Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire

C. Daviau, G. Lochak

La Lande, Pouillé-les-coteaux, 44522 Mésanger
C.N.R.S. et Fondation Louis de Broglie
23 Quai de Conti, 75006 Paris

RESUME. Nous étudions un modèle d'équation d'onde relativiste non linéaire pour une particule chargée électriquement. Cette équation se réduit à l'équation de Dirac lorsque l'angle d'Yvon-Takabayasi est nul. Les grandeurs tensorielles sont les mêmes que celles de la théorie linéaire, mais avec une dynamique différente. Les invariances P, T et relativiste ont une forme identique à celle de la théorie linéaire. L'étude des ondes planes amène à une conjugaison de charge sans énergies négatives. La symétrie de conjugaison de charge est associée à l'arbitraire du choix de la signature de la métrique d'espace-temps. L'étude des solutions dans un potentiel central électrique semble indiquer que l'on doit obtenir des niveaux d'énergie très proches de ceux de la théorie linéaire. L'équation non linéaire admet des solutions particulières correspondant à la loi du guidage de Louis de Broglie. Elle est invariante de jauge électrique et de jauge chirale globale. Ces deux jauges font partie d'un groupe plus vaste ayant la structure algébrique du groupe de jauge de la théorie électrofaible.

ABSTRACT. We study a non linear relativistic wave equation for an electrically charged particle. This equation comes to Dirac equation when Yvon-Takabayasi angle cancels. Tensorial densities are the same as in the linear theory, but with a different dynamic. P, T and relativistic invariance have the same aspect as in the linear theory. The study of plane waves induces a charge conjugation without negative energies. Charge conjugation symmetry is associated to arbitrary choice of the signature of space-time metric. Study of solutions in a central electrical potential seems to show that we must have energy levels near those of the linear case. The non linear equation has particular solutions corresponding to the guiding law of Louis de Broglie. It is electric and magnetic gauge invariant. The two gauges are in a greater gauge group isomorphic to electroweak gauge group.

I - INTRODUCTION

Cet article s'inscrit dans la ligne des travaux destinés à trouver une équation d'onde relativiste non linéaire dans l'esprit des travaux de Louis de Broglie [1] et notamment sur son idée que les ondes physiques réelles ne sauraient être des ondes planes monochromatiques illimitées. Lorsqu'il a remis en question l'interprétation communément admise de la mécanique ondulatoire, Louis de Broglie a beaucoup réfléchi sur les équations non linéaires et sur ce qu'on a appelé, beaucoup plus tard, les "solitons". L'électrodynamique non linéaire de Born-Infeld l'avait convaincu qu'il était possible de trouver une telle équation non linéaire pour l'onde associée à la particule. Mais la recherche d'une équation non linéaire adéquate n'est pas chose aisée, car la classe des équations admettant des solutions de type solitons est infiniment vaste, et on ne connait pas actuellement de critères purement mathématiques opérants pour guider la recherche de l'équation attendue. Récemment l'un de nous (G. L. [2] [3] [4]) a proposé et étudié une classe d'équations non linéaires permettant de décrire des monopôles magnétiques de masse non nulle. Ses équations s'écrivent, en signature $+---$:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{ig}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu) + \frac{i}{2}m(\rho^2)\frac{c}{\hbar}(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)]\Psi = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

Ψ désigne un spineur de Dirac, les γ^μ sont les matrices de Dirac, Ω_1 et Ω_2 sont les deux invariants relativistes :

$$\Omega_1 = \overline{\Psi}\Psi \quad , \quad \Omega_2 = -i\overline{\Psi}\gamma_5\Psi \quad , \quad \overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0 \qquad (1\text{-}2)$$

g est la charge magnétique du monopôle et B_μ le potentiel de Cabibbo et Ferrari, qui n'est pas un vecteur, mais un pseudo-vecteur d'espace-temps, donc le dual d'un tenseur antisymétrique de rang 3. Cette équation est localement invariante dans la transformation de jauge chirale :

$$\Psi \to \exp(\frac{ig}{\hbar c}\gamma_5\varphi)\Psi \quad , \quad B_\mu \to B_\mu + \partial_\mu\varphi \qquad (1\text{-}3)$$

Il y a donc place, dans cette théorie, pour deux couplages électromagnétiques minimaux, le couplage de jauge locale magnétique, qui vient d'être décrit, et le couplage électrique correspondant à la phase classique :

$$\Psi \to \exp(\frac{ie}{\hbar c}\varphi')\Psi \quad , \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\varphi' \qquad (1\text{-}4)$$

où A_μ est le vecteur d'espace-temps potentiel électrique. Dans le couplage (1-3), l'angle qui varie est l'angle β d'Yvon-Takabayasi, défini par :

$$\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \quad , \quad \Omega_1 = \rho\cos\beta \quad , \quad \Omega_2 = \rho\sin\beta \tag{1-5}$$

On peut montrer (G.L. réf. citée) que le terme de masse de (1-1) est le terme de masse le plus général permettant d'obtenir l'invariance de jauge chirale. Mais comme (1-1) est également invariante de jauge électrique, le terme de masse de (1-1) peut a priori convenir non seulement pour un monopôle magnétique, mais aussi pour une particule électriquement chargée.

D'autre part l'un de nous (C. D. [5]) a décrit l'équivalence entre l'équation linéaire de Dirac, écrite en termes de spineurs Ψ et de matrices γ^μ, et l'équation d'Hestenes [6] [7], écrite en termes de multivecteurs ψ dans l'algèbre d'espace-temps. Nous utiliserons ici les résultats de [5], c'est à dire à la fois le calcul mutivectoriel d'Hestenes et le calcul matriciel qui en est une représentation. Lorsque Ω_1 ou Ω_2 n'est pas nul $\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \det\psi$ (où ψ est une matrice 4×4) est strictement positif, et alors ψ est un élément pair inversible de l'algèbre d'espace-temps. Il peut être écrit :

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R \quad , \quad \gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma_5 \tag{1-6}$$

où ρ est une densité de probabilité, β l'angle d'Yvon-Takabayasi et R une rotation de Lorentz, c'est à dire un élément pair de l'algèbre d'espace-temps tel que:

$$\tilde{R} = \gamma_0 R^\dagger \gamma_0 = R^{-1}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi} = \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}\tilde{R} \quad , \quad \psi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-\frac{\beta}{2}\gamma}\tilde{R} \\ &\psi\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\psi = \rho e^{\beta\gamma} = \Omega_1 + \Omega_2\gamma \end{aligned} \tag{1-7}$$

Nous utiliserons également les vecteurs e_j et le bivecteur σ de Boudet [8]:

$$e_j = R\gamma_j\tilde{R} \quad , \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad \sigma = e_1 e_2 = R\gamma_1\gamma_2\tilde{R} \tag{1-8}$$

Les vecteurs d'espace-temps e_j sont les transformés par la rotation de Lorentz R des vecteurs de la base orthonormée (γ_j). Donc (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée mobile de l'espace-temps :

$$\begin{array}{l} (e_0)^2 = 1 \quad , \quad (e_j)^2 = -1 \quad , \quad j = 1,2,3 \\ e_i \cdot e_j = 0 \quad , \quad i \neq j \end{array} \tag{1-9}$$

Hestenes interprète le vecteur $v = ce_0$ comme étant la vitesse d'espace-temps. De plus nous avons :

$$\psi\gamma_j\tilde{\psi} = \rho R\gamma_j\tilde{R} = \rho e_j \quad , \quad j = 0,1,2,3 \tag{1-10}$$

Nous avons en particulier :

$$v = ce_0 = \frac{c}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} \tag{1-11}$$

Avec $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$, l'équation d'Hestenes s'écrit :

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi = (m_0c\psi\gamma_0 + \frac{e}{c}A\psi)\gamma_1\gamma_2 \tag{1-12}$$

où $A = \gamma^\mu A_\mu$ est le vecteur d'espace-temps potentiel électrique. Nous avons expliqué de manière détaillée en [5] comment cette équation est équivalente à l'équation de Dirac linéaire:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu) + i\frac{m_0c}{\hbar}]\Psi = 0 \tag{1-13}$$

Si nous multiplions l'équation (1-12) par $\gamma_2\gamma_1\psi^{-1}$ à droite, nous obtenons l'équation invariante de Boudet :

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} = m_0c\psi\gamma_0\psi^{-1} + \frac{e}{c}A \tag{1-14}$$

Or l'impulsion d'une particule de charge e, de masse propre m_0, dans un champ électromagnétique de potentiel A, est :

$$p = m_0v + \frac{e}{c}A = m_0\frac{c}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} + \frac{e}{c}A \tag{1-15}$$

Le point de départ de la présente étude est que l'équation invariante (1-14) ne contient pas le terme d'impulsion classique p, mais un terme p' :

$$p' = m_0c\psi\gamma_0\psi^{-1} + \frac{e}{c}A = m_0\frac{c}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi}e^{-\beta\gamma} + \frac{e}{c}A = m_0ve^{-\beta\gamma} + \frac{e}{c}A \tag{1-16}$$

Ce terme est curieux et difficile à interpréter, aussi voulons-nous étudier un modèle qui se rapproche du cas classique en substituant à l'équation de Dirac l'équation non linéaire obtenue en remplaçant p' par le terme d'impulsion classique p, c'est à dire en remplaçant (1-14) par :

$$\hbar \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = m_0 c \frac{1}{\rho} \psi \gamma_0 \tilde{\psi} + \frac{e}{c} A \tag{1-17}$$

Nous obtiendrons une forme plus proche de celle d'Hestenes, en multipliant (1-17) à droite par $\psi \gamma_1 \gamma_2$, ce qui donne :

$$\hbar \partial\!\!\!/ \psi = (m_0 c \psi \gamma_0 \frac{1}{\rho} \tilde{\psi} \psi + \frac{e}{c} A \psi) \gamma_1 \gamma_2 \tag{1-18}$$

Cette équation ne diffère de celle de Dirac que par le terme de masse, qui contient en plus un facteur :

$$\frac{1}{\rho} \psi \tilde{\psi} = e^{\beta \gamma} = \cos \beta + \sin \beta \gamma = \frac{1}{\rho} (\Omega_1 + \Omega_2 \gamma) \tag{1-19}$$

La suite de cet article est consacré à l'étude de l'équation non linéaire (1-17)

II - EQUIVALENCE AVEC L'EQUATION DU MONOPOLE (1-1)

L'équation (1-18) nous a paru remarquable parce qu'elle ressemble à l'une des équations contenues dans (1-1). Pour établir ce lien, nous reprendrons la démonstration détaillée en [5]. Précisons tout d'abord nos notations. Nous utilisons les matrices de Dirac suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \qquad & I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_j &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2-1}$$

Les σ_j sont les matrices de Pauli. Le ψ d'Hestenes est ici représenté par une matrice 4×4 et s'écrit :

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi_2} \\ \psi_2 & \overline{\psi_1} \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 & \overline{\psi_4} \\ \psi_4 & -\overline{\psi_3} \end{pmatrix} \tag{2-2}$$

Tandis que le spineur Ψ de Dirac s'écrit :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{2-3}$$

ψ et Ψ sont intimement associés puisqu'ils utilisent les mêmes composantes complexes $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. $\overline{\psi_j}$ désigne le complexe conjugué de ψ_j. Nous utiliserons aussi :

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\,\overline{\psi_1} \quad \overline{\psi_2} \quad -\overline{\psi_3} \quad -\overline{\psi_4}\,) \tag{2-4}$$

$$\begin{aligned} \not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu &= \begin{pmatrix} \partial_0 & \not\nabla \\ -\not\nabla & -\partial_0 \end{pmatrix} \\ \not\nabla &= \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2-5}$$

$$\begin{aligned} A = \gamma^\mu A_\mu &= \begin{pmatrix} A_0 & -\not A \\ \not A & -A_0 \end{pmatrix} \\ \not A &= \begin{pmatrix} A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & -A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2-6}$$

Si nous remplaçons dans (1-18) chaque matrice 4×4 par sa valeur en termes de matrices 2×2, nous obtenons 4 équations matricielles 2×2. Mais en réalité chaque équation est obtenue deux fois, en sorte que (1-8) est équivalente au système :

$$\begin{cases} -i\partial_0 \phi_1 \sigma_3 - i\not\nabla \phi_2 \sigma_3 + \dfrac{m_0 c}{\hbar} \dfrac{1}{\rho} (\Omega_1 \phi_1 - i\Omega_2 \phi_2) + \dfrac{e}{\hbar c} (A_0 \phi_1 - \not A \phi_2) = 0 \\ i\partial_0 \phi_2 \sigma_3 + i\not\nabla \phi_1 \sigma_3 + \dfrac{m_0 c}{\hbar} \dfrac{1}{\rho} (\Omega_1 \phi_2 - i\Omega_2 \phi_1) + \dfrac{e}{\hbar c} (-A_0 \phi_2 + \not A \phi_1) = 0 \end{cases} \tag{2-7}$$

Chacune des deux équations précédentes est une équation matricielle 2×2 et nous donne 4 équations numériques. Lorsqu'on écrit complètement ces 8 équations numériques, on s'aperçoit que 4 équations ne contiennent que les ψ_j et pas du tout les $\overline{\psi_j}$. Les 4 autres, par contre, contiennent uniquement les $\overline{\psi_j}$ et pas du tout les ψ_j, et sont exactement les complexes conjuguées des 4 premières. Le système (2-7) est donc équivalent au système formé par les 4 équations contenant uniquement les ψ_j. Multipliant alors ces équations par i, nous obtenons que (2-7) est équivalente au système:

$$\left\{\begin{array}{r}\partial_0\varphi+\nabla\!\!\!/\chi+\dfrac{im_0c}{\hbar}\dfrac{1}{\rho}(\Omega_1\varphi-i\Omega_2\chi)+\dfrac{ie}{\hbar c}(A_0\varphi-A\!\!\!/\chi)=0\\-\partial_0\chi-\nabla\!\!\!/\varphi+\dfrac{im_0c}{\hbar}\dfrac{1}{\rho}(\Omega_1\chi-i\Omega_2\varphi)+\dfrac{ie}{\hbar c}(-A_0\chi+A\!\!\!/\varphi)=0\end{array}\right. \tag{2-8}$$

Et ce système est équivalent à l'équation matricielle :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu)+\frac{im_0c}{\hbar}\frac{1}{\rho}(\Omega_1-i\Omega_2\gamma_5)]\Psi=0 \tag{2-9}$$

L'équation non linéaire (2-9) s'obtient donc à partir de (1-1) en remplaçant le terme de potentiel magnétique du monopôle par le terme de potentiel électrique de l'électron, et en substituant $im_0c/\hbar\ 1/\rho$ à $i/2m(\rho^2)c/\hbar$. (2-9) correspond donc au cas particulier de (1-1) où $m(\rho^2)=2m_0/\rho$. Ce cas a été étudié par G. L. pour le monopôle [2]. C'est le seul cas de (1-1) dans lequel Ψ est normalisable. Les ondes planes donnent les relations de dispersion d'une particule de masse propre m_0. Pour toute autre fonction $m(\rho^2)$, la masse est variable et dépend de l'amplitude des ondes. Le passage de l'équation de Dirac à notre équation non linéaire conserve une grande partie des acquis de la théorie de Dirac: il y a une densité de probabilité de présence qui se calcule comme dans la théorie linéaire. Plus généralement les grandeurs physiques sont calculées de la même manière. Les identités entre ces grandeurs, qui ne dépendent que de la structure algébrique de la théorie sont évidemment conservées. Par exemple nous avons :

$$j^2=\rho^2\quad\text{avec}\quad j=\psi\gamma_0\tilde{\psi}=\rho e_0 \tag{2-10}$$

$$k^2=-\rho^2\quad\text{avec}\quad k=\psi\gamma_3\tilde{\psi}=\rho e_3 \qquad (2\text{-}11))$$

III - DEUX COURANTS CONSERVATIFS

L'équation non linéaire (2-9) peut être obtenue à partir de la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L}=-i\frac{\hbar}{2}c\overline{\Psi}\gamma^\mu[\partial_\mu]\Psi+e\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu+m_0c^2\rho \tag{3-1}$$

où l'on utilise la notation : $[\partial_\mu]=\underset{\rightarrow}{\partial_\mu}-\underset{\leftarrow}{\partial_\mu}$. Cette densité lagrangienne ne diffère de celle de la théorie linéaire que par le remplacement de $m_0c^2\Omega_1$

par $m_0c^2\rho$. Ceci correspond au fait que la densité d'énergie propre, pour l'équation non linéaire, est :

$$T = m_0 c^2 \rho \tag{3-2}$$

et non plus : $T' = m_0c^2\Omega_1 = T\cos\beta$. O. Costa de Beauregard [9] a récemment posé le problème d'un tenseur toujours ininterprété dans la théorie de Dirac linéaire. Nous n'entrerons pas dans la discussion de ce problème, mais signalons que la dynamique de ce tenseur est sensiblement modifiée pour l'équation non linéaire (1-18). La relation (3-2) a conduit à considérer l'angle β comme lié au signe de l'énergie et on pensait que l'on passe des énergies positives aux énergies négatives en changeant β en $\beta+\pi$. En fait cette remarque n'est pas générale: ainsi, signalons que l'angle β varie de manière fort différente suivant que l'on a affaire à un état $2s\frac{1}{2}$ ou $2p\frac{1}{2}$, états très proches en énergie. L'interprétation usuelle de l'angle β semble donc peu compatible avec le grand succès de la théorie de Dirac qui est sa solution dans le cas de l'atome H. Pour l'équation non linéaire ρ est partout positif ou nul, donc la densité d'énergie propre est partout positive. Il y a là une différence notable avec la théorie linéaire, et nous examinerons plus loin si cela est conciliable avec la conjugaison de charge. Pour l'équation non linéaire, l'angle β n'est pas lié au signe de l'énergie et est donc disponible pour une autre interprétation physique. Les travaux sur le monopôle (G. L. [2] [3] [4]) montrent que l'angle β est lié au magnétisme libre. Autre différence par rapport à la théorie linéaire : la densité lagrangienne est invariante de jauge globale électrique et chirale, et non plus seulement de jauge électrique. Le théorème de Noether entraîne donc l'existence de deux courants conservatifs. Ces deux courants sont les courants j et k définis par (2-10) et (2-11). On montre facilement que :

$$\not{\partial}\cdot j = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad \not{\partial}\cdot k = \partial_\mu k^\mu = 0 \tag{3-4}$$

Rappelons que le courant k présente une difficulté parce qu'il est du genre espace puisque $k^2 = -\rho^2$. Mais cette difficulté peut être levée (voir G.L. réf. cit.).

IV - ONDES PLANES MONOCHROMATIQUES

Pour l'étude des ondes planes, nous utiliserons le spineur $\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$ et les spineurs à deux composantes de la représentation de Weyl :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\chi) \quad , \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi-\chi) \tag{4-1}$$

L'équation de Dirac est équivalente au système :

$$\partial_0\varphi + \nabla\!\!\!/\chi + \frac{ie}{\hbar c}(V\varphi - A\!\!\!/\chi) + i\frac{m_0 c}{\hbar}\varphi = 0$$

$$-\nabla\!\!\!/\varphi - \partial_0\chi + \frac{ie}{\hbar c}(A\!\!\!/\varphi - V\chi) + i\frac{m_0 c}{\hbar}\chi = 0 \quad , \quad V = A_0 \tag{4-2}$$

En ajoutant et en retranchant les deux équations précédentes, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} [\partial_0 + \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V - A\!\!\!/)]\xi + i\frac{m_0 c}{\hbar}\nu = 0 \\ [\partial_0 - \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V + A\!\!\!/)]\nu + i\frac{m_0 c}{\hbar}\xi = 0 \end{cases} \tag{4-3}$$

Tandis que le système (2-8) donne, en ajoutant et retranchant :

$$\begin{cases} [\partial_0 + \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V - A\!\!\!/)]\xi + i\frac{m_0 c}{\hbar}(\frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{\rho})\nu = 0 \\ [\partial_0 - \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V + A\!\!\!/)]\nu + i\frac{m_0 c}{\hbar}(\frac{\Omega_1 - i\Omega_2}{\rho})\xi = 0 \end{cases} \tag{4-4}$$

Les deux systèmes précédents peuvent être étudiés simultanément en posant :

$$u = 1 \quad \text{pour} \quad (4-3)$$
$$u = \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{\rho} \quad \text{pour} \quad (4-4)$$

et en les écrivant sous la forme commune :

$$\begin{cases} [\partial_0 + \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V - A\!\!\!/)]\xi + i\frac{m_0 c}{\hbar}u\nu = 0 \\ [\partial_0 - \nabla\!\!\!/ + \frac{ie}{\hbar c}(V + A\!\!\!/)]\nu + i\frac{m_0 c}{\hbar}\overline{u}\xi = 0 \end{cases} \tag{4-5}$$

En l'absence de champ électromagnétique, il reste :

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \nabla\!\!\!/)\xi + i\frac{m_0 c}{\hbar}u\nu = 0 \\ (\partial_0 - \nabla\!\!\!/)\nu + i\frac{m_0 c}{\hbar}\overline{u}\xi = 0 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Cherchons une solution de la forme :

$$\xi = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p\cdot r)}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \quad , \quad \nu = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p\cdot r)}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \tag{4-7}$$

c'est à dire une solution onde plane telle que ξ et ν aient la même phase. Le système (4-6) nous donne :

$$\begin{pmatrix}\frac{E}{c}-p_z & -(p_x-ip_y) & -m_0cu & 0\\ -(p_x+ip_y) & \frac{E}{c}+p_z & 0 & -m_0cu\\ -m_0c\overline{u} & 0 & \frac{E}{c}+p_z & p_x-ip_y\\ 0 & -m_0c\overline{u} & p_x+ip_y & \frac{E}{c}-p_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=0 \tag{4-8}$$

Cette équation matricielle n'admet de solution non nulle que si le déterminant D de la matrice 4×4 est nul. Or :

$$D = (\frac{E^2}{c^2}-p^2-m_0^2c^2)^2 \quad , \quad p^2 = p_x^2+p_y^2+p_z^2 \tag{4-9}$$

Notons que D ne dépend pas de u, c'est pour cela que les deux systèmes fournissent des résultats très voisins. Si on a :

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2 \tag{4-10}$$

ce qui est la relation classique entre la masse, l'énergie et l'impulsion d'une particule, les mineurs d'ordre 3 de la matrice (4-8) sont nuls et les solutions ne dépendent plus que de 2 paramètres. Nous choisirons les paramètres b_1 et b_2, d'où :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u}{m_0c}[(\frac{E}{c}+p_z)b_1+(p_x-ip_y)b_2]\\ a_2 &= \frac{u}{m_0c}[(p_x-ip_y)b_1+(\frac{E}{c}-p_z)b_2]\end{aligned} \tag{4-11}$$

Dans le cas particulier où la direction du mouvement s'effectue suivant l'axe des z nous avons : $p_x = p_y = 0$; $p_z = p$ et nous aurons plus simplement :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u}{m_0c}(\frac{E}{c}+p)b_1\\ a_2 &= \frac{u}{m_0c}(\frac{E}{c}-p)b_2\end{aligned} \tag{4-12}$$

La densité de probabilité de présence vaut :

$$
\begin{aligned}
j_0 &= a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} + b_1\overline{b_1} + b_2\overline{b_2} \\
&= \frac{u\overline{u}}{m_0^2c^2}[b_1\overline{b_1}(\frac{E}{c}+p)^2 + b_2\overline{b_2}(\frac{E}{c}-p)^2] + b_1\overline{b_1} + b_2\overline{b_2}
\end{aligned}
\tag{4-13}
$$

et comme $u\overline{u} = 1$ dans les deux cas, nous obtenons :

$$
j_0 = \frac{2E}{m_0^2c^3}[b_1\overline{b_1}(\frac{E}{c}+p) + b_2\overline{b_2}(\frac{E}{c}-p)] \tag{4-14}
$$

Calculons maintenant les invariants Ω_1 et Ω_2 :

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 + i\Omega_2 = 2(a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2}) &= \frac{2u}{m_0c}[b_1\overline{b_1}(\frac{E}{c}+p) + b_2\overline{b_2}(\frac{E}{c}-p)] \\
&= u\frac{m_0c^2}{E}j_0
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

Pour l'équation de Dirac nous avons $u = 1$, donc nous obtenons :

$$
\Omega_1 + i\Omega_2 = \frac{m_0c^2}{E}j_0 \tag{4-16}
$$

Il en résulte que la partie imaginaire Ω_2 est nulle. Comme nous avons :

$$
E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta'^2}} \quad , \quad \beta' = \frac{v}{c} \tag{4-17}
$$

nous obtenons :

$$
\Omega_1 = \sqrt{1-\beta'^2}\,j_0 \quad , \quad \Omega_2 = 0 \tag{4-18}
$$

La situation est tout à fait différente pour l'équation non linéaire, puisque $\Omega_1 + i\Omega_2 = \rho u$, de sorte que (4-15) nous donne :

$$
\rho = \frac{m_0c^2}{E}j_0 = \sqrt{1-\beta'^2}\,j_0 \tag{4-19}
$$

Notons que u a disparu du calcul et que l'angle β peut être quelconque, ce qui est normal puisque l'équation est invariante de jauge chirale. Notons ensuite que ρ se substitue à Ω_1, ce que nous avons déjà rencontré dans le lagrangien. C'est ρ qui est ici lié au facteur de contraction de Lorentz. Le vecteur courant de densité de probabilité j est tel que :

$$j_x + ij_y = 2(\overline{a_1}a_2 - \overline{b_1}b_2) \quad , \quad j_z = a_1\overline{a_1} - a_2\overline{a_2} - b_1\overline{b_1} + b_2\overline{b_2} \tag{4-20}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} j_x + ij_y &= 2[\frac{\overline{u}}{m_0 c}(\frac{E}{c} + p)\overline{b_1}\frac{u}{m_0 c}(\frac{E}{c} - p)b_2 - b_2\overline{b_1}] \\ &= \frac{2\overline{b_1}b_2}{m_0^2 c^2}(\frac{E^2}{c^2} - p^2 - m_0^2 c^2) = 0 \end{aligned} \tag{4-21}$$

$$\begin{aligned} j_z &= \frac{2p}{m_0^2 c^2}[b_1\overline{b_1}(\frac{E}{c} + p) + b_2\overline{b_2}(\frac{E}{c} - p)] \\ &= \frac{cp}{E}j_0 = \frac{v}{c}j_0 \end{aligned} \tag{4-22}$$

Donc pour l'équation non linéaire aussi, il y a un flux de probabilité de présence dans la direction de propagation de l'onde, avec la vitesse v. Pour le vecteur k nous avons :

$$\begin{aligned} k_0 &= a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} - b_1\overline{b_1} - b_2\overline{b_2} \\ k_x + ik_y &= 2(\overline{a_1}a_2 + \overline{b_1}b_2) \\ k_z &= a_1\overline{a_1} - a_2\overline{a_2} + b_1\overline{b_1} - b_2\overline{b_2} \end{aligned} \tag{4-23}$$

et nous obtenons :

$$k_z = \frac{2E}{m_0^2 c^3}[b_1\overline{b_1}(\frac{E}{c} + p) - b_2\overline{b_2}(\frac{E}{c} - p)]$$

Si $b_1 = 0$, nous avons :

$$k_z = \frac{2E}{m_0^2 c^3}(-b_2\overline{b_2})(\frac{E}{c} - p) = -j_0$$

tandis que si $b_2 = 0$ nous avons :

$$k_z = \frac{2E}{m_0^2 c^3}(b_1\overline{b_1})(\frac{E}{c} + p) = j_0$$

Si on interprète k comme une densité de spin (comme on le fait d'ordinaire), on voit que pour l'équation non linéaire, comme pour l'équation de Dirac, on retrouve les deux signes possibles du spin, et le fait que l'onde plane est la somme de deux ondes Ψ_g et Ψ_d correspondant à une des valeurs propres de la composante du spin dans la direction de propagation. Si on interprète (probablement de façon équivalente) k comme une densité de magnétisme libre (G.L. loc. cit.), les deux cas $b_1 = 0$ et $b_2 = 0$ correspondent à un courant de monopôles et d'antimonopôles.

Mais nous ne pouvons pas, comme dans la théorie linéaire, changer le signe de l'énergie : si nous changions E en $-E$ nous obtiendrions à la place de (4-19): $\rho = -\sqrt{1-\beta'^2}j_0$, ce qui est manifestement impossible. L'interprétation de l'existence des antiparticules étant un des succès majeurs de l'équation de Dirac, nous allons devoir regarder de plus près ce que peut être la conjugaison de charge pour l'équation non linéaire.

V - INVARIANCE RELATIVISTE ET SYMETRIES P, C, T

L'invariance relativiste de l'équation non linéaire est exactement identique à celle de la théorie linéaire, car elle découle des propriétés des matrices de Dirac, que nous utilisons ici sans changement.

Réflexion d'espace P

Si on passe à un autre référentiel d'après la règle : $t \to t$; $\vec{x} \to -\vec{x}$ l'impulsion p devient $p' = -p$. Le potentiel électrique A devient :

$$A' = \begin{pmatrix} A_0 & \not{A} \\ -\not{A} & -A_0 \end{pmatrix} = \gamma_0 A \gamma_0 \tag{5-1}$$

De même le gradient devient :

$$\not{\partial}' = \gamma^0\partial_0 - \gamma^i\partial_j = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\not{\nabla} \\ \not{\nabla} & -\partial_0 \end{pmatrix} = \gamma_0 \not{\nabla} \gamma_0 \tag{5-2}$$

Il apparait donc qu'en algèbre d'espace-temps, dans la réflexion P, tout vecteur V est transformé en $V' = \gamma_0 V \gamma_0$; donc tout produit de deux vecteurs AB devient : $(AB)' = \gamma_0 A \gamma_0 \gamma_0 B \gamma_0 = \gamma_0 AB \gamma_0$.

Et plus généralement tout multivecteur M devient : $M' = \gamma_0 M \gamma_0$. Il en est de même pour ψ. Nous avons

$$\not{\partial}'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} = (\gamma_0\not{\partial}\gamma_0)(\gamma_0\psi\gamma_0)\gamma_2\gamma_1(\gamma_0\psi\gamma_0)^{-1} = \gamma_0(\not{\partial}\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0$$

$$\psi'\gamma_0\psi'^{-1} = (\gamma_0\psi\gamma_0)\gamma_0(\gamma_0\psi\gamma_0)^{-1} = \gamma_0(\psi\gamma_0\psi^{-1})\gamma_0$$
$$\rho'^2 = \det\psi' = \det(\gamma_0\psi\gamma_0) = \det\psi = \rho^2$$
$$\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' = (\gamma_0\psi\gamma_0)\gamma_0(\widetilde{\gamma_0\psi\gamma_0}) = \gamma_0\psi\gamma_0\gamma_0\gamma_0\tilde{\psi}\gamma_0 = \gamma_0(\psi\gamma_0\tilde{\psi})\gamma_0$$

Par conséquent l'équation de Dirac sous la forme (1-14) nous donne :

$$\begin{aligned}\hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= \gamma_0(\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0\\ &= \gamma_0(m_0c\psi\gamma_0\psi^{-1} + \frac{e}{c}A)\gamma_0 \\ \hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= m_0c\psi'\gamma_0\psi'^{-1} + \frac{e}{c}A'\end{aligned} \tag{5-3}$$

Et nous retrouvons bien que l'équation de Dirac est P invariante. Pour l'équation non linéaire nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= \gamma_0(\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0\\ &= \gamma_0(m_0c\frac{1}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} + \frac{e}{c}A)\gamma_0 \\ \hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= m_0c\frac{1}{\rho'}\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' + \frac{e}{c}A'\end{aligned} \tag{5-4}$$

et nous voyons que la P invariance est également assurée pour l'équation non linéaire.

T invariance

Le potentiel A_μ étant créé par des charges en mouvement, le potentiel A'_μ qui s'en déduit par renversement du temps s'obtient en renversant le mouvement des charges. Les courants, donc le champ magnétique, changent de sens; on a $H' = -H$ tandis que $E' = E$, et on doit donc prendre :

$$A' = \begin{pmatrix} A_0 & \vec{A}\!\!\!/ \\ -\vec{A}\!\!\!/ & -A_0 \end{pmatrix} = \gamma_0 A\gamma_0 \tag{5-5}$$

Le gradient devient :

$$\partial\!\!\!/' = -\gamma^0\partial_0 + \gamma^j\partial_j = \begin{pmatrix} -\partial_0 & \vec{\nabla}\!\!\!\!/ \\ -\vec{\nabla}\!\!\!\!/ & \partial_0 \end{pmatrix} = -\gamma_0\vec{\nabla}\!\!\!\!/\gamma_0 \tag{5-6}$$

Il est établi en théorie de Dirac que l'équation est invariante si l'on remplace Ψ par $\Psi' = \gamma_3\gamma_1\Psi^*$ où Ψ^* désigne le complexe conjugué de Ψ. Or ceci est équivalent à :

$$\psi' = \gamma_0\psi\gamma_2\gamma \tag{5-7}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\rho'^2 &= \det\psi' = \det\gamma_0\psi\gamma_2\gamma = \det\psi = \rho^2 \\
\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= (-\gamma_0\partial\!\!\!/\gamma_0)(\gamma_0\psi\gamma_2\gamma)\gamma_2\gamma_1(\gamma_0\psi\gamma_2\gamma)^{-1} \\
&= -\gamma_0\partial\!\!\!/\gamma_0\gamma_0\psi\gamma_2\gamma\gamma_2\gamma_1\gamma^{-1}\gamma_2^{-1}\psi^{-1}\gamma_0^{-1} \\
\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= \gamma_0(\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0
\end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\begin{aligned}
\psi'\gamma_0\psi'^{-1} &= (\gamma_0\psi\gamma_2\gamma)\gamma_0(\gamma_0\psi\gamma_2\gamma)^{-1} \\
&= \gamma_0\psi\gamma_2\gamma\gamma_0\gamma^{-1}\gamma_2^{-1}\psi^{-1}\gamma_0^{-1} \\
\psi'\gamma_0\psi'^{-1} &= \gamma_0(\psi\gamma_0\psi^{-1})\gamma_0
\end{aligned} \tag{5-9}$$

$$\begin{aligned}
\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' &= (\gamma_0\psi\gamma_2\gamma)\gamma_0(\widetilde{\gamma_0\psi\gamma_2\gamma}) \\
&= \gamma_0\psi\gamma_2\gamma\gamma_0\gamma\gamma_2\tilde{\psi}\gamma_0 \\
\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' &= \gamma_0(\psi\gamma_0\tilde{\psi})\gamma_0
\end{aligned} \tag{5-10}$$

Nous obtenons donc, pour l'équation de Dirac :

$$\begin{aligned}
\hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= \gamma_0(\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0 \\
&= \gamma_0(m_0c\psi\gamma_0\psi^{-1} + \frac{e}{c}A)\gamma_0 \\
\hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= m_0c\psi'\gamma_0\psi'^{-1} + \frac{e}{c}A'
\end{aligned} \tag{5-11}$$

et donc l'équation de Dirac est dite T invariante. Or il en est exactement de même pour l'équation non linéaire, puisque :

$$\begin{aligned}
\hbar\partial\!\!\!/'\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} &= \gamma_0(\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1})\gamma_0 \\
&= \gamma_0(m_0\frac{c}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} + \frac{e}{c}A)\gamma_0 \\
&= m_0\frac{c}{\rho'}\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' + \frac{e}{c}A'
\end{aligned}$$

Conjugaison de charge

L'expérience a établi qu'à toute particule chargée électriquement est associée une antiparticule de charge opposée. La conjugaison de charge est l'opération de symétrie, jamais mise en défaut jusqu'ici, qui fait passer de la particule à son antiparticule. En théorie de Dirac linéaire la conjugaison de charge s'écrit :

$$e \to e' = -e \quad , \quad \Psi \to \Psi' = \gamma_2 \Psi^* \tag{5-12}$$

et ceci nous donne pour le ψ d'Hestenes :

$$\psi \to \psi' = \psi \gamma_2 \gamma_0 \tag{5-13}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial\!\!\!/ \psi' \gamma_2 \gamma_1 {\psi'}^{-1} &= \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_2^{-1} \psi^{-1} \\ &= \partial\!\!\!/ \psi \gamma_1 \gamma_2 \psi^{-1} \\ \partial\!\!\!/ \psi' \gamma_2 \gamma_1 {\psi'}^{-1} &= -\partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} \end{aligned} \tag{5-14}$$

$$\psi' \gamma_0 {\psi'}^{-1} = \psi \gamma_2 \gamma_0 \gamma_0 \gamma_0^{-1} \gamma_2^{-1} \psi^{-1} = -\psi \gamma_0 \psi^{-1} \tag{5-15}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \hbar \partial\!\!\!/ \psi' \gamma_2 \gamma_1 {\psi'}^{-1} &= -\hbar \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} \\ &= -(m_0 c \psi \gamma_0 \psi^{-1} + \frac{e}{c} A) \\ &= m_0 c \psi' \gamma_0 {\psi'}^{-1} - \frac{e}{c} A \end{aligned}$$

Ainsi la conjuguée de charge de l'équation de Dirac (1-14) est l'équation :

$$\hbar \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = m_0 c \psi \gamma_0 \psi^{-1} - \frac{e}{c} A \tag{5-16}$$

Notons que cette équation n'est pas l'équation de Dirac initiale mais l'équation pour une particule de signe contraire, donc pour une *autre* particule, alors que la réflexion d'espace et le renversement du temps nous donnent une équation transformée identique à l'équation de départ, donc pour la *même* particule. Examinons maintenant ce que donne l'équation non linéaire :

$$\psi' \gamma_0 \tilde{\psi}' = (\psi \gamma_2 \gamma_0) \gamma_0 (\widetilde{\psi \gamma_2 \gamma_0}) = \psi \gamma_2 \gamma_0 \gamma_0 \gamma_0 \gamma_2 \tilde{\psi} = \psi \gamma_2 \gamma_0 \gamma_2 \tilde{\psi} = \psi \gamma_0 \tilde{\psi}$$

$${\rho'}^2 = \det \psi' = \det(\psi \gamma_2 \gamma_0) = \det \psi = \rho^2$$

Nous obtenons donc :

$$\hbar \not\partial \psi' \gamma_2 \gamma_1 \psi'^{-1} = -\hbar \not\partial \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = -(m_0 c \frac{1}{\rho} \psi \gamma_0 \tilde{\psi} + \frac{e}{c} A)$$
$$= -m_0 c \frac{1}{\rho'} \psi' \gamma_0 \tilde{\psi}' - \frac{e}{c} A$$

Par conséquent la transformation (5-13) fait passer de l'équation (1-18) à l'équation:

$$\hbar \not\partial \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = -m_0 c \frac{1}{\rho} \psi \gamma_0 \tilde{\psi} - \frac{e}{c} A \tag{5-17}$$

Donc ici non seulement la charge, mais aussi la masse est changée de signe. Si nous admettons la possibilité d'une masse négative alors les énergies négatives de la théorie linéaire redeviennent possibles. Mais y a-t-il réellement dans la nature des énergies négatives ? La création d'une paire électron-positron nécessite une énergie égale à $2m_0c^2$, aussi la théorie quantique admet-elle que l'électron et le positron ont chacun une masse positive m_0 et une énergie positive $E = m_0c^2$. Aussi pensons-nous que la véritable équation conjuguée de charge de (1-18) doit être non pas (5-17) mais simplement :

$$\hbar \not\partial \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = m_0 c \frac{1}{\rho} \psi \gamma_0 \tilde{\psi} - \frac{e}{c} A \tag{5-18}$$

Et nous allons voir maintenant comment l'on peut obtenir cette équation.

VI - SIGNATURE DE LA METRIQUE ET CONJUGAISON DE CHARGE

Dans les travaux d'Hestenes, dans ceux de Boudet ou encore dans le début de cet article nous avons utilisé une métrique d'espace-temps de signature $+---$. D'autres auteurs utilisant les algèbres de Clifford adoptent une métrique de signature $-+++$ [10] [11] [12] [13]. Il n'en résulte aucune catastrophe. Il ne semble y avoir aucune raison de préférer une signature à l'autre, c'est à dire qu'il y a une sorte d'indétermination du signe de la métrique d'espace-temps. Or ceci est curieux parce que les algèbres de Clifford construites sur ces deux signatures ne sont pas identiques, l'une étant isomorphe à l'algèbre des matrices carrées réelles $M_4(R)$, l'autre étant isomorphe à l'algèbre des matrices quaternioniques

$M_2(H)$. [13] Nous pouvons écrire les lois de l'électromagnétisme [5], dans l'algèbre d'espace-temps C(1,3) de signature $+ - --$, sous la forme :

$$F = \partial\!\!\!/ P \quad , \quad \partial\!\!\!/ F = \frac{4\pi}{c} J \tag{6-1}$$

où F est le champ électromagnétique, P le potentiel et J le courant. Dans cette algèbre, tout élément A est la somme d'un scalaire S, d'un vecteur V, d'un bivecteur B, d'un trivecteur T et d'un pseudoscalaire L :

$$A = S + V + B + T + L \tag{6-2}$$

L'algèbre de Clifford C(3,1) relative à l'espace-temps de signature $-+++$ s'obtiendra en remplaçant les matrices γ^μ par $\gamma'^\mu = i\gamma^\mu$. Tout élément A' de cette algèbre est somme d'un scalaire S', d'un vecteur V', d'un bivecteur B', d'un trivecteur T' et d'un pseudoscalaire L' :

$$A' = S' + V' + B' + T' + L' \tag{6-3}$$

Or nous aurons :

$$V' = \gamma'^\mu V_\mu = i\gamma^\mu V_\mu = iV \tag{6-4}$$

Donc nous aurons aussi :

$$\begin{aligned} B' &= i^2 B = -B \\ T' &= i^3 T = -iT \\ L' &= i^4 L = L \\ A' &= S + iV - B - iT + L \end{aligned} \tag{6-5}$$

En particulier pour un élément pair $A = S + B + L$, nous aurons :

$$A' = S - B + L = \tilde{A} \tag{6-6}$$

Le gradient devient :

$$\partial\!\!\!/' = \gamma'^\mu \partial_\mu = i\gamma^\mu \partial_\mu = i\partial\!\!\!/ \tag{6-7}$$

Les grandeurs électromagnétiques, en signature $- + ++$, seront donc :

$$F' = -F \quad , \quad P' = iP \quad , \quad J' = iJ \tag{6-8}$$

Nous obtenons alors :

$$\partial\!\!\!/' P' = i\partial\!\!\!/ iP = -\partial\!\!\!/ P = -F = F'$$
$$\partial\!\!\!/' F' = i\partial\!\!\!/(-F) = -i\partial\!\!\!/ F = -i\frac{4\pi}{c}J = -\frac{4\pi}{c}J'$$

Donc les lois de l'électromagnétisme, en algèbre de signature $- + ++$, seront:

$$F = \partial\!\!\!/ P \quad , \quad \partial\!\!\!/ F = -\frac{4\pi}{c}J \tag{6-9}$$

Les lois de l'électromagnétisme sont donc identiques au signe près, c'est à dire à un changement de signe près de toutes les charges; un changement de la signature d'espace-temps, accompagné d'un changement du signe des charges, redonne les mêmes lois de l'électromagnétisme. Examinons maintenant ce que devient l'équation non linéaire dans le changement de signe de la métrique d'espace-temps. ψ est un élément pair, donc est transformé en $\psi' = \tilde{\psi}$. Dans le changement de signature, regardons ce que devient l'équation :

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} = m_0 v + \frac{e}{c}A \tag{6-10}$$

Nous avons :

$$\partial\!\!\!/' = i\partial\!\!\!/ \, , \; \psi' = \tilde{\psi} \, , \; \gamma_2' = -i\gamma_2 \, , \; \gamma_1' = -i\gamma_1 \, , \; v' = iv \, , \; A' = iA \tag{6-11}$$

$$m_0 v' = m_0 \frac{c}{\rho'}\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' = m_0\frac{c}{\rho}\tilde{\psi}\gamma_0\psi \tag{6-12}$$

Mais ceci ne convient pas, parce que c'est $\psi\gamma_0\tilde{\psi}$, *dans cet ordre*, qui a les bonnes propriétés de transformation sous une rotation de Lorentz. Nous admettrons donc que, lorsque nous changeons de signature, nous devons aussi changer l'ordre de tous les produits, de sorte que la transformée de (1-17) est :

$$\begin{aligned}\hbar\psi'^{-1}\gamma_1'\gamma_2'\psi'\partial\!\!\!/' &= m_0\frac{c}{\rho'}\tilde{\psi}'\gamma_0'\psi' + \frac{e}{c}A' \\ \hbar\tilde{\psi}^{-1}(-i\gamma_1)(-i\gamma_2)\tilde{\psi}i\partial\!\!\!/ &= m_0\frac{c}{\rho}\psi(-i\gamma_0)\tilde{\psi} + \frac{e}{c}iA\end{aligned} \tag{6-13}$$

Soit en divisant par $-i$:

$$\hbar(\widetilde{\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1}}) = m_0\frac{c}{\rho}(\widetilde{\psi\gamma_0\tilde{\psi}}) - \frac{e}{c}\tilde{A}$$

Et nous obtenons donc l'équation :

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} = m_0\frac{c}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} - \frac{e}{c}A \tag{6-14}$$

Le passage de e à $-e$, c'est à dire la conjugaison de charge, correspond donc là aussi au changement de la signature de la métrique d'espace-temps, avec la règle suivante: dans le changement de signature, on doit inverser l'ordre de tous les produits. Il en résulte que $e^{\gamma_1\gamma_2\varphi}$ devient $e^{\gamma_2\gamma_1\varphi} = e^{-\gamma_1\gamma_2\varphi}$, c'est à dire que la phase de l'onde est changée dans la conjugaison de charge. Effectuons la même démarche pour l'équation du monopôle (1-1), qui s'écrit, en algèbre d'espace-temps de signature $+---$:

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} = m(\rho^2)\frac{c}{2}\psi\gamma_0\tilde{\psi} + \frac{g}{c}\gamma B\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} \tag{6-15}$$

Nous pouvons alors constater que l'équation obtenue en changeant la signature est identique à (6-15), c'est à dire que (6-15) est invariante par conjugaison de charge, la conjugaison de charge ne change pas le signe du monopôle: ce fait est important parce qu'il entraîne l'absence de polarisation du vide par les monopôles (G.L. loc. cit.). Ainsi l'invariance des lois de l'univers sous la conjugaison de charge pourrait être liée à l'invariance des lois de la physique par rapport à la signature de la métrique d'espace-temps. Cette liaison ne pouvait être mise en évidence par la théorie classique, qui cachait cette question de la signature en adoptant une métrique $++++$ et en ajoutant des facteurs i aux endroits adéquats. Si nous refaisons l'étude des ondes planes monochromatiques pour l'équation (6-14), nous obtiendrons les mêmes résultats: même énergie positive, deux types possibles de spin; les résultats sont les mêmes puisque dans l'étude des ondes planes nous négligeons justement le terme contenant e ou $-e$.

VII - ATOME D'HYDROGENE

L'équation non linéaire que nous étudions ici ne peut être acceptable que si elle est en accord avec les faits expérimentaux qui ont fait le succès de la théorie de Dirac. Parmi les résultats qui ont fait la gloire de l'équation de Dirac, il y a le fait qu'elle a rendu compte de la conjugaison de charge. Nous venons de voir que l'équation non linéaire peut aussi en rendre compte, et sans faire appel aux énergies négatives. Un autre résultat essentiel de la théorie de Dirac est de donner avec une grande précision les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. La situation se présente a priori de manière très défavorable pour l'équation non linéaire. D'abord pour les états de l'atome d'hydrogène Ω_2 n'est pas nul, donc les deux équations ne sont pas identiques. Ensuite nous n'avons plus la régularité des harmoniques sphériques, nous sommes dans la même situation que lors du passage de la mécanique newtonienne à la mécanique relativiste: la trajectoire de Mercure n'est plus périodique puisqu'il y a déplacement du périhélie. Tout ce que nous pouvons espérer est que les solutions de l'équation non linéaire soient aussi proches de celles de la théorie linéaire que l'orbite relativiste de l'orbite newtonienne. Malheureusement la complexité des calculs ne nous a pas encore permis de calculer exactement les solutions de l'équation non linéaire. Néanmoins nous pensons qu'elle devrait fournir des résultats voisins de ceux de la théorie de Dirac. Pour donner nos raisons, nous aurons besoin de rappeler brièvement le calcul de l'atome d'hydrogène en théorie de Dirac, en essayant un parallèle avec le cas non linéaire. Dans les deux cas, linéaire et non linéaire, on cherche une solution stationnaire : $\Psi = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$ où φ et χ ne sont fonction que de x, y, z. Avec $\alpha = e^2/\hbar c$ et $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, l'équation de Dirac donne alors le système :

$$\begin{cases}(\frac{E}{\hbar c}+\frac{\alpha}{r}-\frac{m_0c}{\hbar})\varphi + i\nabla\!\!\!/\chi = 0\\ (\frac{E}{\hbar c}+\frac{\alpha}{r}+\frac{m_0c}{\hbar})\chi + i\nabla\!\!\!/\varphi = 0\end{cases} \tag{7-1}$$

tandis que l'équation non linéaire donne le système :

$$\begin{cases}(\frac{E}{\hbar c}+\frac{\alpha}{r}-\frac{m_0c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})\varphi + i(\nabla\!\!\!/+\frac{m_0c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho})\chi = 0\\ (\frac{E}{\hbar c}+\frac{\alpha}{r}+\frac{m_0c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})\chi + i(\nabla\!\!\!/-\frac{m_0c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho})\varphi = 0\end{cases} \tag{7-2}$$

La résolution du système (7-1) s'effectue par séparation des variables en coordonnées sphériques :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta \tag{7-3}$$

L'étude du moment angulaire donne deux sortes de fonctions possibles :

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix}G(r)\Omega_l^m(+)\\ iF(r)\Omega_{l+1}^m(-)\end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix}G(r)\Omega_{l+1}^m(-)\\ iF(r)\Omega_l^m(+)\end{pmatrix} \tag{7-4}$$

$$\Omega_l^m(+) = \begin{pmatrix} (\frac{l+m}{2l+1})^{1/2}\mathcal{Y}_l^{m-1} \\ (\frac{l-m+1}{2l+1})^{1/2}\mathcal{Y}_l^m \end{pmatrix} , \ \Omega_{l+1}^m(-) = \begin{pmatrix} (\frac{l-m+2}{2l+3})^{1/2}\mathcal{Y}_{l+1}^{m-1} \\ -(\frac{l+m+1}{2l+3})^{1/2}\mathcal{Y}_{l+1}^m \end{pmatrix} \quad (7\text{-}5)$$

où $\mathcal{Y}_l^m = \mathcal{Y}_l^m(\theta,\varphi)$ désigne les harmoniques sphériques. Portant ces valeurs dans (7-1), et introduisant κ tel que :

$$\kappa = -(l+1) = -(j+\frac{1}{2}) \quad \text{pour} \quad \Psi_1$$

$$\kappa = l+1 = j+\frac{1}{2}) \quad \text{pour} \quad \Psi_2$$

on obtient le système radial :

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dr} + \dfrac{1-\kappa}{r}F - (\dfrac{E-m_0c^2}{\hbar c} + \dfrac{\alpha}{r})G = 0 \\ \dfrac{dG}{dr} + \dfrac{1+\kappa}{r}G + (\dfrac{E+m_0c^2}{\hbar c} + \dfrac{\alpha}{r})F = 0 \end{cases} \quad (7\text{-}6)$$

Posant alors :

$$x = \lambda r \quad , \quad \lambda = \frac{\sqrt{m_0^2c^4 - E^2}}{\hbar c} \quad , \quad u = \sqrt{\frac{m_0c^2+E}{m_0c^2-E}} \quad (7\text{-}7)$$

le système (7-6) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{1-\kappa}{x}F + (\dfrac{1}{u} - \dfrac{\alpha}{x})G = 0 \\ \dfrac{dG}{dx} + \dfrac{1+\kappa}{x}G + (u + \dfrac{\alpha}{x})F = 0 \end{cases} \quad (7\text{-}8)$$

La résolution de ce système, avec la condition d'intégrabilité de $\Psi^\dagger\Psi$, fournit les valeurs propres de l'énergie :

$$E = m_0c^2\Big[1 + \frac{\alpha^2}{(p+\sqrt{\kappa^2-\alpha^2})^2}\Big]^{-1/2} \quad (7\text{-}9)$$

Les niveaux d'énergie ne dépendent donc que de p et de κ^2. Ils sont donc identiques pour deux valeurs de κ opposées. La classification des niveaux d'énergie utilise le nombre quantique principal : $n = p+ \mid \kappa \mid$, ce qui donne, en fonction des valeurs de n, κ, j :

$$\begin{array}{llll} 1s\frac{1}{2} : (1,-1,\frac{1}{2}) & 2s\frac{1}{2} : (2,-1,\frac{1}{2}) & 3s\frac{1}{2} : (3,-1,\frac{1}{2}) & \dots \\ & 2p\frac{1}{2} : (2,1,\frac{1}{2}) & 3p\frac{1}{2} : (3,1,\frac{1}{2}) & \\ & 2p\frac{3}{2} : (2,-2,\frac{3}{2}) & 3p\frac{3}{2} : (3,-2,\frac{3}{2}) & \\ & & 3d\frac{3}{2} : (3,2,\frac{3}{2}) & \\ & & 3d\frac{5}{2} : (3,-3,\frac{5}{2}) & \end{array} \quad (7.10)$$

Pour $p = 0$, c'est à dire $n = |\kappa|$, seule la valeur $\kappa = -n$ est possible. Le nombre d'états dans chaque niveau est $2j + 1$; ainsi dans les états $ns\frac{1}{2}$ ou $np\frac{1}{2}$ le nombre quantique m peut prendre les valeurs 0 ou 1. Le nombre total d'états ayant le nombre quantique principal n est $2n^2$. Pour le niveau fondamental $1s\frac{1}{2}$ il y a deux états possibles :

$$m = 0 : \quad \Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ G \\ iF \sin\theta e^{-i\varphi} \\ -iF\cos\theta \end{pmatrix} \tag{7-11}$$

$$m = 1 : \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} G \\ 0 \\ iF\cos\theta \\ iF\sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \tag{7-12}$$

avec

$$\begin{aligned} G &= k[1 + \frac{E}{m_0c^2}]^{1/2} e^{-\lambda r} r^{\gamma - 1} \\ F &= k[1 - \frac{E}{m_0c^2}]^{1/2} e^{-\lambda r} r^{\gamma - 1} \end{aligned} \tag{7-13}$$

Le calcul des invariants relativistes nous donne :

$$\Omega_1 = G^2 - F^2$$

$$\Omega_2 = -2FG\cos\theta \quad \text{pour} \quad \Psi_0 \quad \text{et} \quad \Omega_2 = 2FG\cos\theta \quad \text{pour} \quad \Psi_1$$

Notons que Ω_2 est exactement nul dans le plan $z = 0$. Il est remarquable que cette situation se retrouve pour tous les états. On peut vérifier que l'on peut toujours écrire :

$$\Omega_2 = 2FGP(\cos\theta) \tag{7-14}$$

où P est un polynôme impair. Donc le polynôme P s'annule toujours en 0, et par conséquent Ω_2 est toujours nul dans le plan $z = 0$. [16] Ceci nous parait la raison principale pour laquelle les résultats de l'équation non linéaire doivent être proches de ceux de la théorie de Dirac. Pour résoudre le système non linéaire (7-2), nous poserons :

$$\Psi = \begin{pmatrix} Ae^{i(m-1)\varphi} \\ Be^{im\varphi} \\ iCe^{i(m-1)\varphi} \\ iDe^{im\varphi} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} A &= A(r,\theta) \\ B &= B(r,\theta) \\ C &= C(r,\theta) \\ D &= D(r,\theta) \end{aligned} \tag{7-15}$$

Nous avons alors :

$$\Omega_1 = A^2 + B^2 - C^2 - D^2 \quad , \quad \Omega_2 = 2(AC + BD) \tag{7-16}$$

Avec les coordonnées sphériques (7-3), nous avons :

$$\not\nabla = \begin{pmatrix} \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta & e^{-i\varphi}(\sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta - \frac{i}{r\sin\theta}\partial_\varphi) \\ e^{i\varphi}(\sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta + \frac{i}{r\sin\theta}\partial_\varphi) & -\cos\theta\partial_r + \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \end{pmatrix} \tag{7-17}$$

Le système (7-2) nous donne par conséquent le système suivant, qui ne contient que les variables r et θ :

$$\begin{aligned}
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})A - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho}C - \cos\theta\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial C}{\partial\theta} \\
&\quad - \sin\theta\frac{\partial D}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial D}{\partial\theta} - \frac{mD}{r\sin\theta} \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})B - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho}D - \sin\theta\frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial C}{\partial\theta} \\
&\quad + \frac{m-1}{r\sin\theta}C + \cos\theta\frac{\partial D}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial D}{\partial\theta} \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})C - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho}A + \cos\theta\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta} \\
&\quad + \sin\theta\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta} + \frac{mB}{r\sin\theta} \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_1}{\rho})D - \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\Omega_2}{\rho}B + \sin\theta\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta} \\
&\quad - \frac{m-1}{r\sin\theta}A - \cos\theta\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta}
\end{aligned} \tag{7-18}$$

Le problème est que s'il est facile de séparer la variable φ, nous ne savons pas séparer les variables r et θ dans le système précédent. Cependant la clef nous parait être de regarder ce qui se passe dans le plan $z = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_0 c}{\hbar})A(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial\theta}(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{\partial D}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{m}{r}D(r,\frac{\pi}{2}) \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} - \frac{m_0 c}{\hbar})B(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{\partial C}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{m-1}{r}C(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial\theta}(r,\frac{\pi}{2}) \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar})C(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{\partial B}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{m}{r}B(r,\frac{\pi}{2}) \\
0 &= (\frac{E}{\hbar c} + \frac{\alpha}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar})D(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{\partial A}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) - \frac{m-1}{r}A(r,\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta}(r,\frac{\pi}{2})
\end{aligned} \tag{7-19}$$

L'équation de Dirac conduit à un système séparable, donc pour chacune des solutions il existe des fonctions A, B, C, D telles que :

$$\psi = \begin{pmatrix} G(r)A(\theta)a(\varphi) \\ G(r)B(\theta)b(\varphi) \\ iF(r)C(\theta)c(\varphi) \\ iF(r)D(\theta)d(\varphi) \end{pmatrix} \tag{7-20}$$

Si nous avons :

$$A(r,\frac{\pi}{2}) = G(r)A(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial A}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) = \frac{dG}{dr}A(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial A}{\partial \theta}(r,\frac{\pi}{2}) = G(r)\frac{dA}{d\theta}(\frac{\pi}{2})$$

$$B(r,\frac{\pi}{2}) = G(r)B(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial B}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) = \frac{dG}{dr}B(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial B}{\partial \theta}(r,\frac{\pi}{2}) = G(r)\frac{dB}{d\theta}(\frac{\pi}{2})$$

$$C(r,\frac{\pi}{2}) = F(r)C(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial C}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) = \frac{dE}{dr}C(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial C}{\partial \theta}(r,\frac{\pi}{2}) = F(r)\frac{dC}{d\theta}(\frac{\pi}{2})$$

$$D(r,\frac{\pi}{2}) = F(r)D(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial D}{\partial r}(r,\frac{\pi}{2}) = \frac{dF}{dr}D(\frac{\pi}{2})\,,\ \frac{\partial D}{\partial \theta}(r,\frac{\pi}{2}) = F(r)\frac{dD}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) \tag{7-21}$$

alors nous obtenons pour G et F exactement le système d'équations (7-6). L'obtention des mêmes niveaux d'énergie est seulement subordonnée aux égalités (7-21). Mais il se peut que (7-21) ne soit qu'une approximation, et pour connaître la valeur de cette approximation, il serait souhaitable de faire une intégration numérique précise du système (7-18). L'angle β ayant un comportement assez différent pour les états $2s\frac{1}{2}$ et $2p\frac{1}{2}$, il se pourrait que la résolution exacte de (7-18) donne une différence d'énergie entre ces niveaux, dont nous savons qu'ils sont légèrement décalés (effet Lamb).

VIII - LOI RELATIVISTE DU GUIDAGE

φ étant la phase classique de l'onde, posons avec Hestenes [14] :

$$\psi = \psi_0 e^{\gamma_2\gamma_1\varphi} \tag{8-1}$$

Supposons que nous ayons :

$$\partial\!\!\!/ \psi_0 = 0 \tag{8-2}$$

Nous obtenons alors $\partial\!\!\!/\psi = \partial\!\!\!/\varphi\psi_0\gamma_2\gamma_1 e^{\gamma_2\gamma_1\varphi}$ donc l'équation non linéaire nous donne:

$$\hbar\partial\!\!\!/\varphi\psi_0\gamma_2\gamma_1 e^{\gamma_2\gamma_1\varphi}\gamma_2\gamma_1 e^{-\gamma_2\gamma_1\varphi}\psi_0^{-1} = m_0 c\frac{1}{\rho}\psi_0 e^{\gamma_2\gamma_1\varphi}\gamma_0 e^{-\gamma_2\gamma_1\varphi}\tilde{\psi}_0 + \frac{e}{c}A$$

Et compte tenu de (1-11), nous obtenons :

$$-\hbar\partial\!\!\!/\varphi = m_0 v + \frac{e}{c}A \qquad (8\text{-}3)$$

La relation précédente est la généralisation relativiste de la loi du guidage :

$$-\hbar\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = m_0\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \qquad (8\text{-}4)$$

obtenue par Louis de Broglie à partir de l'équation de Schrödinger. Hestenes obtenait, à partir de l'équation linéaire de Dirac :

$$-\hbar\partial\!\!\!/\varphi = m_0 v e^{-\beta\gamma} + \frac{e}{c}A \qquad (8\text{-}5)$$

Il y a ici, comme toujours dans la théorie de Dirac linéaire, un facteur $e^{-\beta\gamma}$ en plus dans le terme de masse. Ceci amenait Hestenes à imposer la condition supplémentaire $\beta = 0$ ou $\beta = \pi$, qui correspondait selon lui respectivement à l'électron et au positron, ce qui nous parait douteux, nous l'avons dit. Par construction même de l'équation de départ, nous n'avons évidemment pas besoin ici de cette condition supplémentaire. Les résultats obtenus par Hestenes, que nous allons rappeler brièvement, ne sont donc soumis qu'à la condition (8-2). Prenons le gradient de (8-5) :

$$-\hbar\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\varphi = m_0\partial\!\!\!/ v + \frac{e}{c}\partial\!\!\!/ A \qquad (8\text{-}6)$$

La partie bivectorielle de cette équation nous donne :

$$0 = m_0\partial\!\!\!/\wedge v + \frac{e}{c}F \qquad (8\text{-}7)$$

où F est le champ électromagnétique. [5] Puisque $v^2 = c^2$ est fixe, Hestenes en déduit que $1/cv\cdot\partial\!\!\!/ v = \dot{v} = dv/d\tau$, dérivée de v suivant la ligne de courant du champ de vecteur $v(x)$. La loi de conservation $\partial\!\!\!/\cdot j = 0$ entraîne que ces lignes de courant existent toujours. Prenant alors le produit intérieur de (8-7) par v, Hestenes obtient :

$$m_0\dot{v} = eF\cdot v \qquad (8\text{-}8)$$

Or ceci est exactement l'équation du mouvement d'un corpuscule de charge e et de masse propre m_0 dans un champ électromagnétique F. La loi du guidage apparait donc comme une conséquence de l'équation non linéaire dans le cas particulier où $\partial\!\!\!/ \psi_0 = 0$, c'est à dire seulement lorsque la dynamique dépend essentiellement de la phase classique de l'onde. Dans le cas général, nous avons :

$$\partial\!\!\!/ \psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1} = [\frac{1}{2}\partial\!\!\!/ \ln\rho + \frac{1}{2}\partial\!\!\!/ \beta\gamma + \partial\!\!\!/ R\tilde{R}](-\sigma) \qquad (8\text{-}9)$$

L'équation non linéaire peut donc être écrite :

$$\frac{\hbar}{2}[\partial\!\!\!/ \ln\rho + \partial\!\!\!/ \beta\gamma + 2\partial\!\!\!/ R\tilde{R}]\sigma + m_0 v + \frac{e}{c}A = 0 \qquad (8\text{-}10)$$

Or une objection avait été faite par Heisenberg en 1927 à la localisation de la particule dans son onde, celle d'un miroir semi-transparent. Louis de Broglie y avait répondu en disant qu'après son arrivée sur le miroir, la particule se trouvait soit dans l'onde transmise, soit dans l'onde réfléchie. Mais il y voyait encore un problème, car "après avoir rencontré un nombre croissant de miroirs semi-transparents, une particule se trouverait finalement portée par une onde de plus en plus affaiblie. Peut-on imaginer qu'une onde v de plus en plus affaiblie continue à guider une particule?" Remarquons donc que l'équation d'évolution ne contient pas la densité ρ, mais seulement son logarithme; $\partial\!\!\!/(\ln\rho)$ est inchangé si ρ est divisé partout par un nombre aussi grand que l'on voudra. Il se peut donc qu'une onde de plus en plus affaiblie continue de guider la particule.

IX - SYMETRIE DE JAUGE

Soit $\psi' = \psi M$, où M est une matrice 4×4 fixe. Cherchons à quelle condition ψ' et ψ peuvent être toutes deux solutions de l'équation non linéaire. Nous avons :

$$\rho'^2 = \det\psi' = \det(\psi M) = \det\psi\det M = \rho^2\det M \qquad (9\text{-}1)$$

donc $\det M$ doit être un réel positif. En outre nous avons :

$$\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' = \psi'\psi'^{\dagger}\gamma_0 = \psi MM^{\dagger}\gamma_0\tilde{\psi} \qquad (9\text{-}2)$$

Donc nous obtiendrons $\psi'\gamma_0\tilde{\psi}' = \psi\gamma_0\tilde{\psi}$ si $MM^{\dagger} = I$, c'est à dire si M est unitaire. Mais alors nous aurons $\mid \det M \mid= 1$, et puisque $\det M$ est un réel positif, nous aurons nécessairement :

$$\det M = 1 \quad , \quad M^{\dagger} = M^{-1} \qquad (9\text{-}3)$$

Notons ici que les seules matrices unitaires intéressantes sont unimodulaires. C'est donc bien le groupe $SU(n)$ qui apparaît. Nous avons en outre :

$$\partial\!\!\!/\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} = \partial\!\!\!/\psi M\gamma_2\gamma_1 M^{-1}\psi^{-1} \tag{9-4}$$

Nous aurons donc $\partial\!\!\!/\psi'\gamma_2\gamma_1\psi'^{-1} = \partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1}$ si et seulement si $M\gamma_2\gamma_1 M^{-1} = \gamma_2\gamma_1$ c'est à dire si M commute avec $\gamma_2\gamma_1$. Enfin M doit appartenir à l'algèbre d'espace-temps pour que ψ' soit aussi un élément de cette algèbre. Donc M appartient au groupe de Lie G engendré par l'algèbre de Lie de base $(\gamma_2\gamma_1; \gamma; \gamma_3; \gamma_3\gamma)$. Si on impose à ψ' d'être aussi un élément pair de l'algèbre d'espace-temps alors la matrice M appartient au groupe commutatif engendré par $\gamma_2\gamma_1$ et γ et c'est seulement dans ce cas que nous obtenons les deux jauges électriques et chirales précédemment rencontrées (voir G.L. [2]). Hestenes [15] a remarqué que le groupe de Lie G est isomorphe au groupe de Lie $U(1) \times SU(2)$ de la théorie électro-faible. Il semble en effet très remarquable que le groupe de jauge de l'équation de Dirac linéaire ou non linéaire soit isomorphe au groupe de la théorie électro-faible, qui permet de décrire les deux sortes d'interaction des leptons.

EN CONCLUSION

Nous avons commencé ici l'étude d'une équation non linéaire assez proche de l'équation de Dirac. Elle ne diffère de l'équation de Dirac que par le terme de masse. La principale différence est que la densité d'énergie propre est toujours positive; la conjugaison de charge n'entraîne pas la présence d'énergies négatives. Il semble donc qu'il ne soit pas nécessaire de faire appel à la théorie des trous ou à la quantification des champs pour obtenir une équation d'ondes sans énergies négatives. Ceci nous semble un avantage important de l'équation non linéaire. Nous avons montré que les niveaux d'énergie, dans le cas de l'atome d'hydrogène, semblent devoir être proches de ceux de la théorie de Dirac, mais ceci reste à prouver. Il reste aussi à voir si cette équation révèle des qualités nouvelles dans des domaines encore inexplorés par l'équation de Dirac, notamment l'existence des différents leptons.

Références

[1] Louis de Broglie : *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire* Gauthier-Villars 1971

[2] G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole* International journal of Theoretical Physics Vol 24 no 10 1985

[3] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* $\frac{1}{2}$. Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol 8 n1983 et Vol 9 n1984

[4] G. Lochak :*The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* $\frac{1}{2}$ *magnetic monopole*. Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

[5] C. Daviau :*Electromagnétisme, monopôles magnétiques et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps* Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 14 net n1989

[6] D. Hestenes : *Real Spinor Fields*. Journal of Mathematical Physics Vol. 8 number 4. 1967

[7] D. Hestenes : *Clifford Algebra to Geometric Calculus* Reidel Pub. Co., Dordrecht Holland 1984

[8] R. Boudet :*La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps*. Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 13 n1988

[9] O. Costa de Beauregard :*Sur un tenseur ininterprété en théorie de Dirac* Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol.14 n1989

[10] P. Lounesto : *Clifford Algebras and Spinors* JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)

[11] R. W. Tucker : *A Clifford calculus for physical fiels theories* JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)

[12] F.G. Morris and K.R. Greider : *On conservation equations and the sources of classical fields* JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)

[13] A Crumeyrolle : *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras* Kluwer academic publishers 1990

[14] D. Hestenes : *A Unified Language for Mathematics and Physics* and *Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics*. JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)

[15] D. Hestenes : Found. Phys. **12** 63 (1982)

[16] P. Quilichini:*Calcul de l'angle de Takabyashi dans le cas de l'atome d'hydrogène*, C.R. Ac. Sc. **273 B** (1971) 829.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1989, révisé le 31 août 1990)