

## Contribution à l'étude fonctionnelle du système fondamental d'équations aux dérivées partielles, dans les théories électromagnétiques non linéaires du type Born-Infeld

J. LAMEAU, M. POGU, J.E. SOUZA DE CURSI

ENSM, 1 rue de la Noë,  
44072 Nantes Cedex 03 (France)

RESUME. On rappelle les hypothèses et le système d'équations fondamentales de la théorie. Les termes non linéaires ne sont pas monotones. De plus, les variables d'espace sont prises dans un domaine non borné. Ces deux faits constituent des difficultés notoires pour la résolution. Le but de cet article est de proposer une approche de la solution au moyen d'une formulation variationnelle. Le champ magnétique et le champ électrique sont supposés de carré sommable. Un choix convenable des espaces fonctionnels conduit à une équation variationnelle. On présente une méthode de résolution approchée, valable moyennant certaines hypothèses.

*ABSTRACT. A statement of the governing equations is formulated. Monotonicity properties do not hold for the nonlinear terms. Further, the space variable acts in an unbounded domain. This constitutes great difficulties. The aim of this article is to propound an approach of the solution by means of a variational formulation. The magnetic field and the electric field are taken square summable. A suitable choice of the functional spaces leads to a variational equation. A solution method is furnished provided that some assumptions are involved.*

### 1. Le système fondamental

On désigne par  $\vec{E}$  le champ électrique, par  $\vec{B}$  l'induction magnétique, par  $\vec{D}$  l'induction électrique, par  $\vec{H}$  le champ magnétique.

Les deux invariants fondamentaux sont

$$F = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \quad , \quad G = -\vec{B} \cdot \vec{E}$$

$L(F, G, \beta)$  désigne le lagrangien.  $\beta$  est une constante qui caractérise l'importance de la non-linéarité. Si  $\beta$  est nul, on retrouve le lagrangien de la théorie de Maxwell (se reporter à [4]). D'après [1], on sait que

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \frac{\partial L}{\partial F} \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \vec{B} \\ \vec{H} &= \frac{\partial L}{\partial F} \vec{B} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \vec{E}\end{aligned}$$

Les équations fondamentales sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0\end{aligned}$$

On se limitera au cas où le lagrangien ne dépend pas de l'invariant  $G$ . On a alors, si  $\rho = \partial L / \partial F$ ,

$$\vec{D} = \rho \vec{E} \quad , \quad \vec{H} = \rho \vec{B}.$$

Les équations fondamentales seront utilisées sous la forme suivante

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \tag{1-1}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{E}) - c \operatorname{rot}(\rho \vec{B}) = 0 \tag{1-3}$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{E}) = 0 \tag{1-4}$$

On suppose qu'à l'instant initial  $t = 0$ ,

$$\rho \vec{E} = c \operatorname{rot} \vec{d}_0, \tag{2}$$

$\vec{d}_0$  étant un champ vectoriel donné. Ceci est permis, puisque, d'après (1-4), le champ  $\rho \vec{E}$  dérive d'un potentiel-vecteur.

Le problème est de montrer que le système des équations fondamentales admet une solution dans  $[0, T]$ , où  $T > 0$  est un instant donné. On donne une méthode de résolution approchée de ce problème en cherchant

le couple  $(\vec{B}, \vec{E})$  de carré intégrable via une formulation variationnelle (se reporter par exemple à [2] pour cette notion).

## 2. Formulation variationnelle

### 2.1. Notations

Notons  $\Omega = \mathbf{R}^3$ ,  $Q = \Omega \times ]0, T[$ . On désigne par  $L^2$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Pour des champs vectoriels, l'espace  $L^2(\Omega)$  est muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_0 = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v}$$

de norme associée

$$|\vec{u}|_0 = \left( \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 \right)^{1/2}$$

L'espace  $L^2(Q)$  est muni du produit scalaire

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \int_Q \vec{u} \cdot \vec{v}$$

de norme associée

$$||\vec{u}|| = \left( \int_Q |\vec{u}|^2 \right)^{1/2}$$

On a l'identité

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \int_0^T (\vec{u}, \vec{v})_0 \quad (3)$$

Nous posons  $\mathbf{L}^2 = L^2 \times L^2$ , muni du produit scalaire induit par celui de  $L^2$ .

Etant donné  $n \in \mathbf{N}^+$ , on note  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R}^n)$  l'ensemble des fonctions  $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  indéfiniment dérivables et à support borné dans  $\Omega$ .

Enfin, on introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \{ \vec{\varphi} : Q \rightarrow \mathbf{R}^3, \vec{\varphi} \in C^\infty, \vec{\varphi}(T) = 0, \vec{\varphi}(t) \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R}^3) \}$$

## 2.2. Equation variationnelle associée au système fondamental

Utilisons (3) et multiplions (1-3) par  $\varphi \in \mathcal{V}$  dans le produit scalaire  $((\cdot, \cdot))$ . Intégrons par parties, à l'aide de (2). On a, puisque  $\vec{D} = \rho \vec{E}$  et que  $\varphi(T) = 0$ ,

$$\begin{aligned} ((\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{E}), \vec{\varphi})) &= [(\rho \vec{E}, \vec{\varphi})_0]^T - ((\rho \vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) \\ &= -(c \operatorname{rot} \vec{d}_0, \vec{\varphi}(0))_0 - ((\rho \vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) \end{aligned}$$

De même, puisque  $\vec{\varphi}(t) \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R}^3)$ , on obtient

$$((\operatorname{rot} \rho \vec{B}, \vec{\varphi})) = ((\rho \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{\varphi}))$$

Regroupons, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= ((\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{E}), \vec{\varphi})) - c((\operatorname{rot}(\rho \vec{B}), \vec{\varphi})) \\ &= -c(\operatorname{rot} \vec{d}_0, \vec{\varphi}(0))_0 - ((\rho \vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) - c((\rho \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{\varphi})), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$((\rho \vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) + ((\rho \vec{B}, c \operatorname{rot} \vec{\varphi})) = -c(\operatorname{rot} \vec{d}_0, \vec{\varphi}(0))_0 \quad (4)$$

Puisque  $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R}^3)$ , on obtient

$$(\operatorname{rot} \vec{d}_0, \vec{\varphi}(0))_0 = (\vec{d}_0, \operatorname{rot} \vec{\varphi}(0))_0$$

et (4) devient

$$((\rho \vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) - ((\rho \vec{B}, -c \operatorname{rot} \vec{\varphi})) = (\vec{d}_0, -c \operatorname{rot} \vec{\varphi}(0))_0 \quad (5)$$

Posons

$$\vec{u} = -c \operatorname{rot} \vec{\varphi} \quad , \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}$$

On a les identités

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (6)$$

Tenant compte de (5) et (6), on obtient

$$((\rho \vec{E}, \vec{v})) - ((\rho \vec{B}, \vec{u})) = (\vec{d}_0, \vec{u}(0))_0 \tag{7}$$

Il résulte de (1-1), (1-2) que  $(\vec{B}, \vec{E})$  satisfait (6). La relation (7) est une équation variationnelle associée au système (1)-(2). Dans la suite, on se place dans des espaces fonctionnels adaptés et on montre que la résolution de (7) implique celle de (1).

### 3. Espaces fonctionnels

La condition (6) nous incite à chercher  $(\vec{B}, \vec{E})$  dans l'espace suivant :

$$V = \{(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{L}^2(Q); \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{v} = 0, \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$$

C'est un espace fermé de  $\mathbf{L}^2(Q)$ , ce qui en fait un espace de Hilbert.

On utilise aussi

$$H^1(\Omega) = \{\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3; \partial^\alpha \vec{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} (\partial^\alpha \vec{u}, \partial^\alpha \vec{v})_0$$

C'est un espace de Hilbert (se reporter à [2], par exemple).

Soit  $H^{-1}$  le dual de  $H^1(\Omega)$ . On désigne par  $L^2(0, T; H^{-1})$  l'ensemble des fonctions  $[0, T] \rightarrow H^{-1}$  de carré intégrable. La dualité  $H^{-1}, H^1(\Omega)$  est notée  $\langle ., . \rangle$ .

*Proposition 1.* Pour  $(\vec{u}, \vec{v}) \in V$ , on a

$$\vec{u}(0) \in H^{-1} \tag{8}$$

*Démonstration.* Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in V$ . Par définition,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{v} \tag{1i}$$

Multiplions par  $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R}^3)$  dans la dualité  $H^{-1}, H^1(\Omega)$ . On obtient

$$\left\langle \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\varphi} \right\rangle = -c \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{\varphi} \rangle \tag{2i}$$

Par ailleurs l'identité

$$\langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{\varphi} \rangle = (\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{\varphi})_0$$

implique

$$|\operatorname{rot} \vec{v}|_{H^{-1}} \leq |\vec{v}|_0$$

D'où,

$$\int_0^T |\operatorname{rot} \vec{v}|_{H^{-1}}^2 \leq \int_0^T |\vec{v}|_0^2 \quad (3i)$$

Il résulte de (1i)-(3i) que

$$\int_0^T \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_{H^{-1}}^2 \leq C \int_0^T |\vec{v}|_0^2$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}) \quad (4i)$$

Or, on a par définition

$$\vec{u} \in L^2(0, T; H^{-1}) \quad (5i)$$

De (4i)(5i) on obtient (voir [2] par exemple)

$$\vec{u} \in C^0(0, T; H^{-1})$$

et (8) en résulte. ■

On suppose maintenant que

$$\vec{d}_0 \in H^1(\Omega) \quad (9)$$

*Proposition 2* S'il existe  $(\vec{B}, \vec{E}) \in V$  tel que

$$((\rho \vec{E}, \vec{v})) - ((\rho \vec{B}, \vec{u})) = l(\vec{u}) \quad , \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V \quad (10-1)$$

où l'on pose

$$l(\vec{u}) = \langle \vec{u}(0), \vec{d}_0 \rangle, \quad (10-2)$$

alors  $(\vec{B}, \vec{E})$  est solution de (1)-(2).

*Démonstration*

- a) Puisque  $(\vec{B}, \vec{E}) \in V$ , par définition on a (1-1) et (1-2).  
 b) Soit  $\theta \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{R})$ . Prenons

$$\vec{u} = 0 \quad , \quad \vec{v} = \nabla\theta$$

On a  $(\vec{u}, \vec{v}) \in V$ .

Reportons dans (10-1). On obtient

$$((\rho\vec{E}, \nabla\theta)) = 0 \quad ; \quad \langle \text{div}(\rho\vec{E}), \theta \rangle = 0 \quad , \quad \forall \theta \quad ; \quad \text{div}(\rho\vec{E}) = 0,$$

c'est-à-dire (1-4).

- c) Soit  $\vec{\varphi} \in \mathcal{V}$ . Prenons

$$\vec{u} = -c \text{rot } \vec{\varphi} \quad , \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}$$

On a  $(\vec{u}, \vec{v}) \in V$ . Reportons dans (10-1), il vient

$$((\rho\vec{E}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t})) + c((\rho\vec{B}, \text{rot } \vec{\varphi})) = -c \langle \text{rot } \vec{\varphi}(0), \vec{d}_0 \rangle$$

D'où, par intégration par parties,

$$(-\rho\vec{E}, \vec{\varphi}(0))_0 - ((\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{E}), \vec{\varphi})) + c((\rho\vec{B}, \text{rot } \vec{\varphi})) = -c \langle \text{rot } \vec{\varphi}(0), \vec{d}_0 \rangle \quad (1-i)$$

Dans (1-i) prenons  $\vec{\varphi}$  tel que  $\vec{\varphi}(0) = 0$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{E}) - c \text{rot}(\rho\vec{B}) = 0, \quad (2-i)$$

c'est-à-dire (1-3).

Tenant compte de (1i), (2i), on a

$$(-\rho\vec{E}, \vec{\varphi}(0))_0 = -c \langle \text{rot } \vec{\varphi}(0), \vec{d}_0 \rangle \quad , \quad \forall \vec{\varphi}$$

$$\rho\vec{E} = c \text{rot } \vec{d}_0,$$

c'est-à-dire (2). La proposition est établie.

#### 4. Résolution approchée

#### 4.1. Notations

Afin de faciliter l'écriture, introduisons quelques notations :

$$\begin{aligned} (\vec{B}, \vec{E}) &\rightarrow (u_1, u_2) = u \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow (v_1, v_2) = v \\ ((\vec{u}_1, \vec{v}_1)) + ((\vec{u}_2, \vec{v}_2)) &= {}^0(u, v) \end{aligned} \quad (11)$$

Avec ces notations, (10) s'écrit : "il existe  $u \in V$  tel que

$${}^0(\rho {}^t u, v) = l(v) \quad , \quad \forall v \in V." \quad (12-1)$$

où l'on pose

$${}^t u = (-u_1, u_2) \quad (12-2)$$

$$l(v) = \langle v_2(0), d_0 \rangle \quad (12-3)$$

#### 4.2. Un schéma itératif

a) Pour approcher (12), nous utilisons le schéma itératif suivant

$$u_0 \in V \quad \text{donné}, \quad {}^0(u_{n+1}, v) = {}^0(u_n, v) + \mu [{}^0(\rho_n {}^t u_n, v) - l(v)] \quad (13-1)$$

où l'on pose

$$\rho_n = \rho(F_n) = \rho(|u_{1n}|^2 - |u_{2n}|^2) \quad , \quad \mu > 0 \quad \text{étant fixé} \quad . \quad (13-2)$$

Ce schéma a été introduit par [3] dans des espaces généraux pour traiter des termes non linéaires plus simples que celui introduit en (13-2).

b) Notons

$$\delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

et multiplions (13-1) par  $\delta u_n$  dans le produit scalaire  ${}^0(., .)$ . Il vient

$${}^0|\delta u_n|^2 = \mu [{}^0(\rho_n {}^t u_n, \delta u_n) - l(\delta u_n)] \quad (14)$$

Etant donnés deux vecteurs  $x, \bar{x}$  de  $\mathbf{R}^6$ , on note

$$\delta x = \bar{x} - x \quad \tilde{x} = x + s\delta x \quad , \quad s \in ]0, 1[$$



On suppose que la fonction  $\rho$  est dérivable. (15)

Soit  $R$  une primitive de  $\rho$ . La formule de Taylor conduit à

$$R(\bar{F}) - R(F) = -2\rho(F)({}^t u \cdot \delta u) - \tilde{\rho}(|\delta u_1|^2 - |\delta u_2|^2) + 2\tilde{\rho}'({}^t \tilde{u} \cdot \delta u)^2 \quad (16)$$

où  $\tilde{\rho} = \rho(\tilde{F})$ .

A l'aide de (16), il vient

$$2\rho_n {}^t u_n \cdot \delta u_n = R(F_n) - R(F_{n+1}) - \tilde{\rho}_n(|\delta u_{1n}|^2 - |\delta u_{2n}|^2) + 2\tilde{\rho}'_n({}^t u_n \cdot \delta u_n)^2$$

De (14), on tire

$$2 {}^0|\delta u_n|^2 = \mu(J_n - J_{n+1}) + \mu K_n \quad (17)$$

où

$$\begin{aligned} J_n &= \int_Q R(F_n) - l(v_n) \\ K_n &= \int_Q -\tilde{\rho}_n(|\delta u_{1n}|^2 - |\delta u_{2n}|^2) + 2\tilde{\rho}'_n({}^t u_n \cdot \delta u_n)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

On suppose que

$$\rho, \rho' \text{ sont bornés } , \quad (19)$$

ce qui donne un sens à  $J_n$  et  $K_n$  (utiliser (16)).

De (19), on tire

$$K_n \leq C {}^0|\delta u_n|^2$$

Tenant compte de (17), on obtient

$$(2 - \mu C) {}^0|\delta u_n|^2 \leq \mu(J_n - J_{n+1}) \quad (20)$$

Admettons

$$|J_n| \leq C \quad (21)$$

Choisissons

$$0 < \mu < \frac{2}{C}$$

De (20), (21), on déduit que la suite des nombres réels  $J_n$  est décroissante et minorée. Elle admet donc une limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

De (20), on en déduit

$$({}^0|\delta u_n| \rightarrow 0) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad (22)$$

Par ailleurs, puisque  $V$  est fermé dans  $L^2(Q)$ , la projection  $P : L^2(Q) \rightarrow V$  est définie.

Il résulte de la Proposition 1 que  $l$  est une forme linéaire continue sur  $V$ . Le théorème de Riesz implique qu'il existe  $w \in V$  tel que

$$l(v) = {}^0(w, v) \quad , \quad \forall v \in V. \quad (23)$$

De (13-1) et (23) on déduit

$$\delta u_n = \mu P(\rho_n {}^t u_n - w)$$

et (22) implique

$${}^0|P(\rho_n {}^t u_n - w)| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Revenons aux notations initiales par (11) et notons  $V'$  le dual de  $V$ . La convergence en (24) signifie que l'on a établi le

*Théorème.* Sous les hypothèses (9), (15), (19), (21), pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $(\vec{B}_\epsilon, \vec{E}_\epsilon) \in V$  tel que

$$((\rho \vec{E}_\epsilon, \vec{v})) - ((\rho \vec{B}_\epsilon, \vec{u})) - l(\vec{u}) = r_\epsilon(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in V, \quad \text{où} \quad |r_\epsilon|_{V'} \leq \epsilon. \quad (25)$$

La relation (25) est une résolution approchée de (10), donc de (1)-(2) par la Proposition 2.

## 5. Commentaires

La Proposition 2 et le Théorème sont des résultats nouveaux à notre connaissance.

Des difficultés essentielles subsistent :

- les hypothèses (9), (15), (19) semblent naturelles, par contre la justification de l'hypothèse (21) est un problème ouvert ;
- la question de l'unicité de la solution de (1)-(2) se pose, elle provient de la non-monotonie de  $\rho$  [4]. Ce phénomène apparaît déjà en aérodynamique transsonique, où les équations sont plus simples qu'en (1) (voir par exemple [5][6]).

## Références

- [1] J. Lameau, *Remarques sur les théories de champ à bosses : équations du mouvement d'une particule, onde et moment magnétique associés à une particule*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 13, n°2, 1988.

- [2] R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique : méthodes variationnelles*, Volume 4, Masson, 1988.
- [3] W.V. Petryshyn, *On the extension and the solution of non linear operator equations*, III- Journal of Math., **10**, n<sup>o</sup>2, 1966.
- [4] J. Lameau, *Remarques sur le choix des équations fondamentales dans les théories de champ à bosses*, Annales de la Fondation Louis de Broglie **15**, n<sup>o</sup>2, 1989.
- [5] J. Neccas, *Ecoulements de fluide : compacité par entropie*, Masson, 1989.
- [6] M. Pogu et J.E. Souza de Cursi, *Contribution à l'étude de problèmes aux limites non monotones stationnaires*, Rapport d'activité du Laboratoire de Mathématiques, ENSM, Nantes, 1989.

*(Manuscrit reçu le 26 juin 1990)*