Relativité et Mécanique quantique dans la région du genre espace

R. Dutheil

Université de Poitiers, Faculté de Médecine
Département de Physique
34 rue du Jardin des Plantes, 86034 POITIERS

RESUME. Il existe deux groupes complets et orthochrones de Lorentz L_+^T et $\tilde{L}_+^T$ qui sont isomorphes, le premier sous-lumineux, le second superlumineux. En partant de $\tilde{L}_+^T$ on définit des référentiels tachyoniques spécifiques et des coordonnées réelles et inhérentes tachyoniques. En posant un Principe de supercovariance, conséquence de l'isomorphisme, on peut développer la Théorie de la Relativité restreinte dans la région du genre espace avec une métrique réelle dS^2 de signature $-+++$.

On redéfinit ensuite les coordonnées du cône de lumière (τ, ξ) et les repères IMF, et on généralise en définissant un système de 4 coordonnées curvilignes du cône de lumière. Dans ce système de coordonnées on développe la Mécanique quantique dans la région du genre espace : équation de Dirac d'un fermion tachyonique et champs de fermions du genre espace. On propose un modèle de photon et on réinterprète le concept d'antiparticule et les graphes de Feynman. Enfin on expose certains résultats concernant les monopôles magnétiques.

ABSTRACT. We analyse isomorphism of the $SO(3,1;C)$ *and* $SO(1,3;C)$ *groups, from which it is possible to deduce two complete and orthochrones isomorphic Lorentz groups* L_+^T *and* $\tilde{L}_+^T$ *which are respectively subluminal and superluminal with real metrics expressed in inherent coordinates of respective signatures* $(+---)$ *and* $(-+++)$. *The concept of tachyonic referential frame is defined. It is then possible to develop the Relativity of this space-like variety, and the quantum theory of a tachyon and of a tachyonic field, in the light cone coordinates system. A photon model is defined and it is possible to develop space-like fermion's field theory. Undes these conditions, we are led to postulating a new interpretation of* CPT *transformations, antiparticles and Feynman's diagrams.*

The Dirac equation of a magnetic monopole is written in the two dimensional light cone coordinate system and with the four dimensions of a curvilinear coordinate system.

I - Sur les bases d'une Théorie de la Relativité et d'une Mécanique quantique de la région du genre espace

Introduction

Il faut remonter aux années 1960 pour voir examiner sérieusement la possibilité d'existence de particules dont les vitesses seraient supérieures à celle de la lumière dans le vide.

Après Terletskii [1] considérant des particules de masses propres imaginaires, O.M.P. Bilaniuk, V.K. Deshpande et E.C.G. Sudarshan [2] et d'autres auteurs, G. Feinberg introduit le concept de tachyon [3] de la manière suivante : si l'on considère une particule de masse propre m, se déplaçant parallèlement à l'axe (x) d'un référentiel $R(x, y, z)$ avec la vitesse v par rapport à ce référentiel $(v < c)$, son énergie et son impulsion toujours par rapport à R sont

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ p = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ (\beta = v/c < 1; v < c) \ , \qquad (p^0 = E/c = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1}$$

Si $\beta > 1 (v > c)$, E et p sont imaginaires. Imaginons, comme G. Feinberg des particules dont les vitesses sont toujours supérieures à c par rapport à R : leur masse propre ou "au repos" est imaginaire, soit

$$m^* = \mu i \tag{2}$$

μ étant réel. On voit immédiatement que l'on a pour l'énergie et l'impulsion de telles particules, les valeurs

$$E = \frac{\mu c^2}{\sqrt{\beta^2-1}} \ , \ p = \frac{\mu\beta c}{\sqrt{\beta^2-1}} \ , \ (\beta = v/c > 1; v > c) \tag{3}$$

valeurs réelles donc physiquement mesurables. G. Feinberg désigne sous le nom de tachyon (du grec tachus = rapide) ces hypothètiques particules. Pour $\beta = \infty$, on obtient $E = 0$, $p = \mu c$ (tachyons transcendants).

Il existerait ainsi trois classes de particules. 1. Les Bradyons (du grec bradus = lent) de vitesses toujours inférieures à c (Electrons, protons, etc.) 2. Les Luxons (Lux = lumière), particules de masses en principe nulles et de vitesses toujours égales à c (Photons, les diverses espèces de neutrinos, les gravitons ...). 3. Les Tachyons, hypothètiques, de vitesses toujours supérieures à c. G. Feinberg souligne les problèmes de macro-causalité posés par ces particules, conduisant à des inversions temporelles et en contradiction avec le Théorème de Zeeman [4].

Les nombreuses expériences faites depuis cette époque pour détecter les tachyons ont toujours été négatives. Il faut citer cependant les expériences récentes de J. Steyaert [5] interprétant un "effet tachyo-électrique" comme traduisant l'existence de deux monopôles magnétiques de vitesses supérieures à c.

De nombreux auteurs ont tenté une justification théorique des tachyons : il faut citer en particulier E. Recami. On trouvera dans son ouvrage "Classical tachyons and possible applications" une liste de références exhaustive sur ce sujet [6].

Enfin il est intéressant de remarquer que G. Lochak dans ses recherches fondamentales sur les monopôles magnétiques a obtenu une équation non linéaire comprenant trois solutions correspondant respectivement aux bradyons, aux luxons et aux tachyons [7].

Notre point de vue est différent de celui des auteurs précédents. L'objectif de cet article est de montrer qu'il est possible de développer une Théorie de la Relativité dans la région du genre espace conforme aux idées d'Einstein. Cette possibilité est basée, comme le montre la Théorie des groupes, sur l'existence d'un groupe complet et orthochrone de Lorentz isomorphe au groupe de Lorentz habituel. Ce deuxième groupe dit superlumineux correspond à une métrique réelle différente de la métrique habituelle et permet de définir un système de coordonnées réelles inhérentes et des référentiels superlumineux spécifiques de vitesses relatives toujours supérieures à c.

Il est ensuite possible de développer les bases d'une Mécanique quantique tachyonique dans le système de coordonnées du cône de lumière, à deux puis à quatre dimensions et d'en déduire un modèle de photon.

On peut en déduire certaines conséquences, comme une réinterprétation des graphes de Feynman, et certaines applications relatives aux monopôles magnétiques.

Notre préoccupation première est de rester en accord avec le Théorème de Zeeman [4] montrant que le groupe des automorphismes causaux se déduit du groupe de Lorentz.

Telles sont les idées présentées dans cet article où dans une dernière partie nous donnerons un exemple d'application basé sur la Relativité Générale et concernant les préons, sous-structures dont seraient formés les électrons, les photons et les quarks.

Le lecteur trouvera le développement complet de ces hypothèses dans notre ouvrage "Théorie de la Relativité et Mécanique quantique dans la région du genre espace" [8] ainsi que dans les publications citées dans les Références.

I. Théorie de la Relativité dans la région du genre espace

1. Coordonnées du cône de lumière et référentiels IMF

Le système de coordonnées du cône de lumière et les référentiels IMF ont été introduits pour les besoins de la théorie des partons et des quarks [9]. La métrique spécifique, en fait à deux dimensions des IMF (= Infinite Momentum Frame) s'écrit

$$ds^2 = d\tau d\xi + d\xi d\tau \qquad c = 1 \tag{1}$$

le tenseur métrique covariant étant

$$\begin{gathered}[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ g_{00} = g_{11} = 0\ ,\ g_{01} = g_{10} = 1 \qquad (\mu, \nu = 0, 1; \mu \neq \nu) \end{gathered} \tag{2}$$

Cette métrique est différente de celle correspondant aux coordonnées et référentiels ordinaires ORF (= Ordinary Referential Frame)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3}$$

$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3; g_{00} = 1; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$ avec la signature $+ - - -$.

La métrique (1) a comme valeurs $ds^2 = 0$ pour les luxons (photons) et $ds^2 > 0$ pour les particules du genre temps.

Les coordonnées (τ, ξ) sont des *coordonnées inhérentes* et on passe d'un référentiel ORF à un référentiel IMF par les transformations :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau+\xi)\ ,\ \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+x) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau-\xi)\ ,\ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-x) \end{aligned} \tag{4}$$

qui forment un sous-groupe de Lorentz. Cet exemple de coordonnées inhérentes et de référentiels spécifiques luxoniques conduit à penser qu'il pourrait en être de même pour d'éventuels référentiels et coordonnées tachyoniques.

2. Le Groupe de Lorentz superlumineux

Les groupes $SO(3,1;C)$ et $SO(1,3;C)$ des 4×4 matrices complexes Λ^* et $\tilde{\Lambda}^*$ isomorphes à $SO(4;C)$ sont isomorphes et conservent les métriques complexes de signatures respectives $+---$ et $-+++$. Il en résulte qu'il existe deux groupes complets et orthochrones de Lorentz ayant même Algèbre de Lie, et isomorphes [10],[11],[12],[13],[8]

$$L_+^T \quad \text{et} \quad \tilde{L}_+^T$$

conservant les métriques réelles de signatures respectives $+---$ et $-+++$, soit

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu(+---) \tag{5}$$

$$dS^2 = G_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu(-+++)(\mu,\nu=0,1,2,3) \tag{6}$$

$\tilde{L}_+^T$ est le groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz $\tilde{\Lambda}$ des transformations superlumineuses isomorphe au groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz Λ des transformations sous-lumineuses. Les tenseurs métriques covariants correspondant à (5) et (6) s'écrivent respectivement

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$[G_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Il faut remarquer l'importance du concept *d'isomorphisme* : les deux groupes L_+^T et $\tilde{L}_+^T$ correspondent à des situations et des propriétés physiques très différentes dans les variétés pseudo-euclidiennes $E_4(ds^2)$ et $\tilde{E}_4(dS^2)$, mais leur isomorphisme permet de dégager à travers ces réalisations physiques différentes la même situation abstraite.

3. Relativité restreinte dans la région du genre espace

En partant du groupe $\tilde{L}_+^T$ on peut développer une théorie de la Relativité restreinte dans la région du genre espace.

On étend le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, soit c, aux référentiels d'inertie tachyoniques, en y ajoutant trois axiomes, transposition de ceux de la Relativité dans la région du genre temps [8,14,15]. *Axiome I* : il peut exister des référentiels superlumineux en matière tachyonique (SRF= Superluminal Referential Frame) que l'on distingue des référentiels ordinaires en matière bradyonique (ORF=Ordinary Referential Frame) et des référentiels IMF.

Il existe des coordonnées réelles superlumineuses *inhérentes* aux référentiels tachyoniques SRF et dont la nature et les propriétés peuvent être différentes des coordonnées associées à un repère ORF. *Axiome II* : Par définition la vitesse relative de deux référentiels d'inertie tachyoniques (SRF) est toujours plus grande que c, contrairement à la vitesse relative de deux référentiels d'inertie ORF qui est toujours plus petite que c. *Axiome III* : Par rapport à un référentiel tachyonique (SRF), les lignes d'univers seront du genre espace et une succession d'évènements superlumineux le long d'une telle ligne d'univers sera reliée par la métrique

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{9}$$

dS^2 est une métrique réelle et positive ($dS^2 > 0$) définie à l'aide des coordonnées réelles inhérentes X^μ mesurées par rapport au référentiel SRF en accord avec l'axiome I. La métrique dS^2 a la signature $-+++$ et définit la variété d'univers $\tilde{E}_4$ comme un espace pseudo-euclidien de tenseur métrique covariant

$$[G_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

La justification de ces axiomes se déduit du développement ci-dessous : en effet cherchons la forme d'une transformation spéciale de Lorentz superlumineuse. Une telle transformation fait passer d'un référentiel tachyonique R à un autre R' et il existe entre les coordonnées respectives des relations linéaires de la forme

$$X'^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} X^{\mu} \quad , \quad (\mu, \nu) = 0, 1, 2, 3) \tag{11}$$

conservant

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu} \quad , \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{12}$$

Comme classiquement, on montre [8, p.17,14] qu'on peut se ramener dans C_2 à SO(2;C) ce qui revient à rendre les axes (X^{μ}) et (X'^{μ}) parallèles deux à deux, la vitesse relative $v > c$ étant parallèle à (X^1) et (X'^1). D'où les transformations spéciales de Lorentz superlumineuses et les inverses obtenues en transposant $\tilde{\Lambda}$

$$\begin{aligned} X'^1 = \frac{\beta X^1 - X^0}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \quad &, \quad X'^0 = \frac{\beta X^0 - X^1}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \\ X'^2 = X^2 \quad &, \quad X'^3 = X^3, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} X^1 = \frac{\beta X'^1 + X'^0}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \quad &, \quad X^0 = \frac{\beta X'^0 + X'^1}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \\ X^2 = X'^2 \quad &, \quad X^3 = X'^3, \end{aligned} \tag{14}$$

avec $X^0 = cT$, $X'^0 = cT'$.

Les lignes d'univers telles que (X'^1) sont du genre espace et définies par

$$X' = 0 \tag{15}$$

$$(X, X') = \phi \tag{16}$$

$$\operatorname{cotg} \phi = \beta > 1 \tag{17}$$

Pour $\phi = 0$, $\beta = \infty$. Pour $\phi = \pi/4$, $\beta = 1$.

La justification de l'axiome II et de l'axiome III est évidente. Nous allons justifier l'axiome I concernant la possibilité d'existence de référentiels tachyoniques, de matière tachyonique, et de coordonnées inhérentes, c'est-à-dire que de tels référentiels et des telles coordonnées puissent physiquement être concevables. En effet dans le groupe des transformations de Lorentz sous-lumineuses

$$x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{(1-\beta^2)^{1/2}} \ , \ x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \ , \ x'^2 = x^2 \ , \ x'^3 = x^3 \ , \qquad (18)$$

où $x^0 = ct$, $x'^0 = ct'$, $\beta < 1$ et son inverse, l'identité ou élément neutre existe pour $\beta = 0$

$$\beta = 0 \to x'^\mu = x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3) \qquad (19)$$

L'élément neutre définit un référentiel ORF(= bradyonique) et par suite la possibilité d'existence d'une "matière bradyonique" que l'on peut définir comme un collectif de bradyons dont les rapports cinématiques mutuels sont statistiquement définis par

$$\beta = 0 \ , \quad \text{soit en fait} \quad \beta = \epsilon \quad \text{ou} \quad \beta \ll 1$$

Par contre pour le groupe de Lorentz isomorphe superlumineux ((13) et (14)), l'élément neutre est défini par $\beta = \infty$

$$\beta = \infty \to X'^\mu = X^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3) \qquad (20)$$

L'isomorphisme des deux groupes conduit à définir un référentiel tachyonique par (20) de même que (19) définissait un référentiel ORF. Ce même isomorphisme entraîne à définir la possibilité d'existence physique d'une "matière tachyonique" qui serait définie comme un collectif de tachyons dont les rapports cinématiques mutuels sont tels que

$$\beta = \infty \ , \ (\beta \gg 1) \quad \text{ou} \quad X^0 = 0$$

Mais dans ces conditions on est amené à réinterpréter le concept de "vitesse infinie" par l'introduction nécessaire de coordonnées inhérentes. En effet, d'après la définition relativiste [16] le temps propre τ est le temps réel vécu le long de sa ligne d'univers par un observateur supposé idéalement ponctuel, soit

$$d\tau = ds/c \qquad (21)$$

Dans le cas du temps propre tachyonique, nous avons

$$d\tilde{\tau}^2 = 1/c^2 \sum_\mu (dX^\mu)^2 = 1/c^2 [\sum_i (dX^i)^2 - c^2 dT^2] = dS^2/c^2 \ ,$$
$$(\mu = 0, 1, 2, 3 \ , \ i = 1, 2, 3) \qquad (22)$$

Dans le référentiel tachyonique propre de l'observateur :

$$\beta = \infty \quad \text{ou} \quad T = 0 \quad \text{et} \quad dT = 0 \; , \; d\tilde{\tau}^2 = \sum_i (dX^i)^2/c^2 \tag{23}$$

Par exemple si

$$X^2 = X^3 = 0 \; , \; d\tilde{\tau} = dX^1/c \tag{24}$$

et $\tilde{\tau}$ est mesuré suivant (X^1) : l'axe de temps propre devient confondu avec l'axe spatial (X^1) et dissocié de l'axe $(X^0 = cT)$.

En général dans son référentiel tachyonique propre défini par $X^0 = 0$ (ou $T = 0$) un point (ou une particule) sera défini par les coordonnées

$$X^1, X^2, X^3$$

qui seront aussi les coordonnées de temps propre

$$\tau^1 = X^1/c \; , \; \tau^2 = X^2/c \; , \; \tau^3 = X^3/c \tag{25}$$

On est donc amené à distinguer le temps propre $\tilde{\tau}$ du "temps cinématique" T. Dans le cas sous-lumineux au contraire temps propre et "temps cinématique" (c'est-à-dire le temps mesuré par une horloge qui est toujours un déplacement spatial) sont confondus sur le même axe.

En outre, alors que l'espace observationnel d'un observateur ponctuel sous-lumineux dans son référentiel propre est en chacun de ses instants-points la variété plane tri-dimensionnelle normale à sa ligne d'univers (variété plane représentée par l'hyperplan $(x^1x^2x^3)$[16], dans le cas tachyonique, au contraire, c'est la ligne d'univers qui en chacun de ses instants-points sera tangente à l'espace observationnel (variété plane représentée par l'hyperplan $X^1X^2X^3$), c'est-à-dire située dans l'hyperplan $(X^1X^2X^3)$ ce dernier étant normal à l'axe de temps cinématique (X^0).

Les coordonnées (X^μ) sont donc bien des coordonnées inhérentes ayant des qualités et des propriétés différentes des coordonnées $ORF(x^\mu)$.

Le groupe de Lorentz superlumineux $\tilde{L}_+^T$ vérifie le Théorème de Zeeman [4] qui peut s'énoncer sous la forme suivante : l'ensemble des automorphismes causaux forme un groupe engendré par le Groupe orthochrone de Lorentz, comprenant l'inversion de parité, mais excluant l'inversion temporelle.

Dans la variété d'espace $\tilde{E}_4$, la macrocausalité est donc respectée par rapport aux référentiels tachyoniques et dans le système de coordonnées inhérentes. Il faut cependant remarquer que c'est la coordonnée inhérente T, ou temps cinématique, dissociée de la coordonnée de temps propre τ qui intervient. On peut voir là encore une conséquence de l'isomorphisme des groupes L_+^T et $\tilde{L}_+^T$.

4. Supercovariance

Le Principe de covariance généralisée d'Einstein peut s'énoncer : les équations de la Physique, sous forme tensorielle et en coordonnées curvilignes, ont la même forme par rapport à n'importe quel repère. Il semble naturel d'étendre ce principe aux référentiels tachyoniques et de poser *un Principe de Supercovariance* qui s'énoncera ainsi : les équations de la Physique, sous forme tensorielle et en coordonnées curvilignes ont la même forme par rapport à n'importe quel repère, qu'il soit ORF ou tachyonique. Une justification de ce Principe est liée à l'isomorphisme des groupes L_+^T et $\tilde{L}_+^T$.

Un exemple en est donné [8] par les équations de la Dynamique relativiste qui s'écriront sous forme tachyonique

$$\mu c^2 \frac{\nabla u^\alpha}{dS} = \Phi^\alpha \ , \ (\alpha = 0,1,2,3) \tag{26}$$

où

$$dS^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \ , \ (\alpha, \beta = 0,1,2,3) \tag{27}$$

avec la signature $- + ++$, y^α étant un système de coordonnées curvilignes, ∇u^α la différentielle absolue du vecteur vitesse unitaire d'univers u^α, Φ^α le vecteur force d'univers, et $\nabla u^\alpha / dS$ l'accélération d'univers relative à S.

Les équations (26) permettent de retrouver les composantes du quadrivecteur d'impulsion-énergie $\tilde{p}^\alpha$, $(\alpha = 0,1,2,3)$ par rapport à un référentiel tachyonique [8].

En particulier dans le cadre d'une transformation spéciale superlumineuse de Lorentz, on obtient

$$\begin{gathered} \tilde{p}^0 = \frac{\mu c}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \quad , \quad \tilde{p} = \frac{\mu \beta c}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \\ (\tilde{p} = \tilde{p}^1 \quad , \quad)(\beta > 1) \end{gathered} \tag{28}$$

avec pour $\beta = \infty$, $\tilde{p}^0 = 0$, $\tilde{p} = \mu c$.

Ces composantes ne peuvent théoriquement être mesurées que par rapport à un référentiel tachyonique. Or Feinberg [3] a obtenu les mêmes valeurs de façon "heuristique" et il suppose implicitement qu'il s'agit d'observables pouvant être mesurés à partir d'un référentiel ordinaire ORF, ce qui n'est pas une évidence.

La recherche d'un cadre où s'effectuerait la supercovariance conduit à choisir l'espace affine [8] en adoptant l'interprétation de H. Weyl [17] : dans l'espace affine, les symboles de Christoffel

$$\Gamma^i_j k$$

représentent des grandeurs de connexion affine entre deux points. Dans ces conditions, les métriques $ds^2(+---)$ et $dS^2(-+++)$ ne représentent plus un obstacle pour l'interprétation de la supercovariance.

Remarquons qu'il est possible de définir une métrique de Riemann

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad , \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{29}$$

de signature $- + ++$, dont l'interprétation s'effectue comme d'habitude au moyen des métriques pseudo-euclidiennes de signature $- + ++$ tangentes ou osculatrices et donc de développer une théorie de la Relativité Générale dans la région du genre espace [8].

5. Opérateur de passage de L^T_+ à $\tilde{L}^T_+$ et coordonnées du cône de lumière [8,12]

Le seul opérateur permettant de passer de L^T_+ à $\tilde{L}^T_+$ et réciproquement est l'opérateur $[T]$ défini par [8, 12, 13]

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{30}$$

Or comme

$$\|T\| = -1 \tag{31}$$

$[T]$ ne fait pas partie du groupe des rotations S0 (4;C), ce qui est en accord avec le concept de coordonnées inhérentes.

Par contre l'opérateur [0] défini par

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

est tel que

$$\|0\| = +1 \tag{33}$$

et fait partie du groupe des rotations à deux dimensions S0 (2;C), groupe des 2×2 matrices complexes λ^* et $\tilde{\lambda}^*$ [8,12] conservant les métriques complexes de signatures respectives $+-$ et $-+$, λ^* et $\tilde{\lambda}^*$ étant conjuguées dans S0 (2;C)

$$\tilde{\lambda}^* = [0]^{-1} \lambda^* [0] \tag{34}$$

Il existe donc [8,12] deux sous-groupes de Lorentz l_+^T et $\tilde{l}_+^T$ conjugués, sous groupe des 2×2 matrices réelles λ et $\tilde{\lambda}$ conservant les métriques réelles de signatures respectives $+-$ et $-+$. L'opérateur [0] faisant partie du groupe des rotations $S0(2;C)$ permet de passer de l_+^T à $\tilde{l}_+^T$.

En partant de ces résultats, on retrouve par un méthode *purement algébrique* [8] et non analytique [9] les concepts de coordonnées du cône de lumière (τ, ξ) et de référentiel IMF et on montre que dans le même système de coordonnées (τ, ξ) on peut représenter simultanément les évènements du genre temps et du genre espace avec pour le genre temps $(c = 1)$

$$\tau\xi + \xi\tau = k^2 > 0 \ , \ \tau > 0 \ , \ \xi > 0 \tag{35}$$

k étant réel et > 0 et pour le genre espace $(c = 1)$

$$\tau\xi + \xi\tau = -k^2 \quad \text{ou} \quad -\tau\xi - \xi\tau = k^2 \tag{36}$$

k étant réel et > 0

$$\tau > 0 \ , \ \xi < 0$$

et de même pour les composantes du quadrivecteur d'impulsion-énergie π^0 et π, avec pour le genre temps

$$\pi^0\pi + \pi\pi^0 = m^2 \ , \ (c = 1) \ , \ m \quad \text{réel} \quad > 0 \ , \ \pi^0 > 0 \ , \ \pi > 0 \tag{37}$$

et pour le genre espace

$$-\pi^0\pi - \pi\pi^0 = m^2 \ , \ (c = 1) \ , \ m \quad \text{réel} \quad > 0 \ , \ \pi^0 > 0 \ , \ \pi < 0 \tag{38}$$

On a généralisé tous ces résultats à quatre dimensions en définissant un système de coordonnées curvilignes du cône de lumière $\xi^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ [8,18,19].

Dans les conditions, il est particulièrement avantageux de développer la Mécanique quantique et la Théorie quantique des champs dans le système de coordonnées du cône de lumière.

II. Mécanique quantique et Théorie quantique des champs dans la région du genre espace

1. Fermions du genre espace [8,12]

Dans le système de coordonnées du cône de lumière à deux dimensions (τ, ξ), nous avons démontré [8, 12] que les équations du premier ordre ou de Dirac d'un fermion du genre temps et d'un fermion du genre espace de même masse réelle m s'écrivent respectivement

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m/\hbar \psi \tag{39}$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = i\ m/\hbar \tag{40}$$

$$,\ (\mu, \nu = 0, 1)$$

avec

$$\psi = \psi(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix},\ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}((\tau, \xi) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_0 \\ \tilde{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

$$(\tau > 0\ ,\ \xi > 0) \qquad , \qquad (\tau > 0\ ,\ \xi < 0)$$

Ce calcul montre que les matrices γ^μ ont comme valeurs

$$\begin{cases} \gamma^0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \gamma^0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{41}$$

et vérifient la relation

$$\gamma_\lambda \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\lambda = 2 g_{\lambda\nu}[1]\ ,\ (\lambda, \nu = 0, 1) \tag{42}$$

où $g_{00} = g_{11} = 0$, $g_{01} = g_{10} = 1$ et que nous avons bien avec les valeurs (41) les deux relations

$$\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0 = 2[1]\ ,\ (\gamma^0)^2 = (\gamma^1)^2 = [0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Nous montrons ensuite que l'on peut définir un système de coordonnées curvilignes à quatre dimensions (ξ^μ) $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ pour le cône de lumière [8,18,19] et que la métrique peut s'écrire

$$ds^2 = d\xi^0(2g_{oi}d\xi^i) = d\tau(2g_{oi}d\xi^i)\ ,\ (\xi^0 = \tau\ ,\ i = 1, 2, 3) \tag{44}$$

Cette métrique sera du genre temps pour

$$d\xi^0 > 0\ ,\ d\xi^i > 0\ ,\ g_{oi} > 0 \tag{45}$$

et du genre espace pour

$$d\xi^0 > 0\ ,\ d\xi^i < 0\ ,\ g_{oi} < 0 \tag{46}$$

les g_{oi} étant tels que

$$g_{oi} = g_{oi}(\xi^\mu)\ ,\ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{47}$$

Dans ces conditions l'équation du premier ordre d'un fermion du genre temps s'écrira

$$P\psi = \gamma^\mu \nabla_\mu \psi = m/\hbar\psi\ ,\ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{48}$$

P étant l'opérateur de Dirac $P = \gamma^\mu \nabla_\mu$ et l'équation du premier ordre d'un fermion du genre espace

$$P\tilde{\psi} = \gamma^\mu \nabla_\mu \tilde{\psi} = im/\hbar\ ,\ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{49}$$

avec $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\xi^\mu)$ et pour respectivement ψ et $\tilde{\psi}$

$$\psi = \psi(\xi^\mu) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}\ ,\ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\xi^\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_0 \\ \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\psi}_3 \end{pmatrix} \tag{50}$$

dans la métrique

$$ds^2 = d\xi^0(2g_{oi}d\xi^i) = d\tau(2g_{oi}d\xi^i)\ ,\ (i = 1, 2, 3)$$

avec pour les ξ^μ et les g_{oi} les conditions respectives (45) et (46).

Le calcul montre [8,19] que les matrices γ^μ, généralisation des matrices à deux dimensions ont les valeurs suivantes

$$\gamma^0 = \sqrt{2}A \ , \ \gamma^2 = \sqrt{2}g_{02}B \quad , \quad \gamma^1 = g_{01}\sqrt{2}B \ , \ \gamma^3 = \sqrt{2}g_{03}B \tag{51}$$

en posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

Les matrices γ^μ vérifient les conditions

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g_{\mu\nu}[1] \ , \ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{53}$$

ou

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 2g_{oi}[1] \ , \ (i = 1, 2, 3) \tag{54}$$

(54) est vérifiée aussi bien pour $g_{oi} > 0$ que pour $g_{oi} < 0$, puisque dans ce dernier cas, le premier membre est également négatif avec en outre

$$[\gamma^0]^2 = 0 \quad , \quad [\gamma^i]^2 = 0 \tag{55}$$

2. Modèle de photon [8,12,22]

Dans le système de coordonnées du cône de lumière à deux dimensions (τ, ξ), les équations du premier ordre d'un fermion du genre temps et d'un fermion du genre espace de même masse réelle m s'écrivent respectivement

$$\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m/\hbar\psi \tag{56}$$

$$\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} = im/\hbar\tilde{\psi} \ , \ (\mu = 0, 1) \tag{57}$$

et dans le système de coordonnées curvilignes $\xi^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$

$$P\psi = m/\hbar\psi \tag{58}$$

$$P\tilde{\psi} = im/\hbar\tilde{\psi} \tag{59}$$

P étant l'opérateur de Dirac

$$P = \gamma^\mu\nabla_\mu \ , \ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{60}$$

les matrices γ^μ ayant les valeurs précédemment trouvées, la métrique ayant la valeur

$$ds^2 = d\tau d\xi + d\xi d\tau \tag{61}$$

à deux dimensions et

$$ds^2 = d\xi^0(2g_{oi}d\xi^i) = d\tau(2g_{oi}d\xi^i)\ ,\ (\xi^0 = \tau; i = 1,2,3) \tag{62}$$

$$g_{oi} = g_{oi}(\xi^\mu)\ ,\ (\mu = 0, i) \quad (i = 1,2,3) \tag{63}$$

Soit maintenant une combinaison linéaire des équations (56) et (57) ou d'une manière générale de (58) et (59), la plus simple étant [8,12]

$$\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} = 0\ ,\ (\mu = 0,1) \tag{64}$$

et

$$P\psi + iP\tilde{\psi} = 0\ ,\ P = \gamma^\mu\nabla_\mu\ ,\ (\mu = 0,1,2,3) \tag{65}$$

On cherche une solution commune de (64) ou d'une manière générale de (65), le résultat étant [8,12] l'équation

$$\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0\ ,\ (\mu = 0,1) \tag{66}$$

ou d'une manière générale

$$P\Psi = 0 \tag{67}$$

avec maintenant pour l'opérateur de Dirac la valeur

$$P = \Gamma^\mu\nabla_\mu\ ,\ (\mu = 0,1,2,3) \tag{68}$$

Γ^μ ayant dans tous les cas les valeurs

$$\Gamma^\mu = 2\gamma^\mu\ ,\ (\mu = 0,1 \quad \text{ou} \quad \mu = 0,1,2,3) \tag{69}$$

Dans un deuxième temps, on démontre que les équations (66) et (67) de solutions Ψ, sont celles d'une particule de masse nulle et d'hélicité

$$|\ \vec{p}\lambda >\ ,\ \lambda = \pm 1 \tag{70}$$

Nous utilisons ensuite l'algèbre des formes extérieures ; en effet la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer [20] généralisée par A. Lichnerowicz [21] est la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1, utilisant la correspondance existant entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2. Dans cette théorie, on fait correspondre à l'opérateur P de Dirac, l'opérateur

$$(d + \delta) \tag{71}$$

sur les formes.

L'application de cette théorie [8,22] montre que l'on peut identifier dans

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Ψ_0 et Ψ_1 aux composantes du tenseur-champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1)$ et d'une manière générale identifier $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ dans

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \tag{73}$$

aux composantes de $F^{\mu\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$.

Dans ces conditions, la particule d'équation (66) ou d'une manière générale d'équation (67) peut être identifiée à un photon, dont la structure serait celle d'un fermion bradyonique associé à un fermion tachyonique.

L'utilisation d'un tel modèle de photon a donné des résultats particulièrement intéressants dans la théorie des ondes évanescentes [23,24,22].

3. Théorie quantique des champs de fermions du genre espace [8,18,19,25]

Par superquantification les équations

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m/\hbar\psi \ , \ (\mu = 0, 1) \ , \ \psi = \psi(\tau, \xi) \tag{74}$$

et

$$\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = im/\hbar\psi \ , \ (\mu = 0, 1) \ , \ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{\tau}, \tilde{\xi}) \quad \text{où} \quad \tilde{\tau} > 0 \ , \ \tilde{\xi} < 0 \tag{75}$$

représentent respectivement les équations du champ des fermions du genre temps et celles du champ des fermions du genre espace dans le système (τ, ξ).

Plus généralement les équations seront

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi = m/\hbar \psi \ , \ (\mu = 0,1,2,3) \\ \psi = \psi(\xi^\mu) \quad \text{où} \quad \xi^0 > 0 \ , \ \xi^i > 0 \ , \ (i = 1,2,3) \end{aligned} \tag{76}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \nabla_\mu \tilde{\psi} = im/\hbar \tilde{\psi} \ , \ (\mu = 0,1,2,3) \\ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{\xi}^\mu) \quad \text{où} \quad \tilde{\xi} > 0 \ , \ \xi^i < 0 \end{aligned} \tag{77}$$

dans le système de coordonnées curvilignes (ξ^μ) avec

$$ds^2 = d\xi^0 (2g_{oi} d\xi^i) = d\tau (2g_{oi} d\xi^i) \ , \ (i = 1,2,3) \ , \ \xi^0 = \tau \tag{78}$$

avec $g_{oi} > 0$ pour (76) et $g_{oi} < 0$ pour (77).

Si deux fermions du même genre, par exemple deux fermions du genre temps sont indiscernables [8,25], il n'en est plus de même pour deux fermions de genre différent : un fermion du genre temps et un fermion du genre espace sont discernables. Dans ces conditions, on démontre [8,25] que les équations (74) et (75) et plus généralement (76) et (77) sont conjuguées, ce qui entraîne les relations

$$\tilde{b}^+ = b \quad , \quad \tilde{b} = b^+ \tag{78}$$

entre les opérateurs de création et d'annihilation respectifs des fermions du genre temps et du genre espace $b^+, b, \tilde{b}^+, \tilde{b}$, dans le cas où on envisage un seul état de conjugaison des champs. Par exemple

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ b^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

En partant de l'état vide $[8, 25]$

$$\mid 0 >$$

et en appliquant n fois $b^+\tilde{b}^+$ nous redéfinissons l'opérateur de création a^+ d'une particule unique équivalente à une paire de fermions conjugués. De même en partant de l'état d'occupation

$$\mid n >$$

et en appliquant n fois $b\tilde{b}$ nous redéfinissons l'opérateur d'annihilation de cette même particule que l'on peut identifier à un photon, les champs de photons obéissant à la statistique de Bose-Einstein, alors que les champs de fermions du genre temps et du genre espace obéissent séparément à celle de Fermi. On a donc identifié le champ des photons au champ des fermions conjugués.

Nous avons généralisé dans l'espace de Hilbert à n états de conjugaison [8,25] en considérant $[b_i, b_j^+]$ et $[\tilde{b_i}, \tilde{b_j^+}]$ où $i = i_1, i_2 \dots i_n$, $j = j_1, j_2 \dots j_n$.

Une conséquence intéressante est la possibilité de redéfinir le concept d'antiparticule du genre temps en réinterprétant les transformations CPT. En effet on démontre que dans le système de coordonnées du cône de lumière (τ, ξ) ou $(\xi^\mu)(\mu = 0, 1, 2, 3)$, l'équation adjointe de

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m/\hbar\psi \ , \ (\mu = 0, 1)$$

ou de

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = m/\hbar\psi \ , \ (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

représentant le champ des positrons e^+ par exemple, est aussi l'équation du champ des électrons tachyoniques e^- et réciproquement. La démonstration [8,18] repose d'une part sur les relations

$$\tilde{\psi} = \mid \tilde{>} = \psi^+ \quad , \quad \tilde{\psi}^+ = < \tilde{\mid} = \psi \tag{80}$$

et d'autre part sur une réinterprétation de l'opérateur de conjugaison de charges C. Donc d'après cete équivalence de l'équation adjointe sous-lumineuse et de l'équation du premier ordre superlumineuse, un observateur associé au système de coordonnées (τ, ξ) ou ξ^μ pourra suivant le signe de τ et ξ (où $\tau = \xi^0$ et ξ^i) observer la particule soit comme un positron sous-lumineux, soit comme un négaton superlumineux : tout se passe comme si le négaton superlumineux avait franchi brusquement le "mur de la lumière" en inversant sa charge, en devenant un positron sous-lumineux. Il est ainsi possible par exemple de réinterpréter la création-annihilation de paires e^+/e^- sans faire appel pour interpréter le positron à une transformation antichrone (Feynman) ce qui présente un intérêt sur le plan de la microcausalité. On peut suivant cette interprétation expliquer de manière différente les graphes de Feynman [8,18].

Mais s'il en est ainsi pour un observateur associé aux coordonnées (ξ^μ), il en est tout autrement pour l'observateur naturel sous-lumineux

ORF : pour lui les transformations CPT correspondent à une transformation antichrone avec inversion d'espace

$$x'_\mu \to -x_\mu \ , \ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{81}$$

et

$$p'_\mu \to -p_\mu$$

Ne pouvant observer la région du genre espace, il en déduira que l'observateur associé aux coordonnées (ξ^μ) ne peut également observer que la région du genre temps et qu'à (81) correspond également une transformation type IMF-ORF antichrone c'est-à-dire telle que

$$\tau < 0 \ , \ \xi < 0 \quad \text{ou} \quad \tau = \xi^0 < 0 \ , \ \xi^i < 0 \ , \ (i = 1, 2, 3)$$

où

$$ds^2 = d\tau d\xi + d\xi d\tau > 0$$

ou

$$ds^2 = d\xi^0 = d\xi^0(2g_{oi}d\xi^i) = d\tau(2g_{oi}d\xi^i) > 0 \ , \ (i = 1, 2, 3)$$

avec $g_{oi} > 0$.

Par contre l'observateur associé au système de coordonnées (ξ^μ) interprètera le positron, comme un négaton tachyonique ayant subi une transition d'une métrique genre espace $(\tau > 0 \ , \ \xi^i < 0)$ à une métrique du genre temps $(\tau > 0 \ , \ \xi^i > 0)$ avec inversion du signe de la charge en étant devenu sous-lumineux

$$\begin{cases} \tilde{\tau} > 0 \to \tau > 0 \ , \ \tilde{\pi}^0 > 0 \to \pi^0 > 0 \\ \tilde{\xi^i} < 0 \to \xi^i > 0 \ , \ \tilde{\pi}^i < 0 \to \pi^i > 0 \\ \quad \tilde{e}^- \to e^+ \end{cases} \tag{82}$$

4. Monopôles magnétiques [7,19]

Nous avons pu vérifier dans le système de coordonnées du cône de lumière qui est très particulier certaines idées de G. Lochak dont les travaux sur les monopôles magnétiques sont fondamentaux [7]. Or dans le système de coordonnées du cône de lumière à deux dimensions (τ, ξ) ou à quatre dimensions (ξ^μ), les équations d'un monopôle magnétique s'écrivent respectivement

$$\gamma^\mu(\partial_\mu - g/\hbar\gamma^5 b_\mu)\psi = 0 \ , \ (\mu = 0, 1 \ , \ c = 1) \tag{83}$$

$$\gamma^\mu(\nabla_\mu - g/\hbar\gamma^5 b_\mu)\psi = 0\ ,\ (\mu = 0,1,2,3\ ,\ c = 1) \tag{84}$$

En tenant compte de la métrique du cône de lumière, on est amené à définir γ^5 par

$$\gamma^5 = 1/2(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0) \tag{85}$$

et de manière générale par

$$\gamma^5 = \sum_i 1/2\gamma^0\gamma^i\ ,\ (i = 1,2,3) \tag{86}$$

En utilisant les valeurs des matrices γ^μ trouvées précédemment on trouve

$$\gamma^5 = \Gamma = (1) \tag{87}$$

La notion de jauge chirale disparaît [19], cette dernière se confondant avec la jauge habituelle. Il en résulte qu'il est possible d'écrire l'équation du premier ordre d'un monopôle magnétique doué d'une masse, cette équation pouvant être du genre temps ou du genre espace. Dans le système de coordonnées (ξ^μ), trois types de monopôles sont possibles. D'autre part des considérations relatives aux vecteurs axiaux et polaires montrent [19] qu'un monopôle magnétique d'une région serait observé comme monopôle électrique dans l'autre région et réciproquement.

Références

[1] J. Terletsky, J. de Phys. et Rad. **21** p. 49 (1960).
[2] O.M.P. Bilaniok, V.K. Deshpande and E.C.G. Sudarshan, American Journal of Physics, **30**, 718 (1962).
[3] G. Feinberg, Physical Review, **159**, 1089 (1967).
[4] E.C. Zeeman, Journ. of Math. Phys., **5**, 490 (1964).
[5] J. Steyaert, Ann. Fond. Louis de Broglie, **12**, 4 (1987), 479-486.
[6] E. Recami, Classical tachyons and possible applications. La Rivista del Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica (1986). Editrice Compositori, Bologna.
[7] G. Lochak, Int. J. Theo. Phys. **24**, 1019-1050 (1985).
[8] R. Dutheil, *Théorie de la Relativité et Mécanique quantique dans la région du genre espace*, Editions Derouaux, B4000 Liège.
[9] J. Kogut and L. Sussfind, Physics Reports, Phys. Lett. C, **8**, 75, (1973).
[10] R. Dutheil and A. Rachman, Lett. Nuovo Cimento, **8**, 611, (1973).
[11] R. Dutheil and A. Rachman, Lett. Nuovo Cimento, **8**, 893, (1973).
[12] R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège 53 (3-4) p. 129-142 (1984).
[13] R. Gilmore, *Lie Groupe, Lie Algebra and some their applications* (Wiley, New-York)(1974).

[14] R. Dutheil et A. Rachman, *Sur la théorie de la Relativité Restreinte dans la région du genre espace*, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège, **47**, (5-8), p. 161-191 (1978).
[15] R. Dutheil et A. Rachman, Sém. Inst. Henri Poincaré, Paris, 6 juin 1978.
[16] O. Costa de Beauregard, Précis de Relativité restreinte, p. 27-28, Monographies Dunod, Paris (1964).
[17] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie.*
[18] R. Dutheil et G. Nibart, Bull. Soc. Roy. Sciences, Liège **55**, 2 (1986).
[19] R. Dutheil and J. Steyaert, Comm. Congrès International de Relativité Générale, 8 Septembre 1989, World Scientific, 1990.
[20] G. Petiau, Académie Roy. Belge, Cl. Sc. Math., Mémoires, 2ème série, t. 16, n°2, 118 pages (Thèse Sc. Math. Paris, 1936).
[21] A. Lichnerowicz, Bull. Soc. Math. France **22**, pp. 11 à 100 (1964).
[22] R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège **54** (4-5) pp. 235-270 (1985).
[23] R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège **53** (5) p. 293-316 (1984).
[24] R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège **53** (6) p. 363-375 (1984).
[25] R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège **54** (2), p. 78-86 (1985).

(Manuscrit reçu le 23 mars 1990)