# Sur le rôle de la relativité en mécanique ondulatoire

R. Dutheil et G. Lochak

Université de Poitiers, Faculté de Médecine, Département de Physique,
34 rue du Jardin des Plantes, 89034 POITIERS
CNRS et Fondation Louis de Broglie, 23 Quai de Conti, F-75006 PARIS

RESUME. Nous voulons montrer que la relativité est une base indispensable de la mécanique ondulatoire, ainsi que Louis de Broglie l'a toujours souligné. Pour cela, nous démontrons une sorte de réciproque de ses célèbres raisonnements. Au lieu de partir comme lui de la relativité, nous partons de la mécanique classique et de la théorie des ondes, puis nous définissons le dualisme onde-corpuscule par certaines conditions générales. Nous montrons alors que les lois de la relativité peuvent se déduire de ces hypothèses. Un point important est que le fameux résultat de de Broglie sur la vitesse de groupe n'est pas un lien suffisant entre les ondes et les corpuscules : le problème clé est celui de la vitesse de phase sur laquelle il avait lui-même souvent insisté.

*ABSTRACT. The purpose of the present paper is to show that relativity is an essential basis for wave mechanics as de Broglie always underlined it. In order to do that, we demonstrate a kind of reciproque of the famous de Broglie demonstration. Instead of starting from relativity as he did, we start from classical mechanics and from wave theory, but with a definition of wave-particle dualism based on general conditions. Then we show that the laws of relativity can be deduced from these hypothese. An important point is that de Broglie's theorem on group velocity is not a sufficient connection between waves and particles : the key problem is the one of phase velocity, a point which was often emphasized by de Broglie himself.*

On sait que Louis de Broglie, dès ses premiers travaux [1], a considéré la relativité comme la clé de voûte de la mécanique ondulatoire. Mais peu de temps après, Schrödinger, dans l'un de ses célèbres mémoires [2], a retrouvé plusieurs formules de la mécanique ondulatoire (en particulier la longueur d'onde et la vitesse de groupe) en ne faisant intervenir que la mécanique classique. Il se déclarait même très satisfait de ce que l'expression de la vitesse de groupe puisse s'obtenir sans la relativité, contrairement à ce qui ressortait de la thèse de Louis de Broglie.

Il est curieux de constater qu'à sa suite, de Broglie lui-même a introduit, dans plusieurs exposés, les formules de la mécanique ondulatoire à partir de la mécanique classique [3], [4], [5]. Mais il ne s'agissait chez lui que d'un procédé heuristique qui lui permettait de raccourcir certaines introductions, mais il basait sur la relativité l'essentiel de ses travaux. Il n'en demeure pas moins qu'il s'est créé chez les théoriciens l'idée que la relativité n'a joué qu'un rôle historique dans l'élaboration de la mécanique ondulatoire, sorte de luxe initial qui n'aurait pas d'importance véritable pour ses fondements. C'est, en particulier, le cas de presque tous les travaux sur l'interprétation causale (voir par exemple [6], [7], [8]). Seul de Broglie s'est toujours appuyé, dans ce type de travaux, sur les équations relativistes de Klein-Gordon et de Dirac, ne citant l'équation de Schrödinger que comme une approximation, sinon dans la théorie des systèmes de corpuscules.

Pour ces raisons, nous nous sommes demandé à quel stade de la théorie, la relativité s'avère indispensable et jusqu'où il est possible d'aller sans l'utiliser. Nous verrons qu'elle est effectivement nécessaire, mais pour une raison qui ne nous semble pas avoir été mise en évidence jusqu'ici.

## 1. La mécanique ondulatoire à partir de la mécanique classique

Nous commencerons par supposer que nous ne connaissons pas la relativité. Cela nous interdit, par conséquent, le raisonnement initial de Louis de Broglie que nous rappelons brièvement. Utilisant d'emblée la relativité, il construisait un quadrivecteur de phase et le rapprochait du quadrivecteur impulsion-énergie du corpuscule en appliquant la loi de Planck :

$$E = h\nu \tag{1.1}$$

pour identifier les composantes temporelles $v/c$ et $E/c$ des deux quadrivecteurs. Il s'ensuivait l'identité entre les composantes d'espace $1/\lambda$ et $p$, d'où la fameuse formule de la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{1.2}$$

Grâce à l'identification des deux quadrivecteurs, de Broglie en *déduisait* l'identité des deux principes de Maupertuis et de Fermat.

Comme nous voulons, pour l'instant, ignorer la relativité, nous ne connaissons pas encore des deux quadrivecteurs et nous ferons donc autrement : nous partirons de l'identification *a priori*, déjà effectuée par Hamilton [9], des principes de Maupertuis et de Fermat.

Nous postulerons donc l'identité entre les deux formules extrêmales :

$$\delta \int_{?}^{0} mvds = \delta \int_{?}^{0} \frac{ds}{\lambda} = 0 \tag{1.3}$$

Mais, contrairement à Hamilton, nous ne regarderons pas les descriptions corpusculaire et ondulatoire comme alternatives. En accord avec le point de vue de de Broglie, nous supposerons une association, dans un même objet physique, entre l'onde et le corpuscule. Il sera, en outre, entendu par la suite que nous nous placerons dans le vide et en l'absence de champ extérieur.

L'intégrale de gauche dans (1.3) est prise le long de la trajectoire du corpuscule et celle de droite le long d'un rayon de l'onde associée : nous postulerons avec de Broglie que ces deux courbes coïncident. *Pour que cette identité ait lieu pour n'importe quel mouvement, il faut que les deux intégrants soient identiques à une constante universelle près, ce qui entraîne aussitôt la formule de de Broglie* (1.2).

En disant cela, nous supposons implicitement que notre constante de proportionnalité est identique à la constante de Planck, mais nous ne faisons ainsi qu'anticiper sur les résultats expérimentaux qui le prouvent, ce qui n'entame donc pas la logique de notre raisonnement.

Introduisons maintenant la vitesse de phase $V$ par la formule :

$$\lambda = \frac{V}{\nu} \tag{1.4}$$

En identifiant (1.2) et (1.4), nous aurons :

$$V = \frac{h\nu}{mv} \tag{1.5}$$

Comme le mouvement est inertiel, l'énergie du corpuscule est entièrement cinétique et, en vertu de la loi de Planck, nous avons :

$$E = h\nu = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.6}$$

En introduisant (1.6) dans (1.5), on obtient une relation entre la vitesse de phase $V$ de l'onde et la vitesse $v$ du corpuscule :

$$V = \frac{v}{2} \tag{1.7}$$

Curieusement, cette relation triviale n'est jamais écrite, or on voit qu'elle est très différente de la relation connue de de Broglie :

$$V = \frac{c^2}{v} \tag{1.8}$$

C'est un point capital sur lequel nous reviendrons. Néanmoins, la relation (1.7) montre une dispersion des ondes de phase puisque d'après (1.6), $v$ devient fonction de la fréquence et par suite $V$ également. Nous allons donc chercher la vitesse de groupe $U$ de ces ondes par la formule classique de Rayleigh :

$$\frac{1}{U} = \frac{d}{dv}[\frac{1}{\lambda}] = \frac{d}{d\nu}[\frac{\nu}{V}] \tag{1.9}$$

En introduisant dans (1.9) les formules (1.5) et (1.6), nous aurons :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h}\frac{d}{d\nu}(mv) = \frac{d}{vdv}(v) = \frac{1}{v} \tag{1.10}$$

Soit :

$$U = v \tag{1.11}$$

Autrement dit, nous retrouvons bien, à partir d'un calcul purement classique, que Schrödinger a effectué sous une forme différente, le résultat que de Broglie avait obtenu en utilisant la relativité, à savoir que la vitesse de groupe des ondes est égale à la vitesse du corpuscule.

Nous voyons donc qu'en restant dans le cadre de la mécanique classique et de la théorie des ondes et *en postulant la loi de Planck et l'identité des principes de Maupertuis et de Fermat*, on obtient :

a) La longueur d'onde de de Broglie (1.2).

b) Une relation (1.7) entre la vitesse de phase $V$ de l'onde et la vitesse $v$ du corpuscule.

c) La vitesse de groupe (1.11).

Mais pouvons-nous vérifier expérimentalement ces relations ? Tant que nous ne considérons que des corpuscules matériels (par exemple des électrons) de faible énergie, seule la formule (1.2) de la longueur d'onde pourra être vérifiée. En effet, nous ne pouvons pas vérifier la formule (1.11) de la vitesse de groupe car nous ne mesurons expérimentalement que la vitesse du corpuscule, ce qui ne prouve pas qu'elle est égale à la vitesse de groupe de l'onde. Mais ce qui reste surtout inaccessible, c'est l'énergie $E$, la vitesse de phase $V$ et la fréquence $\nu$.

Nous ne pouvons donc même pas prétendre vérifier la formule de Planck, puisque $E$ et $\nu$ pourraient être faux tous les deux ; de même, nous ne pouvons pas vérifier l'égalité (1.6), puisque $v$ est mesuré mais non pas $E$ et $\nu$ ; et surtout, nous ne pouvons rien dire de la relation (1.7) entre la vitesse de phase $V$ et la vitesse du corpuscule $v$. Schrödinger était satisfait [2] de retrouver, comme nous l'avons fait, la même vitesse de groupe (1.11) que de Broglie mais cela ne prouve rien quant à la vitesse de phase $V$ elle-même. Notons encore qu'en mesurant $\lambda$, la formule (1.4) ne nous donne que le rapport $V/\nu$ : il faut donc que nous accédions au moins à l'une de ces deux grandeurs.

Malheureusement, ni $V$ ni $\nu$ ne sont directement accessibles à l'expérience pour un corpuscule matériel, mais c'est ici que nous devons nous souvenir de l'une des idées fondamentales de Louis de Broglie qui était à l'origine de ses travaux : la mécanique ondulatoire doit être une théorie unique de la matière et de la lumière. Ses travaux sont même partis d'une théorie mécanique du photon et non pas d'une mécanique ondulatoire de la matière [1] . Or, pouvons-nous appliquer à la lumière les formules que nous avons obtenues jusqu'ici ? C'est une question à laquelle nous pouvons répondre car, pour la lumière, contrairement à ce qui se passe pour les corpuscules matériels, on atteint aussi bien la vitesse de phase que la vitesse de groupe (et même la fréquence). Or ces vitesses sont égales dans le vide, ce qui invalide la formule (1.7). Du reste, si (1.7) était vraie, on l'aurait vu dès le XVIII-ième siècle parce que le résultat de Römer eût été double de celui de Bradley. En effet, le retard d'occultation des satellites de Jupiter fournit la vitesse de groupe, tandis que l'aberration astronomique donne la vitesse de phase [10],[11]

[1] Cela signifie que, pour de Broglie, le photon est une particule comme les autres. Sa masse n'est donc pas nulle mais seulement très petite. N'oublions pas que la nullité de la masse du photon n'est pas un fait physique mais une conséquence *théorique* du principe d'invariance de jauge. L'expérience ne peut pas prouver qu'une masse est nulle, elle peut seulement prouver qu'elle est inférieure à une certaine borne, ce qui est le cas pour le photon

; comme on ignorait ces notions à l'époque, le résultat eût paru très énigmatique. [2]

## 2. Une condition minimale pour trouver la vitesse de phase de de Broglie

On sait que de Broglie a trouvé la relation (1.8) en utilisant l'appareil de la relativité restreinte, mais nous allons voir qu'il suffit, en réalité, d'ajouter aux deux postulats que nous avions introduits jusqu'ici (la loi de Planck et l'identité des deux principes extrêmaux) la seule loi d'équivalence entre la masse et l'énergie :

$$E = mc^2 \tag{2.1}$$

Nous savons que l'on considère habituellement que cette loi implique déjà derrière elle toute la relativité, mais ce n'est pas tout à fait exact. En effet, s'il est vrai que la première démonstration d'Einstein [13] utilisait explicitement la dynamique relativiste, il n'en est plus de même d'une démonstration plus tardive [14] dans laquelle la relativité ne figure plus et qui fait uniquement appel à : 1) la loi classique de conservation de l'impulsion, 2) l'expression de la pression de radiation de Maxwell, 3) la formule d'aberration de Bradley.

La seconde démonstration grâce à laquelle Einstein retrouve la formule (2.1) est la même que la première, mais écrite pour les faibles vitesses, si bien qu'elle ne fait appel qu'au principe de relativité sous sa forme élémentaire galiléenne. La première démonstration prouve que cette formule est covariante relativiste, puisque celle-ci prend la même forme en utilisant le groupe de Lorentz. En revanche, les deux démonstrations supposent que la vitesse $c$ de la lumière dans le vide est une *constante universelle* qui ne dépend donc pas du référentiel.

Nous allons donc remplacer maintenant, dans l'équation (1.6), l'expression classique de l'énergie cinétique par la relation (2.1), autrement dit nous aurons :

$$E = h\nu = mc^2 \tag{2.2}$$

[2] Rappelons que toutes les méthodes qui reposent sur la mesure de la vitesse d'un *signal* lumineux fournissent la vitesse de groupe (roue dentée de Fizeau ou cellule de Kerr, miroir tournant de Foucault, interféromètre de Michelson). Outre l'aberration astronomique, la vitesse de phase figure dans l'indice de réfraction et dans le rapport des unités électriques et magnétiques [12] ; on la mesure également dans les cavités résonantes [10].

Il suffit d'introduire cette relation dans (1.5) pour trouver la formule de de Broglie :

$$Vv = c^2 \tag{2.3}$$

Nous savons que, partant de cette formule, de Broglie s'est mis en accord avec les lois de l'optique dans le vide en supposant seulement que la masse du photon est suffisamment petite. Nous pouvons donc espérer en faire autant, mais nous ne pouvons pas encore l'affirmer, puisque nous ne savons pas encore si la vitesse de groupe est bien égale à la vitesse $v$ du corpuscule. Or ceci nous créera maintenant des difficultés car nous ne pouvons plus calculer la vitesse de groupe comme nous l'avons fait précédemment.

En effet, lorsque nous sommes passés de la formule (1.9) à la formule (1.11), nous avons utilisé (1.6) qui est faux maintenant et doit être remplacé par (2.2) : d'après cette dernière formule, la masse n'est plus constante et varie avec la fréquence, mais nous ne savons plus comment intervient la vitesse du corpuscule, puisqu'elle ne figure pas dans la formule. Reprenons donc (1.9) en y introduisant (2.3) ; nous aurons :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{d\nu}(\nu v) \tag{2.4}$$

et il s'ensuit, grâce à (2.2) :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dE}(Ev) = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dm}(mv) = \frac{1}{c^2}(m\frac{dv}{dm} + v) \tag{2.5}$$

Si nous connaissions l'expression relativiste de la masse en fonction de la vitesse, nous déduirions aussitôt de (2.5) l'égalité (1.11) entre la vitesse de groupe et la vitesse du corpuscule. Mais, comme nous voulons aller aussi loin que possible avec la mécanique classique, nous préférons, en accord avec l'esprit de de Broglie, poser comme postulat fondamental du dualisme des ondes et des corpuscules que *la vitesse de groupe de l'onde doit être égale à la vitesse de la particule.* L'égalité (2.5) deviendra alors une équation différentielle en $v$ :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c^2}(m\frac{dv}{dm} + v) \tag{2.6}$$

Cette équation s'intègre immédiatement et nous ne sommes pas surpris de trouver pour expression de $m$ :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.7}$$

où $m_0$ est une constante d'intégration. Ce résultat est simplement la réciproque de celui de de Broglie. Nous avons donc retrouvé l'expression relativiste de la masse et, par là-même, l'expression correspondante de l'impulsion et, d'après (2.2), celles de l'énergie et de la fréquence d'une onde :

$$mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} \tag{2.8}$$

Il s'ensuit également que nous obtenons la forme relativiste de l'équivalence (2.1) entre la masse et l'énergie. Nous devons toutefois insister sur le fait que ces formules n'apparaissent pas ici comme une conséquence de la relativité, dont nous n'avons toujours pas introduit le formalisme, mais se déduisent des quatre postulats que nous avons utilisés :

1) L'identité des deux principes de Maupertuis et de Fermat,
2) La loi de Planck.
3) L'équivalence d'Einstein entre la masse et l'énergie, que nous posons comme postulat, mais qui se déduit des lois de la mécanique classique et de l'électromagnétisme.
4) L'égalité entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse du corpuscule.

Evidemment, ces quatre postulats sont également importants, mais nous voudrions insister sur le *troisième* qui est responsable de la relation correcte entre la vitesse de phase et la vitesse du corpuscule et sur le *quatrième* qui aboutit aux formules relativistes.

Ce n'est que maintenant que nous pouvons affirmer que nous avons bien retrouvé les résultats de de Broglie qui s'appliquent à la fois à la matière et à la lumière et nous pouvons affirmer également que de Broglie avait raison de soutenir que la relativité était nécessaire à ses résultats, puisque, si on ne l'utilise pas d'emblée comme il l'avait fait lui-même, elle se déduit comme conséquence des postulats de base du dualisme onde-corpuscule.

Mais pouvons-nous affirmer que nous avons retrouvé la relativité ? Pas encore puisque nous n'en avons pas la cinématique, mais il est facile de la déduire de ce que nous possédons déjà. Désignons pour cela par $R_0$ le référentiel dans lequel le corpuscule reste immobile et par $R$ un référentiel animé d'une vitesse $v$ par rapport au premier. L'espace et le temps seront désignés par $(x_0, t_0)$ dans $R_0$ et par $(x, t)$ dans $R$.

Considérons une onde stationnaire dans $R_0$ :

$$\Psi = \exp 2i\pi\nu_0 t_0 \tag{2.9}$$

Dans $R$ elle deviendra une onde progressive de vitesse de phase $V$ et de fréquence $v$ et prendra l'expression :

$$\Psi = \exp 2i\pi\nu[t - \frac{X}{V}] \tag{2.10}$$

Dans cette formule nous connaissons $\nu$ qui est donné par (2.8) et $V$ qui ne peut être que la vitesse de phase donnée par (2.3). Soulignons toutefois que nous n'avons pas fait appel, pour cela, à la théorie de la relativité. Mais grâce à (2.3) et à (2.8), la formule (2.10) va maintenant s'écrire :

$$\Psi = \exp 2i\pi\nu_0[\frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.11}$$

Cette onde reste identique à (2.10) d'où la transformation de Lorentz pour le temps :

$$t_0 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.12}$$

Quant à l'espace, il suffira de prendre un signal lumineux qui parcourt l'intervalle $(0, x_0)$ dans $R_0$ et l'intervalle $(0, x)$ correspondant dans $R$. La vitesse de la lumière ayant déjà été supposée la même dans les deux référentiels, le temps de parcours sera égal à :

$$t_0 = \frac{x_0}{c} \quad \text{dans} \quad R_0 \quad \text{et} \quad t = \frac{x}{c} \quad \text{dans} \quad R \tag{2.13}$$

En portant (2.12) dans (2.13), on trouve :

$$x_0 = ct_0 = \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.14}$$

et nous avons bien la loi de transformation de Lorentz pour l'espace.

Vue ainsi, la relativité apparaît comme la fille du dualisme onde-corpuscule. Mais en réalité, elle l'était déjà, puisqu'elle est née de la volonté d'Einstein d'accorder entre elles les lois d'invariance de la mécanique et de l'électromagnétisme. La différence est que nous ne sommes pas partis de l'électromagnétisme mais des lois générales de de Broglie sur le dualisme onde-corpuscule.

## 3. Une remarque au sujet du raisonnement de Schrödinger

Comme nous l'avons déjà dit, dans son second mémoire, Schrödinger retrouvait l'égalité (1.11) entre vitesse de groupe et vitesse du corpuscule, non pas à l'aide de la relativité comme l'avait fait de Broglie, mais à partir de la mécanique classique et donc à partir de (1.6), comme nous l'avons fait. Il en concluait ceci :

"*On voit qu'il s'agit là, au fond, d'un théorème beaucoup plus général qui ne découle pas nécessairement de la théorie de la relativité, mais qui est valable pour n'importe quel système conservatif de la mécanique classique.*" [2]

Nous avons déjà vu que ce que dit Schrödinger est exact pour ce qui est de la vitesse de groupe, mais que la mécanique classique se trompe sur la vitesse de phase. Il est intéressant de voir d'une façon plus générale quelles sont les lois dynamiques qui satisfont au théorème de de Broglie sur la vitesse de groupe.

Restant toujours dans le cas du mouvement inertiel, nous supposerons que l'énergie peut s'écrire sous la forme :

$$E = m(v)F(v) \tag{3.1}$$

où $v$ est la vitesse du corpuscule. La masse $m$ pourra donc être une fonction de $v$ et nous introduisons en outre un facteur $F(v)$. Notons qu'il y a lieu de distinguer les deux facteurs dans (3.1) parce que $m(v)$ apparaîtra seul dans l'impulsion et donc dans (1.2) et (1.3).

Nous postulerons à nouveau, comme nous l'avons déjà fait, l'égalité (1.11) autrement dit, la vitesse de groupe est supposée égale à la vitesse de la particule. Nous allons donc introduire (1.1), (1.11) et (3.1) dans (1.9), ce qui donne :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{U} = \frac{d}{dv}\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \frac{d(mv)}{d(h\nu)} = \frac{d(mv)}{d(mF)} \tag{3.2}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{d(mF)}{dv} = v\frac{d(mv)}{dv} \tag{3.3}$$

Soit encore :

$$(F - v^2)\frac{dm}{dv} = m\left(v - \frac{dF}{dv}\right) \tag{3.4}$$

Nous n'avons qu'une seule équation fonctionnelle pour les deux fonctions inconnues $m(v)$ et $F(v)$. A priori, la condition $U = v$ peut donc être satisfaite par une infinité de dynamiques, sous réserve de leur cohérence logique. Mais deux cas évidents sautent aux yeux :

1)

$$m = Cnte \Rightarrow \frac{dF}{dv} = v \Rightarrow F = \frac{1}{2}v^2 \tag{3.5}$$

Si on introduit ce résultat dans (3.1), on reconnaît immédiatement que ce cas est celui de la *mécanique classique*.

2)

$$F = Cnte = c^2 \Rightarrow (c^2 - v^2)\frac{dm}{dv} = mv \Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dm}{dv} = \frac{\frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.6}$$

L'intégration de la dernière équation est évidente et on trouve (2.7). C'est le cas de la *relativité*.

## 4. Une remarque au sujet d'un raisonnement de Hamilton

Il est connu que Hamilton, ayant défini les surfaces d'action constante,

$$S = Cnte \tag{4.1}$$

a remarqué que la longueur du vecteur

$$p = mv = \nabla S \tag{4.2}$$

varie à l'inverse de la vitesse $V$ (donc de la vitesse de phase) du front d'onde défini par (4.1). C'est pourquoi il a donné à ce vecteur le nom de *vecteur de lenteur normale du front* [9][15]. Cette remarque a conduit Hamilton à poser :

$$V = \frac{1}{v} \tag{4.3}$$

Cette relation est à la base de son analogie optico-mécanique, plus spécialement de l'analogie "optique corpusculaire"–"optique ondulatoire".

Bien entendu, il n'était pas question chez Hamilton du concept de vitesse de groupe qui était encore loin d'être connu. Mais surtout, nous allons voir que la relation (4.3) qui semble rappeler, à première vue, la relation de de Broglie (1.8), est en fait incompatible avec la loi de Planck et ne pouvait donc en aucun cas conduire à la mécanique ondulatoire.

En effet, pour tirer (4.3) d'un rapprochement entre les principes de Maupertuis et de Fermat, on est obligé de poser, respectivement dans (1.3) et (1.4) :

$$m = Cnte \quad \text{et} \quad \nu = Cnte \tag{4.4}$$

ce qui permet, en introduisant (1.4) dans (1.3) et, en éliminant les facteurs devenus superflus $m$ et $\nu$, d'écrire comme suit l'identité des principes extrêmaux :

$$\delta \int_?^? v \; ds = \delta \int_?^? \frac{1}{V} ds = 0 \tag{4.5}$$

Cette égalité, qui est du reste inhomogène, donne bien la relation (4.3) qui est inhomogène également. Mais on voit que les conditions (4.4) sont inadmissibles car :

a) En mécanique classique (celle de Hamilton) la seconde égalité (4.4) contredit la loi de Planck, puisqu'elle est contraire à l'égalité (1.6).

b) En mécanique relativiste, les égalités (4.4) contredisent à la fois la loi de Planck et l'équivalence de la masse et de l'énergie.

On voit donc qu'il est inexact de prétendre que le rapprochement entre les principes de Maupertuis et de Fermat conduise à la formule de de Broglie (1.8). En revanche, nous avons montré au début de cet article que ce même rapprochement, correctement formulé, conduit immédiatement à la formule de la longueur d'onde. Toutefois, comme on l'a vu, le vrai problème est celui de la vitesse de phase. C'est celui sur lequel Louis de Broglie a toujours insisté.

## Références


[1] L. de Broglie, *Thèse* de 1924.

[2] E. Schrödinger, *Ann. der Phys.* (4), **79**, 489, 1926 ; E. Schrödinger, *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*, Alcan, Paris, 1933.

[3] L. de Broglie, *Théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique*, Hermann, Paris, 1932.

[4] L. de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[5] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
[6] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 166 ; **85**, 180, 1952.
[7] A. Belinfante, *A survey of hidden variables theories*, Pergamon, Oxford, 1973.
[8] A. Barut, M. Bozic, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **15**, 67, 1990.
[9] W.R. Hamilton, *Mathematical papers*, Cambridge University Press, 1940.
[10] P. Drude, *Précis d'Optique* (refondu et complété par Marcel Boll), Gauthier-Villars, Paris, 1911.
[11] G. Bruhat, *Optique* (édition revue et complétée par A. Kastler), Masson, Paris, 1965.
[12] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 1964.
[13] A. Einstein, *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Coll. "Discours de la Méthode", Gauthier-Villars, Paris, 1972.
[14] A. Einstein, *Conceptions scientifiques*, Collection "Champs", Flammarion, 1990.
[15] V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, "Mir", Moscou, 1976.

*(Manuscrit reçu le )*