Sur le rôle de la relativité en mécanique ondulatoire

R. Dutheil et G. Lochak

Université de Poitiers, Faculté de Médecine, Département de Physique,
34 rue du Jardin des Plantes, 89034 POITIERS
CNRS et Fondation Louis de Broglie, 23 Quai de Conti, F-75006 PARIS

RESUME. Nous voulons montrer que la relativité est une base indispensable de la mécanique ondulatoire, ainsi que Louis de Broglie l'a toujours souligné. Pour cela, nous démontrons une sorte de réciproque de ses célèbres raisonnements. Au lieu de partir comme lui de la relativité, nous partons de la mécanique classique et de la théorie des ondes, puis nous définissons le dualisme onde-corpuscule par certaines conditions générales. Nous montrons alors que les lois de la relativité peuvent se déduire de ces hypothèses. Un point important est que le fameux résultat de de Broglie sur la vitesse de groupe n'est pas un lien suffisant entre les ondes et les corpuscules : le problème clé est celui de la vitesse de phase sur laquelle il avait lui-même souvent insisté.

ABSTRACT. The purpose of the present paper is to show that relativity is an essential basis for wave mechanics as de Broglie always underlined it. In order to do that, we demonstrate a kind of reciproque of the famous de Broglie demonstration. Instead of starting from relativity as he did, we start from classical mechanics and from wave theory, but with a definition of wave-particle dualism based on general conditions. Then we show that the laws of relativity can be deduced from these hypothese. An important point is that de Broglie's theorem on group velocity is not a sufficient connection between waves and particles : the key problem is the one of phase velocity, a point which was often emphasized by de Broglie himself.

On sait que Louis de Broglie, dès ses premiers travaux [1], a considéré la relativité comme la clé de voûte de la mécanique ondulatoire. Mais peu de temps après, Schrödinger, dans l'un de ses célèbres mémoires [2], a retrouvé plusieurs formules de la mécanique ondulatoire (en particulier la longueur d'onde et la vitesse de groupe) en ne faisant intervenir que la mécanique classique. Il se déclarait même très satisfait de ce que l'expression de la vitesse de groupe puisse s'obtenir sans la relativité, contrairement à ce qui ressortait de la thèse de Louis de Broglie.

A sa suite, de Broglie lui-même a introduit, dans plusieurs exposés, les formules de la mécanique ondulatoire à partir de la mécanique classique [3], [4], [5]. Mais il ne s'agissait chez lui que d'un procédé heuristique qui lui permettait de raccourcir certaines introductions; en fait, il continuait de baser sur la relativité l'essentiel de ses travaux. Il n'en demeure pas moins qu'il s'est créé comme une impression que la relativité n'a peut-être joué qu'un rôle historique dans l'élaboration de la mécanique ondulatoire mais sans avoir d'importance véritable pour ses fondements. C'est, en particulier, le cas de presque tous les travaux sur l'interprétation causale (voir par exemple [6], [7], [8]). Seul de Broglie s'est toujours appuyé, dans ce type de travaux, sur les équations relativistes de Klein-Gordon et de Dirac, ne citant l'équation de Schrödinger que comme une approximation, sinon dans la théorie des systèmes de corpuscules.

Pour ces raisons, nous nous sommes demandé à quel stade de la théorie, la relativité s'avère indispensable et jusqu'où il est possible d'aller sans l'utiliser. Nous verrons qu'elle est effectivement nécessaire.

1. Peut-on trouver la mécanique ondulatoire en partant de la mécanique classique?

Nous commencerons par supposer que nous ne connaissons pas la relativité. Cela nous interdit, par conséquent, le raisonnement initial de Louis de Broglie, mais nous allons le rappeler brièvement.

Il introduisait d'emblée la relativité et construisait un quadrivecteur de phase qu'il rapprochait du quadrivecteur impulsion-énergie du corpuscule. Il utilisait pour cela la loi de Planck:

$$E = h\nu \tag{1.1}$$

pour identifier les composantes temporelles ν/c et E/c des deux quadrivecteurs et il s'ensuivait (c'est là qu'intervient la relativité) l'identité des composantes d'espace $1/\lambda$ et p; d'où la fameuse formule de la longueur d'onde:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{1.2}$$

Grâce à l'identification des deux quadrivecteurs, de Broglie *déduisait* alors l'identité des principes de Maupertuis et de Fermat.

Comme nous voulons, pour l'instant, ignorer la relativité, nous ne pouvons pas introduire ces quadrivecteurs et nous devrons donc procéder autrement. Ce que nous allons faire dans ce paragraphe revient pour l'essentiel à ce que faisaient Schrödinger et de Broglie dans les références [2], [3], [4], [5]: nous partirons de l'identification *a priori* des principes de Maupertuis et de Fermat (comme l'avait fait Hamilton [9] mais sous une forme différente que nous examinerons par la suite).

Nous postulerons donc l'identité des deux formules extrêmales:

$$\delta \int_A^B mvds = \delta \int_A^B \frac{ds}{\lambda} = 0 \tag{1.3}$$

Mais, contrairement à Hamilton, nous ne regarderons pas les descriptions corpusculaire et ondulatoire comme alternatives. En accord avec le point de vue de de Broglie, nous supposerons une association, dans un même objet physique, entre l'onde et le corpuscule. Il sera, en outre, entendu par la suite que nous nous placerons dans le vide et en l'absence de champ extérieur.

L'intégrale de gauche dans (1.3) est prise le long de la trajectoire du corpuscule et celle de droite le long d'un rayon de l'onde associée: nous postulerons avec de Broglie que ces deux courbes coïncident. *Pour que cette identité ait lieu pour n'importe quel mouvement, il faut que les deux intégrants soient identiques, à une constante universelle près, ce qui entraine aussitôt la formule de De Broglie* (1.2).

En disant cela, nous supposons implicitement que notre constante de proportionnalité est identique à la constante de Planck, mais nous ne faisons ainsi qu'anticiper les résultats expérimentaux qui le prouvent, sans entamer la logique de notre raisonnement.

Introduisons maintenant la vitesse de phase V par la formule:

$$\lambda = \frac{V}{\nu} \tag{1.4}$$

En identifiant (1.2) et (1.4), nous aurons :

$$V = \frac{h\nu}{mv} \tag{1.5}$$

Comme le mouvement est inertiel, l'énergie du corpuscule est entièrement cinétique et, en vertu de la loi de Planck, nous avons :

$$E = h\nu = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.6}$$

En introduisant (1.6) dans (1.5), on obtient une relation entre la vitesse de phase V de l'onde et la vitesse v du corpuscule :

$$V = \frac{v}{2} \tag{1.7}$$

Curieusement, cette relation triviale n'est jamais écrite, or on voit qu'elle est très différente de la relation connue de de Broglie :

$$V = \frac{c^2}{v} \tag{1.8}$$

C'est un point capital sur lequel nous reviendrons. Néanmoins, la relation (1.7) montre une dispersion des ondes de phase puisque d'après (1.6), v devient fonction de la fréquence et par suite V également. Nous allons donc chercher la vitesse de groupe U de ces ondes par la formule classique de Rayleigh:

$$\frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{V}\right) \tag{1.9}$$

En introduisant dans (1.9) les formules (1.5) et (1.6), nous aurons :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h}\frac{d}{d\nu}(mv) = \frac{d}{vdv}(v) = \frac{1}{v} \tag{1.10}$$

Soit :

$$U = v \tag{1.11}$$

Autrement dit, nous retrouvons bien, à partir d'un calcul purement classique, que Schrödinger a effectué sous une forme un peu différente, le résultat que de Broglie avait obtenu en utilisant la relativité, à savoir que la vitesse de groupe des ondes est égale à la vitesse du corpuscule. Schrödinger soulignait spécialement le fait que cette relation "*ne découle pas nécessairement de la relativité mais est valable pour n'importe quel système de la mécanique classique*" [2]. Nous voyons donc qu'en restant dans le cadre de la mécanique classique et de la théorie des ondes et en postulant la loi de Planck et l'identité des principes de Maupertuis et de Fermat, on obtient:

a) La longueur d'onde de de Broglie (1.2).

b) Une relation (1.7) entre la vitesse de phase V de l'onde et la vitesse v du corpuscule.

c) La vitesse de groupe (1.11).

Parmi ces relations, quelles sont celles que nous pouvons vérifier expérimentalement? Tant que nous ne considérerons que des corpuscules matériels, par exemple des électrons, seule la formule (1.2) de la longueur d'onde sera accessible à l'expérience et tant que les corpuscules seront de faible énergie la formule, telle qu'elle est écrite, sera correcte. Nous ne pourrons pas vérifier la formule (1.11) de la vitesse de groupe car nous ne mesurons expérimentalement que la vitesse du corpuscule, ce qui ne prouve pas qu'elle est égale à la vitesse de groupe de l'onde. Mais ce qui reste surtout inaccessible, c'est l'énergie E , la vitesse de phase V et la fréquence ν.

Nous ne pouvons même pas prétendre vérifier la formule de Planck, puisque E et ν pourraient être faux tous les deux; de même, nous ne pouvons pas vérifier l'égalité (1.6), puisque v est mesuré mais non pas E et ν ; et surtout, nous ne pouvons rien dire de la relation (1.7) entre la vitesse de phase V et la vitesse du corpuscule v. Schrödinger était satisfait de retrouver la même vitesse de groupe que de Broglie mais cela ne prouve rien quant à la vitesse de phase. Notons encore qu'en mesurant λ la formule (1.4) ne nous donne que le rapport V/ν: il faudrait donc que nous accédions expérimentalement à l'une de ces deux grandeurs pour en déduire l'autre.

Ni V ni ν n'étant directement mesurables pour un corpuscule matériel, nous ferons appel à l'une des idées fondamentales de de Broglie qui était à l'origine de ses travaux: la mécanique ondulatoire doit être une théorie unique de la matière et de la lumière. Ses travaux sont même partis d'une théorie mécanique du photon et non pas d'une mécanique ondulatoire de la matière[1]. Du reste, le principe de Fermat étant issu de

[1] Cela signifie que, pour de Broglie, le photon est une particule comme les autres. Sa masse n'est donc pas nulle mais seulement très petite. N'oublions pas que la nullité de la masse du photon n'est pas un fait physique mais une conséquence théorique du principe d'invariance de jauge. L'expérience ne peut pas prouver qu'une mase est nulle, elle peut seulement prouver qu'elle est inférieure à une certaine borne, ce qui est le cas pour le photon.

l'optique et celui de Maupertuis de la mécanique: leur rapprochement implique nécessairement une synthèse entre ces deux sciences, ce que nous supposerons désormais explicitement. Or, pouvons-nous appliquer à la lumière les formules que nous avons obtenues jusqu'ici? C'est une question à laquelle nous pouvons répondre expérimentalement car, pour la lumière, contrairement à ce qui se passe pour les corpuscules matériels, on atteint aussi bien la vitesse de phase que la vitesse de groupe (et même la fréquence). Or ces vitesses sont égales dans le vide, ce qui invalide la formule (1.7). Du reste, si (1.7) avait été vraie, on l'aurait su dès le XVIII-ième siècle parce que la vitesse de la lumière mesurée par Römer eût été double de celle mesurée par Bradley: en effet, Römer, en se fondant sur le retard d'occultation des satellites de Jupiter, mesurait la vitesse de groupe, tandis que Bradley, avec l'aberration astronomique, mesurait la vitesse de phase [10], [11]. Bien entendu, cette distinction entre les deux vitesses n'était pas connue à l'époque, étant masquée par l'égalité des résultats dans le vide: on l'a vue plus tard, dans les mileux réfringents[2]. En conclusion, la relation (1.7) étant fausse, nous ne pouvons partir de la mécanique classique pour fonder la mécanique ondulatoire.

2. Conditions minimales du dualisme onde-corpuscules: elles sont incompatibles avec la mecanique classique et exigent la relativité.

Nous allons maintenant abandonner la mécanique classique mais sans introduire tout de suite la relativité. Restant toujours dans le cas du mouvement inertiel, nous définirons le dualisme des ondes et des corpuscules par les postulats suivants:

1) L'identité (1.3) des deux principes de Maupertuis et de Fermat.
2) La loi de Planck (1.1).
3) L'égalité (1.11) entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse du corpuscule.

[2] Rappelons que toutes les méthodes qui reposent sur la mesure de la vitesse d'un signal lumineux fournissent la vitesse de groupe (roue dentée de Fizeau ou cellule de Kerr, miroir tournant de Foucault, interféromètre de Michelson). Outre l'aberration astronomique, la vitesse de phase figure dans l'indice de réfraction et dans le rapport des unités électriques et magnétiques [12]; on la mesure également dans les cavités résonantes[10].

4) Abandonnant la mécanique classique et donc la formule (1.6), nous remplacerons celle-ci par la formule plus générale suivante (dans laquelle nous rappelons la loi de Planck déjà postulée):

$$E = h\nu = m(v)F(v) \tag{2.1}$$

v est la vitesse du corpuscule. Nous supposons donc seulement que l'énergie est proportionnelle à la masse, mais nous admettons que celle-ci peut dépendre de la vitesse, ainsi que le facteur inconnu F. Notons que, l'espace étant homogène et en l'absence de champ, si la masse n'est pas une constante absolue, elle ne peut dépendre que de v.

Soulignons que les postulats 1) et 3), qui décrivent l'essentiel du dualisme des ondes et des corpuscules, étaient chez de Broglie des théorèmes qu'il déduisait de la relativité, ce qui ne peut plus être le cas ici, puisque que nous n'incluons pas la relativité dans nos hypothèses. Nous verrons cependant que la relativité est la seule mécanique possible, mais à une condition, sans laquelle nous ne pourrions pas calculer les fonctions $m(v)$ et $F(v)$ et qui est donc la clé du problème: *nous admettrons le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide.*

Certes, on pourrait dire que ce principe n'est pas un postulat relativiste, mais un fait physique indépendant qui découle de l'observation des étoiles doubles, ainsi que l'a montré De Sitter, mais il n'en demeure pas moins que c'est ce principe là qui crée la brêche par laquelle s'introduit la relativité.

Nous savons, d'après le paragraphe précédent, que les deux premiers postulats que nous avons introduits entrainent la longueur d'onde de de Broglie (1.2) et la relation (1.5) dont nous aurons besoin.

En tenant compte des postulats 1) et 3), nous introduisons maintenant (1.1) et (1.11) dans la formule de Rayleigh (1.9) en tenant compte de (2.1). Il vient:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{d(mv)}{d(h\nu)} = \frac{d(mv)}{d(mF)} \tag{2.2}$$

d'où une première équation entre les deux fonctions inconnues $m(v)$ et $F(v)$:

$$\frac{d(mF)}{dv} = v\frac{d(mv)}{dv} \tag{2.3}$$

Remarquons que si on supposait que la masse ne dépend pas de v, on trouverait:

$$m = Cnte \Rightarrow \frac{dF}{dv} = v \Rightarrow F = \frac{1}{2}v^2 \tag{2.4}$$

et on retomberait sur le cas de la mécanique classique que nous avons déjà écarté. Nous supposerons donc que $m(v)$ est bien fonction de v.

Considérons pour cela le référentiel R_0 dans lequel le corpuscule est immobile et un référentiel R animé d'une vitesse v par rapport à R_0. L'espace et le temps seront désignés par (x_0, t_0) dans R_0 et par (x, t) dans R. Considérons une onde stationnaire dans R_0:

$$\Psi = \exp 2i\pi\nu_0 t_0 \tag{2.5}$$

Dans R elle deviendra une onde progressive de vitesse de phase V et de fréquence ν et prendra l'expression:

$$\Psi = \exp 2i\pi\nu(t - \frac{x}{v}) \tag{2.6}$$

La vitesse de phase V nous est donnée par la formule (1.5) dans laquelle nous introduirons (2.1), ce qui nous donnera:

$$V = \frac{F}{v} \tag{2.7}$$

Introduisons cette formule dans (2.6) et identifions (2.5) et (2.6). Ceci nous donne aussitôt la loi suivante pour la transformation du temps.

$$t_0 = \frac{m(v)F(v)}{h\nu_0}\big(t - \frac{vx}{F(v)}\big) \tag{2.8}$$

Pour trouver la loi de transformation de l'espace, nous considèrerons un signal lumineux qui parcourt l'intervalle (O, x_0) dans R_0 et l'intervalle correspondant (O, x) dans R. La vitesse de la lumière étant la même dans les deux référentiels (c'est ici qu'intervient le postulat), le temps de parcours sera égal à:

$$t_0 = \frac{x_0}{c} \quad \text{dans } \mathrm{R}_0 \text{ et} \quad t = \frac{x}{c} \quad \text{dans R} \tag{2.9}$$

En portant (2.9) dans (2.8), on trouve aussitôt la loi de transformation de l'espace:

$$x_0 = \frac{m(v)F(v)}{h\nu_0}\big(x - \frac{vc^2t}{F(v)}\big) \tag{2.10}$$

Il est facile de montrer que les transformations (2.8) et (2.10) forment un groupe et que leur loi de composition entraine la loi suivante de composition des vitesses qui rappelle la loi relativiste:

$$\frac{v''}{F(v'')} = \frac{\frac{v}{F(v)} + \frac{v'}{F(v')}}{1 + \frac{vv'c^2}{F(v)F(v')}} \tag{2.11}$$

Comme v est la vitesse de translation du référentiel R par rapport au référentiel R_0 il s'ensuit que si nous composons des transformations de vitesses opposées v et $v' = -v$, nous devrons obtenir la transformation unité (de vitesse nulle), ce qui entraine que la fonction $F(v)$ est paire:

$$\frac{v}{F(v)} + \frac{v'}{F(v')} = \frac{v}{F(v)} - \frac{v}{F(-v)} = 0, \quad \text{d'où} \quad F(v) = F(-v) \tag{2.12}$$

Inversons maintenant les transformations (2.8) et (2.10). On trouve:

$$\begin{aligned} t &= \frac{h\nu_0}{m(v)F(v)} \frac{1}{1 - \frac{v^2c^2}{F^2}} \big(t_0 + \frac{vx_0}{F(v)}\big) \quad , \\ x &= \frac{h\nu_0}{m(v)F(v)} \frac{1}{1 - \frac{v^2c^2}{F^2}} \big(t_0 + \frac{vc^2t_02}{F(v)}\big) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Or ces formules inverses doivent être identiques à celles que nous obtenons en changeant le signe de la vitesse v dans (2.8) et (2.10); et comme F(v) est paire il en résulte une seconde équation entre m(v) et F(v):

$$\frac{m(v)F(v)}{h\nu_0} = \frac{h\nu_0}{m(v)F(v)} \frac{1}{1 - \frac{v^2c^2}{F^2}} \tag{2.14}$$

D'où:

$$m^2F^2 = h^2\nu_0^2 + m^2v^2c^2 \tag{2.15}$$

Et il s'ensuit par dérivation:

$$mF\frac{d(mF)}{dv} = c^2 mv\frac{d(mv)}{dv} \tag{2.16}$$

D'où, en tenant compte de (2.3):

$$F(v) = c^2 \tag{2.17}$$

Ceci entraine, en vertu de (2.7), la relation de de Broglie entre la vitesse de phase et la vitesse de la particule:

$$Vv = c^2 \tag{2.18}$$

Et, d'après le postulat 3), c'est également la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Ensuite, d'après (2.17), la loi de composition des vitesses (2.11) donne la formule relativiste:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \tag{2.19}$$

D'autre part, la loi générale (2.1) devient la loi d'Einstein:

$$E = mc^2 \tag{2.20}$$

Si nous introduisons maintenant (2.17) dans (2.15), nous aurons:

$$mc^2 = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.21}$$

La forme habituelle de la dépendance relativiste de la masse par rapport à la vitesse s'ensuit d'après (2.20) et la loi de Planck:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.22}$$

la masse propre étant définie par la loi de Planck dans le système au repos R_0. Enfin, il suffit d'introduire (2.17) et (2.21) dans (2.8) et (2.10) pour retrouver les formules de transformation de Lorentz:

$$t_0 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x_0 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.23}$$

Résumons notre démarche:

– Nous avons d'abord défini le dualisme onde-corpuscule par trois postulats qui n'étaient autres que les lois de Planck et de de Broglie.
– Nous avons ensuite admis la proportionnalité entre l'énergie et la masse dans un système inertiel.

Cette forme admet comme cas particulier la mécanique classique et la relativité, mais elle pourrait, a priori, correspondre à une infinité d'autres dynamiques conservatives qui s'accorderaient avec la loi de de Broglie sur la vitesse de groupe. Mais nous avons montré que les quatre postulats ainsi posés ne sont en fait compatibles qu'avec deux dynamiques: la mécanique classique et la relativité. Or, la théorie de la lumière nous oblige à refuser la mécanique classique: il ne reste donc que la relativité, ainsi que de Broglie l'a toujours soutenu.

3. Une remarque au sujet d'un raisonnement de Hamilton.

Il est connu que Hamilton, ayant défini les surfaces d'action constante,

$$S = \text{cte} \tag{3.1}$$

a remarqué que la longueur du vecteur:

$$p = mv = \nabla S \tag{3.2}$$

varie à l'inverse de la vitesse V (donc de la vitesse de phase) du front d'onde défini par (3,1). C'est pourquoi il a donné à ce vecteur le nom de *vecteur de lenteur normale du front* [9] [13]. Cette remarque a conduit Hamilton à poser:

$$V = \frac{1}{v} \tag{3.3}$$

Cette relation est à la base de son analogie optico-mécanique: plus spécialement, de l'analogie (optique corpusculaire)–(optique ondulatoire).

Bien entendu, il n'était pas question chez Hamilton du concept de vitesse de groupe qui était encore inconnu. Mais nous allons voir que la relation (3,3) qui rappele, à première vue, la relation de de Broglie (1.8), est en fait incompatible avec la loi de Planck et ne pouvait donc en aucun cas conduire à la mécanique ondulatoire.

En effet, Hamilton semblait considérer (3,3) comme le conséquence directe d'un rapprochement entre les principes de Maupertuis et de Fermat. Or c'est impossible car il faudrait pour cela poser, dans (1.3) et (1.4):

$$m = \text{Cnte} \quad \text{et} \quad \nu = \text{Cnte} \tag{3.4}$$

En effet, en introduisant (1.4) dans (1.3) et en éliminant les facteurs devenus superflus m et ν , on pourrait alors écrire l'identité des principes extrêmaux sous la forme:

$$\delta \int_A^B v\, ds = \delta \int_A^B \frac{1}{V} ds = 0 \tag{3.5}$$

Cette égalité (qui est du reste inhomogène) donne bien la relation (3,3) (qui est inhomogène également). Mais les conditions (3,4) sont inadmissibles car:

a) En mécanique classique (celle de Hamilton) la seconde égalité (3,4) contredit la loi de Planck, puisqu'elle est contraire à l'égalité (1.6).

b) En mécanique relativiste, les égalités (3,4) contredisent à la fois la loi de Planck et l'équivalence de la masse et de l'énergie.

On voit donc qu'il serait inexact de prétendre que le seul rapprochement entre les principes de Maupertuis et de Fermat conduise à la formule de de Broglie (1.8). En revanche, nous avons montré au début de cet article que ce même rapprochement, correctement formulé, conduit à la formule de la longueur d'onde. Toutefois, comme nous l'avons vu, le vrai problème est celui de la vitesse de phase, sur lequel Louis de Broglie a toujours insisté, et c'est lui qui conduit à choisir la relativité.

Références

[1] L. de Broglie, Thèse de 1924

[2] E. Schrödinger, Ann. der Phys. (4), **79**, 489, 1926; E. Schrödinger, Mémoires sur la mécanique ondulatoire, Alcan, Paris, 1933.

[3] L. de Broglie, Théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique, Hermann, Paris, 1932.

[4] L. de Broglie, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
[5] L. de Broglie, Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
[6] D. Bohm, Phys. Rev. , **85**, 166; 85, 180, 1952.
[7] A. Belinfante, A survey of hidden variables theories , Pergamon, Oxford, 1973.
[8] A. Barut, M. Bozic, Ann. Fond. L. de Broglie, **15**, 67, 1990.
[9] W. R. Hamilton, Mathematical papers, Cambridge University Press,1940.
[10] P. Drude, Précis d'Optique (refondu et complété par Marcel Boll), Gauthier-Villars, Paris, 1911.
[11] G. Bruhat, Optique (édition revue revue et complétée par A. Kastler), Masson, Paris, 1965.
[12] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon, Oxford, 1964.
[13] V. Arnold, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, "Mir", Moscou, 1976.

(Manuscrit reçu le 27 juin 1990)