \overline{w_j w_k}$ | (l) $\overline{s w_j} = -(p/\rho)\partial_j \rho$ |
| (m) $Q = H + (p/\rho) + \chi(t)$ | (n) $\iiint_E p d\tau = -m\chi(t)$ |
| (o) $\iiint_E \rho d\tau = m$ | (p) $\rho(\Sigma) = 0$ |
| (q) $\vec{\nabla}\rho(\Sigma) = 0$ | |

2-4 Cas particulier de la mécanique quantique

La mécanique quantique est un cas particulier de la mécanique stochastique correspondant à :

$$\varphi = g(\lambda) \log \rho \quad (2.6)$$

de sorte que $g(\lambda)$ est en moyenne nulle d'après (b) :

$$\overline{g(\lambda)} = 0 \quad (2.7)$$

et nous poserons :

$$\overline{g(\lambda)^2} = K^2 \quad (2.8)$$

(a) et (h) donnent alors successivement :

$$\vec{w} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho g(\lambda) \quad (2.9)$$

$$s = \Delta\rho \, g(\lambda) \quad (2.10)$$

de sorte que (e) prend la forme d'une équation du type Fokker-Planck [2]. On peut remarquer qu'ici les sources et les puits se compensent globalement puisque d'après (q):

$$\iiint_E s d\tau = g(\lambda) \iint_\Sigma \vec{\nabla}\rho \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad \forall \lambda$$

On a d'autre part:

$$\overline{sw_j} = K^2 \Delta\rho \, \frac{1}{\rho} \partial_j \rho$$

de sorte que (l) donne:

$$p = -K^2 \Delta\rho \quad (2.11)$$

(n) et (q) donnent :

$$m\chi(t) = K^2 \iiint_E \Delta\rho d\tau = K^2 \iint_\Sigma \vec{\nabla}\rho \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

d'où l'expression du "potentiel quantique" Q tirée de (m) et des contraintes tirées de (k) :

$$Q = K^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho} \right)^2 - \frac{\Delta\rho}{\rho} \right] \quad (2.12)$$

$$\sigma_{jk} = K^2 \left(\Delta\rho \delta_{jk} - \frac{1}{\rho} \partial_j \rho \partial_k \rho \right) \quad (2.13)$$

posons :

$$\rho = a^2 \quad (2.14)$$

(2.12) devient :

$$Q = -2K^2 \frac{\Delta a}{a} \quad (2.15)$$

et (p) et (q) donnent :

$$a(\Sigma) = 0 \quad , \quad a(\Sigma) \vec{\nabla} a(\Sigma) = 0$$

soit :

$$a(\Sigma) = 0 \quad (2.16)$$

Considérons alors le cas général d'une particule de charge q et de spin 0 plongée dans un champ de forces extérieur caractérisé par un potentiel massique U , un potentiel électrostatique V et un potentiel-vecteur magnétique $\vec{A}$ vérifiant la condition de Lorentz (non relativiste ici) :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (2.17)$$

En posant :

$$U' = U + \frac{q}{m} V \quad (2.18)$$

on obtient :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U - \frac{q}{m} (\vec{\nabla} V + \partial_t \vec{A} - \vec{u} \wedge \vec{r} \operatorname{ot} \vec{A})$$

soit :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U' - \frac{q}{m} (\partial_t \vec{A} - \vec{u} \wedge \vec{r} \operatorname{ot} \vec{A}) \quad (2.19)$$

Vu que :

$$d_t \vec{u} = \partial_t \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \vec{u} \wedge \vec{r} \operatorname{ot} \vec{u}$$

(i) et (j) donnent :

$$\partial_t (\vec{u} + \frac{q}{m} \vec{A}) + \vec{\nabla} (\frac{1}{2} u^2 + Q + U') = \vec{u} \wedge \vec{r} \operatorname{ot} (\vec{u} + \frac{q}{m} \vec{A})$$

Cette équation admet une solution particulière qui annule le rotationnel en posant (K' constante) :

$$\vec{u} + \frac{q}{m} \vec{A} + K' \vec{\nabla} \alpha = 0 \quad (2.20)$$

soit :

$$\vec{\nabla} (\frac{1}{2} u^2 + Q + U' - K' \partial_t \alpha) = 0$$

α étant déjà définie à une fonction du temps près, on peut annuler la constante d'intégration, d'où :

$$\frac{1}{2} u^2 + Q + U' = K' \partial_t \alpha = e_M \quad (2.21)$$

relation qui représente la conservation locale moyenne de l'énergie du fluide quantique, ce qui donne au total :

$$E_M(t) = \iiint_E \rho (\frac{1}{2} u^2 + Q + U') d\tau = K' \partial_t \iiint_E \alpha d\tau$$

et pour le corpuscule ($\iiint_E \Delta \rho d\tau = \iint_\Sigma \vec{\nabla} \rho \cdot d\vec{\sigma} = 0$) la relation vérifiant l'équivalence sur le plan de l'énergie :

$$\iiint_E \rho \left(\frac{1}{2} \overline{v^2} + U' \right) d\tau = E_M(t) + K^2 \iiint_E \Delta \rho d\tau = E_M(t)$$

Dans le cas particulier d'un écoulement permanent, E_M est constante et toutes les grandeurs sont indépendantes du temps, sauf α qui vaut :

$$\alpha = (E_M/K'm)t + \beta \quad , \quad \partial_t \beta = 0$$

de sorte que (2.20) et (2.21) s'écrivent respectivement :

$$\vec{u} + \frac{q}{m} \vec{A} + K' \vec{\nabla} \beta = 0 \quad , \quad m \left(\frac{1}{2} u^2 + Q + U' \right) = E_M$$

Posons :

$$K' = 2K = \frac{\hbar}{m} \quad (2.22)$$

En éliminant $\vec{u}$ grâce à (2.20), on constate que (2.21) et (g) sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation de Schrödinger :

$$[(i\hbar \partial_k - qA_k)^2 + 2im\hbar \partial_t + 2m^2 U'] \psi = 0 \quad (2.23)$$

pour la fonction d'onde :

$$\psi = ae^{i\alpha} \quad (2.24)$$

de sorte que (o) et (2.16) s'écrivent respectivement (ψ^* est le conjugué de ψ) :

$$\iiint_E \psi \psi^* d\tau = m \quad (2.25)$$

$$\psi(\Sigma) = 0 \quad (2.26)$$

III - Interprétation hydrodynamique de l'effet Aharonov-Bohm

3-1 Hypothèses

Considérons une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique; son moment cinétique orbital dépend en général du flux

de ce champ magnétique, sauf si ce flux prend des valeurs particulières discrètes (flux quantifié), ce qui constitue l'effet Aharonov-Bohm. Dans cette partie, nous nous proposons de retrouver et d'interpréter l'effet A.B à partir des équations du fluide quantique de masse volumique :

$$\rho = a^2$$

et de vitesse moyenne $\vec{u}$ équivalent à une particule de spin 0, ces équations se ramenant à l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde :

$$\psi = ae^{i\alpha}$$

Pour cela, nous considérerons le cas d'une particule de masse propre m et de charge q enfermée dans un puits de potentiel dont les parois sont des cylindres coaxiaux d'axe z , de hauteur b et de rayons R_1 et R_2 (cf figure 1), le potentiel étant U tel que :

$$U = 0 \quad \text{pour} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$U = \infty \quad \text{pour} \quad r < R_1 \quad \text{et} \quad r > R_2$$

Nous admettrons la présence d'un champ magnétique constant et purement axial de composante $B_z(r)$ auquel correspond un potentiel-vecteur $\vec{A}$ purement polaire de composante $A_\varphi(r)$ telle que :

$$B_z = \frac{1}{r} \partial_r (r A_\varphi) \quad \text{car} : \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \text{ot} \vec{A}$$

(ne pas confondre l'angle polaire φ avec la fonction φ du paragraphe I). Nous supposerons enfin que l'écoulement est permanent, que les lignes de courant sont des cercles d'axe z , que la masse volumique et la vitesse du fluide ne dépendent que de r et que la phase β de l'onde ne dépend que de φ , soit :

$$u_\varphi = u_\varphi(r), \quad \rho = \rho(r), \quad \alpha = \beta(\varphi) + \frac{1}{\hbar} E_M t$$

où E_M est l'énergie mécanique de la particule. Nous étudierons en particulier le cas d'un puits mince de rayon R et de largeur $e \ll R$, ce qui nous permettra de nous ramener à un problème plan pour simplifier les calculs (dans ce cas la variable r est remplacée par la variable x de la figure 2).

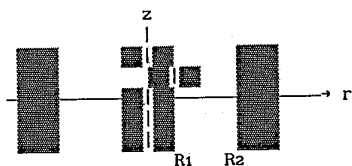


Figure 1.

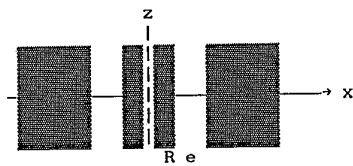


Figure 2.

3-2 Les équations

Les équations (g), (2.20) et (2.21) déterminent ρ et $\vec{u}$ et correspondent respectivement à :

- la conservation de la masse : $\text{div}(\rho\vec{u}) = 0$
- l'expression de la vitesse : $m\vec{u} + q\vec{A} + \hbar\vec{\nabla}\alpha = 0$
- la conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}u^2 + U + Q = \hbar\partial_t\alpha$

Les conditions (2.25) et (2.26) s'écrivent d'autre part :

$$\iiint_E a^2 d\tau = m \quad \text{et} \quad a(\Sigma) = 0$$

Dans le cas particulier que nous étudions, la conservation de la masse est vérifiée de facto puisque ni a , ni $\vec{u}$ ne dépendent de φ , et les deux autres équations s'écrivent :

$$m\vec{u} + q\vec{A} + \hbar\vec{\nabla}\beta = 0 \quad \text{et} \quad m\left(\frac{1}{2}u^2 + Q\right) = E_M$$

ce qui donne, avec Q tiré de (2.15)

$$mu_\varphi + qA_\varphi + \frac{\hbar}{r}\partial_\varphi\beta = 0 \tag{3.1}$$

$$\hbar^2\Delta a + m(2E_M - mu_\varphi^2)a = 0 \tag{3.2}$$

avec :

$$\Delta a = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r a)$$

et :

$$a(R_1) = 0 \quad , \quad a(R_2) = 0 \quad , \quad 2\pi b \int_{R_1}^{R_2} a^2 r dr = m$$

3-3 L'effet Aharonov-Bohm

La fonction d'onde ψ devant être continue, nous aurons sur une ligne de courant :

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$$

soit : $\beta = -n\varphi$ avec $|n|$ entier. (3.1) permet alors de connaître directement la vitesse par :

$$mu_\varphi = \frac{1}{r}n\hbar - qA_\varphi \quad (3.3)$$

Il est alors intéressant de faire apparaître le flux ϕ du champ magnétique dans la boucle formée par une ligne de courant; en vertu du théorème de Stokes, ϕ est égal à la circulation de $\vec{A}$ le long de la ligne de courant :

$$\phi = 2\pi r A_\varphi$$

soit, avec $h = 2\pi\hbar$:

$$mu_\varphi = \frac{nh - q\phi}{2\pi r} \quad (3.4)$$

On peut alors faire apparaître la composante σ suivant z du moment cinétique orbital de la particule :

$$\sigma = mu_\varphi r = \frac{nh - q\phi}{2\pi} \quad (3.5)$$

de sorte que, en l'absence de champ magnétique, on retrouve pour le moment cinétique orbital la relation connue :

$$\sigma_0 = n\hbar$$

Dans le cas général, $u_\varphi(r)$ et $a(r)$ dépendent de ϕ . Néanmoins, l'influence de ϕ disparaît formellement sur les lignes de courant pour lesquelles on a (n' entier) :

$$\sigma = n'\hbar \quad \text{soit :} \quad \phi = (n - n')\frac{h}{q}$$

En posant $n - n' = N$, on constate donc que ϕ doit prendre des valeurs discrètes correspondant à un "flux quantifié" :

$$\phi = N\frac{h}{q} \quad (3.6)$$

De manière générale, $a(r)$ doit vérifier trois conditions, alors que (3.2) ne donne que deux constantes d'intégration; il s'ensuit que la particule est dans un état lié et que son énergie mécanique E_M ne peut prendre que des valeurs appartenant à un spectre discret $E_M(n, k)$ avec k entier.

Notons également que l'effet A.B tend à montrer que $\vec{A}$ possède une réalité physique. Si nous considérons le cas particulier où le champ magnétique n'existe qu'à l'intérieur d'un cylindre d'axe z et de rayon $R_0 \leq R_1$, le fluide évolue dans une zone où le champ magnétique est nul, mais le flux ϕ est cependant non nul dans (3.4) et égal au flux ϕ_0 du champ magnétique dans le cercle de rayon R_0 . Ceci s'explique par le fait que $\vec{A}$ est continu en $r = R_0$ et par conséquent non nul dans la zone $r \geq R_0$ où il vaut :

$$A_\varphi = \frac{\phi_0}{2\pi r}$$

De plus, l'influence de ϕ_0 disparaît formellement si : $\phi_0 = N(h/q)$

3-4 Cas classique

Nous pouvons chercher à savoir comment s'intègre dans le problème quantique présent le cas classique d'une particule lancée dans un champ magnétique uniforme B . Nous savons que dans ce cas la particule décrit un cercle de rayon r relié à la vitesse par :

$$mu_\varphi + qBr = 0$$

D'autre part, $\sigma = mu_\varphi r$ et, puisque B est uniforme, $\phi = \pi r^2 B$, soit :

$$\sigma + \frac{q}{\pi} \phi = 0$$

En comparant avec (3.5), on constate alors que la valeur du flux correspondant est quantifiée, puisque :

$$\phi = -n \frac{h}{q} \quad \text{et} \quad \sigma = 2n\hbar$$

3-5 Le puits de potentiel mince

L'équation (3.2) admet comme solution respectant les trois conditions sur a , avec k entier ($x = 0$ pour $r = R_1$, $x = e$ pour $r = R_2$) :

$$a = C \sin(\gamma x) \quad , \quad C^2 = \frac{m}{\pi e b R} \quad , \quad \gamma^2 = \frac{(2E_M - mu_\varphi^2)m}{\hbar^2} \quad , \quad \gamma e = k\pi$$

Etant donnée la minceur du puits, nous aurons pratiquement une ligne de courant unique, donc une seule valeur arbitraire ϕ ; de ce qui précède, nous pouvons alors déduire le spectre d'énergie :

$$E_M(n, k, \phi) = \frac{\left(\frac{kh}{2e}\right)^2 + \left(\frac{nh - q\phi}{2\pi R}\right)^2}{2m} \quad (3.7)$$

Pour une valeur quantifiée du flux : $\phi = (n - n')(h/q)$ nous obtenons le même spectre qu'en l'absence de champ magnétique :

$$E_M(n', k) = \frac{\left(\frac{kh}{2e}\right)^2 + \left(\frac{n'h}{2\pi R}\right)^2}{2m} \quad (3.8)$$

IV - Fluide stochastique non relativiste équivalent à une particule de spin 1/2

4-1 Cas général

Si le fluide stochastique est équivalent à un corpuscule possédant un moment cinétique de rotation propre, on doit considérer qu'un petit élément de fluide tourne sur lui même. Cette rotation propre engendre alors des contraintes internes supplémentaires σ_{jk}^* que l'on considère comme étant provoquées par une fluctuation fictive $\vec{w}^*$ irrotationnelle et en moyenne nulle, responsable d'une densité massique d'énergie cinétique moyenne de fluctuation H^* , d'où les relations:

$$\sigma_{jk}^* = -\rho \overline{w_j^* w_k^*} \quad (4.1)$$

$$\vec{w}^* = \vec{\nabla} \varphi^* \quad (4.2)$$

$$\overline{\varphi^*} = 0 \quad (4.3)$$

$$H^* = \frac{1}{2} \overline{w^{*2}} \quad (4.4)$$

La relation de la dynamique appliquée au mouvement moyen de translation du fluide s'écrit alors:

$$d_t u_j = f_j - \partial_j Q + \frac{1}{\rho} \partial_k \sigma_{jk}^* \quad (4.5)$$

Désignons par $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}^*$ les densités massiques des moments d'origine extérieure et intérieure et par $\vec{S}$ le moment cinétique propre du corpuscule (celui de l'unité de masse de fluide est $\vec{S}/m$). La relation de la dynamique appliquée au mouvement moyen de rotation du fluide s'écrit:

$$d_t \vec{S} = m(\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}^*) \quad (4.6)$$

Soit d'autre part un déplacement virtuel d'un petit élément de fluide caractérisé par $d\vec{x}$ (translation) et $d\vec{\theta}$ (rotation); le principe des travaux virtuels donne alors:

$$dH^* + \frac{1}{\rho} \partial_k \sigma_{jk}^* dx_j + \vec{\Gamma}^* \cdot d\vec{\theta} = 0 \quad (R)$$

$$dH^* - \frac{1}{\rho} \partial_k (\overline{\rho w_j^* w_k^*}) dx_j + \vec{\Gamma}^* \cdot d\vec{\theta} = 0$$

$$\partial_k (\rho w_j^* w_k^*) = \rho \partial_j (\frac{1}{2} w^{*2}) + \partial_k (\rho \partial_k \varphi^*) \partial_j \varphi^*$$

$$\partial_k (\overline{\rho w_j^* w_k^*}) dx_j = \rho dH^* + \overline{\partial_k (\rho \partial_k \varphi^*) d\varphi^*}$$

soit:

$$\vec{\Gamma}^* \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{\rho} \overline{\partial_k (\rho \partial_k \varphi^*) d\varphi^*} \quad (R')$$

4-2 Cas particulier de la mécanique quantique

Le corpuscule est ici un électron de charge $q = e < 0$. Nous savons qu'il possède un moment cinétique propre $\vec{S}$ de longueur constante et un moment magnétique $\vec{M}$ porté par $\vec{S}$ et tel que (spin 1/2 et facteur gyromagnétique 2):

$$m\vec{M} = |e|\vec{S} \quad (4.7)$$

Nous aurons pour la force et le moment extérieur:

$$m\vec{f} = -m\vec{\nabla}U + e(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) + M_k \vec{\nabla}B_k \quad (4.8)$$

où $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} V$ et $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ sont le champ électrique et le champ magnétique, et:

$$m \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (4.9)$$

de sorte que (4.7) et (4.9) donnent $\vec{\Gamma} \cdot \vec{S} = 0$. La longueur de $\vec{S}$ étant constante, (4.6) donne: $\vec{\Gamma}^* \cdot \vec{S} = 0$, d'où:

$$\vec{\Gamma}^* = \vec{S} \wedge \vec{T} \quad (4.10)$$

Soit $\vec{\theta}$ l'angle orienté de $\vec{S}$ par rapport à $\vec{T}$ et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal au plan $(\vec{T}, \vec{S})$; nous aurons:

$$\vec{\Gamma}^* = -TS \sin \theta \vec{n}$$

d'où, puisque la longueur de $\vec{S}$ est constante:

$$\vec{\Gamma}^* \cdot d\vec{\theta} = \vec{\Gamma}^* \cdot \vec{n} d\theta = -TS \sin \theta d\theta = TS d(\cos \theta) = \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

(R') devient alors (R''):

$$T_p dS_p = \frac{1}{\rho} \overline{\partial_k (\rho \partial_k \varphi^*)} d\varphi^*$$

et l'on pose:

$$\varphi^* = S_p g_p^*(\lambda) \quad (4.11)$$

$$\overline{g^*(\lambda)} = 0 \quad (4.12)$$

$$\overline{g_p^*(\lambda) g_q^*(\lambda)} = \frac{1}{m^2} \delta_{pq} \quad (4.13)$$

(R'') devient alors:

$$T_p dS_p = \frac{1}{m^2} \frac{1}{\rho} \partial_k (\rho \partial_k S_p) dS_p$$

d'où:

$$T_p = \frac{1}{m^2} \frac{1}{\rho} \partial_k (\rho \partial_k S_p) \quad (4.14)$$

et:

$$H^* = \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} \partial_k S_p \partial_k S_p \quad (4.15)$$

(R) donne alors :

$$\frac{1}{\rho} \partial_k \sigma_{jk}^* = -\partial_j H^* - T_p \partial_j S_p$$

de sorte que (4.5) et (4.6) donnent :

$$d_t \vec{u} = \vec{f} - \vec{\nabla}(Q + H^*) - T_p \vec{\nabla} S_p \quad (4.16)$$

$$d_t \vec{S} = \vec{S} \wedge \left(\frac{|e|}{m} \vec{B} + m \vec{T} \right) \quad (4.17)$$

Ces équations sont équivalentes à l'équation de Pauli [3].

V - Fluide stochastique équivalent à un corpuscule ponctuel dans le cas relativiste

5.1 Cas général

Soit R un référentiel et x^μ les coordonnées d'un point dans R (t est le temps mesuré dans R). Nous emploierons les notations:

$$x^\mu = [x^0, \vec{x}] = [ct, \vec{x}] \quad , \quad \partial^\mu = [\partial^0, -\vec{\nabla}]$$

Considérons alors un corpuscule de masse propre m_0 dont la densité de probabilité de présence dans R est $\xi(x, t)$. La densité de masse propre du fluide stochastique équivalent vaut donc dans R :

$$\rho(x, t) = m_0 \xi(x, t)$$

Soit d'autre part $u^\mu(x, t)$ la 4-vitesse moyenne du fluide dans R :

$$u^\mu = d_t x^\mu = [u^0, \vec{u}] = [c, \vec{u}]$$

et R_0 le référentiel propre d'un élément de fluide, c'est-à-dire le référentiel dans lequel l'élément de fluide est immobile en moyenne (la vitesse de R_0 est donc $\vec{u}$). Si t_0 désigne le temps mesuré dans R_0 (temps propre), le phénomène du ratentissement des horloges s'écrit:

$$dt = \gamma dt_0 \quad (5.1)$$

Ici, la fonction γ ne peut être précisée a priori, sauf dans le cas limite non quantique (cas classique) où elle vaut:

$$\gamma_L = \frac{c}{(c^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.2)$$

Nous aurons d'autre part pour la vitesse d'Univers du fluide:

$$U^\mu = d_{t_0} x^\mu = \gamma u^\mu \quad (5.3)$$

soit encore:

$$U^\mu = [U^0, \vec{U}] = [\gamma c, \gamma \vec{u}]$$

où U^μ suit la transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel:

$$U^{\mu'} = L_{\nu}^{\mu'} U^\nu \quad (5.4)$$

On constate alors d'après (5.2) que l'on a dans le cas limite non quantique:

$$(U^\mu U_\mu)_L = c^2 \quad (5.5)$$

En désignant par δP^μ la 4-quantité de mouvement d'un élément de fluide de masse propre δm_0 et de masse δm mesurée dans R , nous aurons:

$$\delta P^\mu = u^\mu \delta m = U^\mu \delta m_0$$

soit:

$$\delta m = \gamma \delta m_0 \quad (5.6)$$

Enfin, en désignant par ρ_0 la densité de masse propre de fluide dans R_0 et par $\delta\tau$ et $\delta\tau_0$ la mesure d'un élément de volume dans R et R_0 , le phénomène de contraction des longueurs donne:

$$\delta\tau = \frac{1}{\gamma} \delta\tau_0$$

soit, vu que

$$\delta m_0 = \rho \delta\tau = \rho_0 \delta\tau_0$$

$$\rho = \gamma\rho_0 \quad (5.7)$$

Ceci posé, le groupe d'équations non relativiste (a-q) peut être étendu au cas relativiste à condition de remplacer t par t_0 , ρ par ρ_0 , $d\tau$ par $d\tau_0$, ainsi que les vecteurs par les vecteurs d'Univers correspondants:

$$\begin{aligned} U^\mu &= \gamma u^\mu \quad , \quad V^\mu = \gamma v^\mu \quad , \quad W^\mu = \gamma w^\mu \\ F^\mu &= \gamma f^\mu \quad , \quad F'^\mu = \gamma f'^\mu \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \text{(a')} \quad W^\mu &= V^\mu - U^\mu = -\partial^\mu \varphi & \text{(b')} \quad \bar{\varphi} &= 0 \\ \text{(c')} \quad \overline{W^\mu W_\mu} &= \overline{V^\mu V_\mu} - \overline{U^\mu U_\mu} & \text{(d')} \quad H &= -\frac{1}{2} \overline{W^\mu W_\mu} = -\frac{1}{2} \overline{\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi} \\ \text{(e')} \quad \partial_\nu (\rho_0 V^\nu) &= s & \text{(f')} \quad \bar{s} &= 0 \\ \text{(g')} \quad \partial_\nu (\rho_0 U^\nu) &= 0 & \text{(h')} \quad s &= \partial_\nu (\rho_0 W^\nu) = -\partial_\nu (\rho_0 \partial^\nu \varphi) \\ \text{(i')} \quad d_{t_0} U^\mu &= F^\mu + F'^\mu & \text{(j')} \quad F'^\mu &= \partial^\mu Q = -(1/\rho_0) \partial^\nu \sigma_\nu^\mu \\ \text{(k')} \quad \sigma_\nu^\mu &= -p \delta_\nu^\mu + \rho_0 \overline{W^\mu W_\nu} & \text{(l')} \quad \overline{s W^\mu} &= (p/\rho_0) \partial^\mu \rho_0 \\ \text{(m')} \quad Q &= (p/\rho_0) + H + \chi & \text{(n')} \quad \iiint_E p d\tau_0 &= -m_0 \chi \\ \text{(o')} \quad \iiint_E \rho_0 d\tau_0 &= m_0 & \text{(p')} \quad \rho_0(\Sigma) &= 0 \\ \text{(q')} \quad \overrightarrow{\nabla} \rho_0(\Sigma) &= 0 \end{aligned}$$

où χ est ici une constante et où (k') est déduite de l'extension de (1.17) au cas relativiste, à savoir:

$$\partial^\nu (\rho_0 \overline{V^\mu V_\nu}) = \partial^\mu p + \rho_0 F^\mu \quad (5.8)$$

De plus, la force extérieure d'Univers ne fournissant aucun travail comme dans le cas classique:

$$F^\mu U_\mu = 0 \quad (5.9)$$

et (i') donne:

$$dQ = \partial^\mu Q dx_\mu = \partial^\mu Q U_\mu dt_0 = \frac{1}{2} d(U^\mu U_\mu)$$

ce qui entraîne :

$$Q = \frac{1}{2} U^\mu U_\mu + \text{constante}$$

où la constante est déterminée dans le cas limite non quantique ($Q = 0$ et relation 5.5); on obtient alors pour le potentiel quantique, invariant d'après (5.4):

$$Q = \frac{1}{2} (U^\mu U_\mu - c^2) \quad (5.10)$$

5-2 Cas particulier de la mécanique quantique

La mécanique quantique correspond au cas particulier:

$$\varphi = g(\lambda) \log \rho_0 \quad (5.11)$$

avec les relations (2.7) et (2.8) et $K = \hbar/2m_0$. On déduit alors de (a'), (h'), (l'), (k') et (m'):

$$W^\mu = -\frac{1}{\rho_0} \partial^\mu \rho_0 g(\lambda) \quad (5.12)$$

$$s = \square \rho_0 g(\lambda) \quad (5.13)$$

$$p = -K^2 \square \rho_0 \quad (5.14)$$

$$\sigma_\nu^\mu = K^2 (\square \rho_0 \delta_\nu^\mu + \frac{1}{\rho_0} \partial^\mu \rho_0 \partial_\nu \rho_0) \quad (5.15)$$

$$Q = -K^2 (\frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0^2} \partial^\nu \rho_0 \partial_\nu \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \square \rho_0) \quad (5.16)$$

car (n') combinée avec (o') et (q') donne $\chi = 0$ compte tenu de (5.14). (m') et (5.10) donnent alors:

$$\frac{1}{2} \overline{V^\mu V_\mu} = \frac{p}{\rho_0} + \frac{1}{2} c^2 \quad (5.17)$$

et (n'):

$$\iiint_E \rho_0 \overline{V^\mu V_\mu} d\tau_0 = m_0 c^2 \quad (5.18)$$

Posons:

$$\rho_0 = a^2 \quad (5.19)$$

(5.16) s'écrit:

$$Q = -2 K^2 \frac{\square a}{a} \quad (5.20)$$

qui donne avec (5.10):

$$\hbar^2 \square a + m_0^2 (U^\mu U_\mu - c^2) a = 0 \quad (5.21)$$

Si l'on suppose enfin que le champ de force extérieur est purement électromagnétique et caractérisé par le 4-potentiel vecteur:

$$A^\mu = [A^0, \vec{A}]$$

vérifiant la condition de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.22)$$

alors:

$$\vec{f} = \frac{q}{m_0} (-\partial_t \vec{A} - c \vec{\nabla} A^0 + \vec{u} \wedge \text{rot} \vec{A})$$

(i') et (5.10) donnent d'autre part ($U^0 = U_0 = \gamma c$):

$$\vec{f} = \partial_t \vec{U} + \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \vec{u} \wedge \text{rot} \vec{U} + \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} (U_0^2 - U^2) \right]$$

$$= \partial_t \vec{U} + c \vec{\nabla} U^0 - \vec{u} \wedge \text{rot} \vec{U}$$

soit, avec $P^\mu = m_0 U^\mu = m u^\mu$:

$$\partial_t (m \vec{u} + q \vec{A}) + \vec{\nabla} (m c^2 + q c A^0) = \vec{u} \wedge \text{rot} (m \vec{u} + q \vec{A})$$

qui admet pour solution particulière:

$$m \vec{u} + q \vec{A} = -\hbar \vec{\nabla} \phi \quad , \quad m c^2 + q c A^0 = \hbar \partial_t \phi$$

soit:

$$P^\mu + q A^\mu = \hbar \partial^\mu \phi \quad (5.23)$$

C'est une équation covariante dont la partie temporelle exprime la conservation locale moyenne de l'énergie du fluide quantique.

Recherchons alors le cas limite non relativiste; en posant:

$$\phi = \frac{1}{\hbar} m_0 c^2 t + \alpha$$

on obtient ($m \simeq m_0$) :

$$m \vec{u} + q \vec{A} + \hbar \vec{\nabla} \alpha = 0$$

soit (2.20) et:

$$m c^2 + q V = m_0 c^2 + \hbar \partial_t \alpha$$

ce qui donne (2.21):

$$m_0 \left(\frac{1}{2} u^2 + Q \right) + q V = \hbar \partial_t \alpha$$

car

$$\left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) c^2 = Q + \frac{1}{2} u^2 + \dots$$

d'après (5.10)

Le problème de la particule de spin 0 en mécanique quantique relativiste comporte cinq équations du premier ordre vérifiées par cinq fonctions d'onde ψ_μ, ψ [4]:

$$(i\hbar\partial_\mu + qA_\mu)\psi = m_0c\psi_\mu, \quad (i\hbar\partial^\mu + qA^\mu)\psi_\mu = m_0c\psi$$

la densité de courant de masse propre (donc de probabilité de présence) étant définie par:

$$j_\mu = -\frac{c}{2}(\psi_\mu\psi^* + \psi\psi^*_\mu) = \rho u_\mu$$

L'élimination des ψ_μ donne l'équation de Klein-Gordon:

$$[(i\hbar\partial^\mu + qA^\mu)(i\hbar\partial_\mu + qA_\mu) - m_0^2c^2]\psi = 0 \quad (5.24)$$

posons:

$$\psi = ae^{i\phi}$$

La partie réelle de cette équation est (5.21) avec $P^\mu = m_0U^\mu$ tiré de (5.23) et la partie imaginaire (g'):

$$\partial_\nu(\rho_0U^\nu) = \partial_\nu(\rho u^\nu) = 0$$

La résolution de l'équation de Klein Gordon donne $a(x,t)$ et $\phi(x,t)$ en tenant compte de la condition (o'), (p') et (q'), ce qui permet de connaître dans R la densité de masse propre ρ (donc de probabilité de présence de la particule):

$$\rho = \gamma a^2 = \gamma\psi\psi^*$$

où γ est déduit de la partie temporelle de (5.23), ainsi que la vitesse moyenne $\vec{u}$ du fluide (donc de la particule) déduite de la partie spatiale de (5.23).

V - Conclusion

L'introduction du fluide stochastique équivalent à un corpuscule et l'établissement de ses propriétés hydrodynamiques permet de décrire le comportement du corpuscule dans un cadre très général, puisque les équations reposent sur une fonction $\varphi(x,t,\lambda)$ tout à fait quelconque, mis à part qu'elle est en moyenne nulle. La mécanique quantique est alors un cas très particulier de la mécanique stochastique correspondant à:

$$\varphi = g(\lambda) \log \rho$$

Il se peut alors que certains problèmes auxquels l'équation de Schrödinger n'apporte pas de réponse valable (comme celui d'une particule enfermée dans une cavité sphérique), trouvent une solution dans le cadre général de la mécanique stochastique.

Je remercie MM. Karatchentzeff, Lochak et Fargue pour leurs encouragements ainsi que M. Bass dont les nombreux conseils m'ont été précieux.

Références

- [1] Louis de Broglie *Les principes de la nouvelle Mécanique ondulatoire*, J. Phys. série VI, t. VII no 11, p. 321, 1926. Louis de Broglie *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, J. Phys. série VI, t. VIII n, p. 225, 1927. E. Madelung *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*, Zs. Phys. **40**, (1926), p. 322, trad. A.F.L.B. **15**, 91 (1990). J.Bass, Revue scientifique, 83 éme année, janvier 1945, pages 3 à 20. Louis de Broglie *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1956).
- [2] Aron *Une approche stochastique de la microphysique* Annales de la Fondation Louis de Broglie, volume 12, n°3, 1987.
- [3] Takabayashi *Hydrodynamical quantization and spin*, Proc. Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, page 51, Tokyo 1983.
- [4] Landau et Lifchitz *Théorie quantique relativiste*, Mir 1972, page 51.

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1989, révisé le 2 septembre 1990)