# Particules et particules test en relativité générale*

N. Stavroulakis

Faculté des Sciences de Limoges
123, avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

*Un point est ce qui n'a aucune partie.*
Euclide : "Les Eléments"

RESUME. L'existence de points matériels, c'est-à-dire de points mathématiques, au repos ou en mouvement, munis de masse, est postulée aussi bien en Physique Classique qu'en Mécanique Quantique. Le présent travail se propose de discuter la position de ce postulat en Relativité Générale. On montre que les particules, considérées par rapport à leurs référentiels propres en tant que sources de champs $\Theta(4)$-invariants, ne peuvent êtres conçues que comme objets étendus non euclidiens. Ainsi la notion de point matériel est incompatible avec la Relativité Générale. En ce qui concerne les points matériels en mouvement, appelés particules test et couramment introduits dans cette théorie, ils ne peuvent être admis que comme abstraction destinée à la description approximative, plus ou moins acceptable suivant le problème étudié, du mouvement de particules étendues. Malgré l'impossibilité de justification rigoureuse d'une telle approximation, la notion de particule test permet de rendre compte de certaines caractéristiques essentielles, inconnues à la Mécanique Classique, du mouvement des particules.

*ABSTRACT. Classical Physics as well as Quantum Mechanics postulates the existence of point masses, namely of mathematical points, at rest or in motion, endowed with mass. The present paper deals with the position of this postulate in General Relativity. It is shown that the particles at rest, considered with respect to their proper frames of reference as sources of $\Theta(4)$-invariant fields, can be conceived only as extended non-Euclidean objects. Thus the notion of point mass is incompatible with General Relativity. Regarding the*

* Séminaire présenté à la Fondation Louis de Broglie le 12 février 1990.

*point masses in motion, called test particles and commonly accepted in this theory, they merely account for an approximate description of the motion of extended particles. In spite of the shortcomings of such an approximation, the notion of test particle brings out significant information revealing new features, unknown in Classical Mechanics, of the motion of particles.*

## 1. Introduction

La notion de point matériel imprègne toute la Physique depuis la Mécanique Classique jusqu'aux théories récentes, de sorte que, dans le cadre des formalismes actuels, il semble impossible de s'en passer. Cependant il s'agit d'une notion qui associe deux idées contradictoires : d'une part le point mathématique, objet abstrait de mesure de Lebesgue nulle, et d'autre part une quantité de mesure non nulle, la masse, qui n'est concevable intuitivement que par rapport à des objets tridimensionnels de mesure de Lebesgue non nulle. La théorie des distributions, et en particulier l'introduction de la mesure de Dirac, a légitimé, sur le plan mathématique, les calculs avec des "masses ponctuelles", "des charges ponctuelles" etc., sans pour autant pouvoir lever l'antinomie signalée sur le plan physique. En fait celle-ci ne peut être supprimée que par l'introduction de modèles de particules étendues, comme celui établi dans la travail remarquable de F. Fer [10] pour l'électron. Cette nécessité a été déjà soulignée par Einstein dans sa critique de la théorie de Maxwell-Lorentz : "La combinaison de l'idée d'un champ continu avec celle de points matériels discontinus dans l'espace apparaît comme contradictoire. Une théorie cohérente du champ exige que tous les éléments qui y figurent soient continus... De là vient que la particule matérielle n'a pas de place comme concept fondamental dans une théorie du champ... Nous pourrions regarder la matière comme constituée par des régions de l'espace où le champ est extrêmement intense". En ce qui concerne L. de Broglie, sa position vis-à-vis de ce problème s'est clarifiée au cours de l'évolution de ses idées sur le dualisme onde-corpuscule. En commentant son premier article de 1927 sur la théorie de la double solution [5], il écrivait 29 ans plus tard [6] : "Je cherchais à me représenter le corpuscule comme une sorte d'accident local dans la structure de l'onde... J'admettais alors que la fonction d'onde possédait au centre de cette petite région une véritable singularité mathématique avec valeur infinie, mais j'ai préféré depuis, en accord avec certaines idées d'Einstein, ne pas introduire cette hypothèse".

En Mécanique, Classique ou Quantique, un point matériel est par définition un point mathématique auquel on associe un nombre réel strictement positif, sa masse. Une telle définition n'a pas en principe de sens en Relativité Générale. Dans cette théorie nous avons affaire aux mouvements de corps étendus, nécessairement déformables, sous l'action des champs gravitationnels qu'ils engendrent. Or, les difficultés mathématiques des problèmes qui en résultent étant insurmontables, la confrontation de la théorie avec les observations et les expériences a nécessité l'introduction d'hypothèses simplificatrices susceptibles de donner lieu à des résultats approximatifs acceptables. Einstein assimilait déjà les planètes à des points matériels dans le champ gravitationnel du soleil. En fait les équations de gravitation furent secondées dès le début par un postulat supplémentaire, à savoir que, dans les régions de l'espace-temps où le tenseur d'impulsion-énergie s'annule, la ligne d'univers d'un corpuscule est une géodésique de la métrique. Les tentatives de justification de ce postulat ont eu des répercussions significatives dans le développement de la Relativité Générale. Elles ont aussi influencé les idées de L. de Broglie sur le dualisme onde-corpuscule [6] : "L'idée d'attribuer à l'onde une équation non linéaire m'a été suggérée par l'analogie existant entre la conception du guidage d'un corpuscule par l'onde environnante et les résultats de MM. Georges Darmois et Einstein au sujet du mouvement d'une particule en Relativité Générale... Einstein a cherché à démontrer à partir des seules équations $R_{ik} - g_{ik}R/2 = 0$, débarrassées de leur second membre en $T_{ik}$, que, s'il existe une région extrêmement petite où le champ prend des valeurs extrêmement élevées, le mouvement dans l'espace de cette région au cours du temps est nécessairement représenté par une ligne d'univers qui est une géodésique de l'espace-temps... Il put donner une démonstration de cet important résultat en 1927 dans un mémoire en collaboration avec M. Grommer"[9].

En réalité le postulat des géodésiques n'a jamais été établi rigoureusement sur la base des équations d'Einstein, et d'habitude on l'introduit comme une vérité allant de soi (cf. [11]) en dissimulant les difficultés qui s'y rattachent. R.H. Schattner [13] a démontré que, si le support d'une distribution singulière d'impulsion-énergie satisfaisant aux conditions habituelles est une ligne pour laquelle $ds^2 > 0$, alors celle-ci est une géodésique de l'espace-temps. Mais une telle distribution est incompatible avec les équations d'Einstein et ne représente pas en conséquence le mouvement d'un corpuscule en Relativité Générale. Comme le constate J. Ehlers [8] : "Perhaps surprisingly, even the simpler problem of deriving the geodesic law for test bodies has not been rigorously solved... Statements about test bodies ought to be considered as limits of statements about heavy bodies... so that they may be applied, as approximations, whenever actual bodies satisfy nearly the conditions characterizing the limit. The formally convenient textbook definition of a test body as one which has no self-field is inadequate since it excludes most cases to which one would like to apply the test body concept... Newtonian theory and approximation methods indicate that that law holds approximately provided I) the size of the body in question is small compared to the scale on which the external field changes, II) the world line used to represent the body is chosen appropriately, and III) the connection with respect to which that world line is geodesic is an external one. It still remains a challenge to derive a corresponding limit theorem from the field equation".

Cependant l'idée que, dans les régions où le tenseur d'impulsion-énergie s'annule, c'est-à-dire dans les régions où il n'y a que la gravitation pure, les géodésiques de la métrique doivent avoir une signification physique vient tout naturellement à l'esprit, et c'est cette idée qui nous amène à admettre le postulat des géodésiques avec tous les problèmes logiques et mathématiques qui en résultent. En fait la notion de géodésique ou, plus généralement, de ligne d'univers est une abstraction poussée, car elle se rapporte au mouvement d'un point mathématique. Mais pour un objet étendu dans l'espace, même de dimensions très petites par rapport à l'échelle de variation du champ extérieur, qu'est-ce que c'est qu'une ligne d'univers ? On ne peut la définir qu'en s'imaginant un petit objet, certes déformable, mais gardant des symétries permettant de lui attribuer un centre au cours de son mouvement. C'est alors la ligne d'univers du centre qui possède une signification mathématique. Ensuite on suppose que les effets dus au champ propre du corpuscule considéré aient une influence négligeable sur la métrique, de sorte que la ligne d'univers ainsi introduite peut s'identifier, avec une certaine approximation, à une géodésique de l'espace-temps. C'est dans cet esprit que nous utilisons la notion de particule test dans les régions de l'espace-temps où il n'existe que la gravitation. Toutefois, dans le contexte envisagé, on peut avancer davantage en prenant en considération le cas plus général où le tenseur d'impulsion-énergie, sans être nul, est celui du champ électromagnétique à l'extérieur des sources chargées. Alors, si la particule test est chargée, la ligne d'univers de son centre ne sera plus identifiable à une géodésique, mais de toute façon elle pourra être déterminée par les équations de mouvement d'Einstein-Maxwell.

Nous venons de raisonner sur le cas d'une particule de masse au repos non nulle. Lorsque la particule est de masse au repos nulle, le postulat des géodésiques est plus facile à admettre, car la ligne d'univers est alors tout d'abord une ligne isotrope, c'est-à-dire telle que $ds^2 = 0$, de sorte que la condition supplémentaire sur son caractère géodésique s'impose ensuite comme un principe simple permettant de compléter sa détermination.

Cela dit, le présent article se propose deux objectifs.

Dans un premier temps nous allons étudier de façon détaillée les sources $\Theta(4)$-invariantes, donc aussi en particulier les particules $\Theta(4)$-invariantes, dans leurs référentiels propres, afin d'établir l'impossibilité de réalisation d'un point matériel dans le cadre de la Relativité Générale. Pour aboutir à cette conclusion, il faut bien le noter, nous n'avons pas besoin de recourir à la structure interne des particules. C'est simplement leur structure géométrique non euclidienne qui se trouve à la base de ce résultat. Toute distribution de matière $\Theta(4)$-invariante est limitée par une sphère qui est caractérisée non seulement pas son rayon $\sigma(t)$, mais aussi par son rayon de courbure $\zeta(t)$. Or la conception de point matériel présuppose un passage à la limite obtenue en faisant tendre $\sigma(t)$ vers zéro. En Mécanique Classique, où l'on a affaire au calcul de la force gravitationnelle, malgré les difficultés conceptuelles de cette démarche, il n'en résulte pas de difficultés techniques, car la sphère est alors un objet euclidien, de sorte que le résultat du calcul ne fait apparaître que la masse totale. En Relativité Générale la situation est tout à fait différente : le rayon $\sigma(t)$ ne peut tendre vers zéro que si $\zeta(t)$ en fait autant, ce qui est impossible car la solution des équations d'Einstein impose une borne inférieure strictement positive à la fonction $\zeta(t)$.

Dans un deuxième temps nous allons étudier le mouvement d'une particule test dans le champ d'une source $\Theta(4)$-invariante afin de mettre en évidence des propriétés qui ne sont pas concevables dans les modèles de la Mécanique Classique. Bien entendu la notion de particule test se rapporte à la description approximative du mouvement d'une particule étendue, et alors, dans le degré d'approximation envisagé, les dimensions et la structure interne de la particule n'entrent pas en considération, les seules quantités intervenant dans le calcul étant sa masse, sa charge et son impulsion-énergie. En dépit de toutes les simplifications ainsi introduites, l'utilisation de la notion de particule test apporte des éléments de réponse à la question fondamentale : Quelle est l'influence d'un état dynamique du champ sur les mouvements des particules ? Il se trouve en particulier que les oscillations de la source induisent, par l'intermédiaire des états dynamiques qui en résultent, un déplacement radial continu de la particule test par rapport aux orbites stationnaires. De telles propriétés sont d'une importance capitale, même si l'on n'est pas en mesure de leur associer une évaluation quantitative tout à fait précise à cause de paramètres et de fonctions de nature non euclidienne dont on ne connait pas la détermination exacte.

## 2. Sur la notion de particule en relativité générale

Bien que la conception de point matériel se heurte aux principes de la Relativité Générale et aux résultats qui s'en déduisent, elle persiste toujours et même sous une forme plus ou moins métaphysique à la suite des aberrations mathématiques et physiques introduites par la solution de Schwarzschild et la théorie des trous noirs. C'est pourquoi il s'avère nécessaire d'approfondir les conclusions déduites des équations d'Einstein dans un article antérieur [14]. Nous allons reprendre le problème de la minoration du rayon de la source afin de clarifier de façon aussi complète que possible ses divers aspects qui concernent aussi bien les états stationnaires que les états dynamiques des champs $\Theta(4)$-invariants. Dans un premier temps nous allons nous borner aux conclusions résultant des propriétés générales des métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes sans faire aucun appel aux équations d'Einstein. En partant alors d'une métrique associée à une source étendue $\Theta(4)$-invariante, nous allons mettre en évidence les incohérences qui s'introduisent lorsqu'on fait tendre vers zéro le rayon de la source, c'est-à-dire lorsqu'on se permet d'accepter la formation d'une source ponctuelle. Dans un deuxième temps nous allons expliciter l'information, beaucoup plus significative, apportée par les solutions des équations de gravitation, qui interdisent dans tous les cas, l'annulation du rayon de courbure, donc aussi du rayon, du bord sphérique de la source.

### 2.1. Incompatibilité de la notion de point matériel avec les propriétés générales des métriques

Considérons maintenant la métrique générale $\Theta(4)$-invariante, conçue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, qui est associée à une distribution $\Theta(4)$-invariante de matière de rayon $\sigma(\tau)$, fonction $C^\infty$ du temps $\tau$. Etant donné que le point auquel on s'intéresse spécialement est le centre de la source du champ, c'est-à-dire le point dont la ligne d'univers est la sous-variété $\mathbf{R} \times \{(0,0,0)\}$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, il est absolument indispensable de s'en tenir à la variété $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, contrairement à la pratique courante des relativistes qui remplacent $\mathbf{R} \times \{(0,0,0)\}$ par le bord d'une variété à bord et font disparaître ainsi l'objet même de la discussion.

Cela dit, afin de conduire les calculs de façon aussi simple que possible, nous écrivons la métrique sous une forme légèrement différente de celle déjà utilisée [14] :

$$\begin{aligned} ds^2 =& (f(\tau,\rho)d\tau + f_1(\tau,\rho)(xdx))^2 \\ & - \left[(l_1(\tau,\rho))^2 dx^2 + ((l(\tau,\rho))^2 - (l_1(\tau,\rho))^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad , \quad xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 \quad ,$$

$$dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

les fonctions $f(\tau,\rho)$, $f_1(\tau,\rho)$, $l(\tau,\rho)$, $l_1(\tau,\rho)$ étant $C^\infty$ sur $\mathbf{R} \times [0,+\infty[$ et satisfaisant aux conditions :

$$f(\tau,\rho) > 0 \quad , \quad l(\tau,\rho) > 0 \quad , \quad l_1(\tau,\rho) > 0 \quad ,$$

$$\rho|f_1(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho) \quad , \quad l(\tau,0) = l_1(\tau,0) \quad , \quad \frac{\partial l(\tau,0)}{\partial\rho} = \frac{\partial l_1(\tau,0)}{\partial\rho}. \tag{2.2}$$

Le fait que la norme $|x|$ n'est pas différentiable à l'origine pose des problèmes au sujet de la différentiabilité des fonctions $f$, $f_1$, $l$, $l_1$ sur la sous variété $\mathbf{R} \times \{(0,0,0)\}$ par rapport aux coordonnées $\tau$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, ce qui nécessite l'introduction de certaines conditions locales supplémentaires. Mais celles-ci n'interviennent pas dans notre discussion. La différentiabilité par rapport à $(\tau,\rho)$ nous sera suffisante. D'autre part, puisque les conditions (2.2) sont imposées d'avance à toute métrique admissible $\Theta(4)$-invariante, les relations :

$$l(\tau,0) = l_1(\tau,0) \quad , \quad \frac{\partial l(\tau,0)}{\partial\rho} = \frac{\partial l_1(\tau,0)}{\partial\rho}$$

doivent en particulier figurer en tant que conditions initiales dans toute solution intérieure des équations de gravitation.

*Proposition 2.1. La propagation de la lumière émise radialement du bord de la matière est un phénomène incompatible avec la formation d'une source ponctuelle.*

*Démonstration.* Nous supposons au départ $\sigma(\tau) > 0$ et ensuite nous examinons le comportement de la métrique lorsqu'on fait tendre $\sigma(\tau)$ vers zéro. De façon plus précise, nous définissons une homotopie $C^\infty$ :

$$\sigma : [0,1] \times \mathbf{R} \to [0 + \infty[$$

telle que

$$\sigma(0,\tau) = \sigma(\tau) \quad , \quad \sigma(1,\tau) = 0 \quad , \quad \sigma(u,\tau) > 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in [0,1[,$$

et nous supposons que, pour chaque valeur du paramètre $u \in [0,1]$, le rayon de la source soit représenté par la fonction $\sigma(u,\tau)$ qui se réduit ainsi uniformément à la valeur zéro par déformation continue sur tout intervalle compact de valeurs de $\tau$.

Cela dit, on sait [15] que la loi de propagation de la lumière émise radialement du bord de la source à l'instant $t$ s'obtient en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-\rho f_1(\tau,\rho) + l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)}$$

et en choisissant la solution, notée $\xi(t,\rho)$, qui prend la valeur $t$ pour $\rho = \sigma(t)$. La signification physique de la métrique impose la validité globale de $\xi(t,\rho)$ pour tout $\rho \geq \sigma(t)$, et puisque

$$\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial t} > 0,$$

on peut introduire $t$ comme nouvelle coordonnée temporelle à l'extérieur et sur le bord de la matière. Mais alors la transformation $\tau = \xi(t,\rho)$ est autorisée, et, appliquée à (2.1), nous donne

$$\begin{aligned} ds^2 = &\big(f(\xi(t,\rho),\rho)\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial t}dt + \frac{l(\xi(t,\rho),\rho)}{\rho}(xdx)\big)^2 \\ &- \big[(l_1(\xi(t,\rho),\rho))^2 dx^2 + ((l(\xi(t,\rho),\rho))^2 - (l_1(\xi(t,\rho),\rho))^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\big], \end{aligned}$$

de sorte que, en écrivant $f(t,\rho)$, $l(t,\rho)$, $l_1(t,\rho)$ respectivement au lieu de

$$f(\xi(t,\rho),\rho)\frac{\partial\xi(t,\rho)}{\partial t} \quad , \quad l(\xi(t,\rho),\rho) \quad , \quad l_1(\xi(t,\rho),\rho),$$

on obtient la forme canonique [15] de la métrique

$$\begin{aligned} ds^2 =& (f(t,\rho)dt + \frac{l(t,\rho)}{\rho}(xdx))^2 \\ &- \left[(l_1(t,\rho))^2 dx^2 + ((l(t,\rho))^2 - (l_1(t,\rho))^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui est valable sur le fermé

$$\{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \quad , \quad |x| \geq \sigma(t) > 0\}.$$

La validité de (2.3) à l'extérieur et sur le bord de la matière étant établie sur la base de la loi de propagation de la lumière, nous pouvons désormais raisonner directement sur (2.3) sans faire appel à la métrique générale (2.1). La particularité de (2.3) par rapport à (2.1) consiste au rôle spécifique de la fonction $f_1(t,\rho)$ qui est définie actuellement par la donnée de $l(t,\rho)$ :

$$f_1(t,\rho) = \frac{l(t,\rho)}{\rho}.$$

Supposons maintenant que $\sigma(t) > 0$ tende vers zéro moyennant l'homotopie indiquée. Alors les fonctions intervenant dans la construction du tenseur métrique dépendent continûment du paramètre $u$ et seront ainsi prolongées, à partir de la détermination correspondant à la valeur $u = 0$, en une détermination correspondant à la valeur $u = 1$ qui donne lieu au rayon nul. En d'autres termes (2.3) sera prolongée en une métrique sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Supposons que celle-ci soit admissible. Il en résulte en particulier la validité des conditions :

$$l(t,0) = l_1(t,0) \quad , \quad \frac{\partial l(t,0)}{\partial\rho} = \frac{\partial l_1(t,0)}{\partial\rho},$$

qui entraînent la convergence de

$$\frac{(l(t,\rho))^2 - (l_1(t,\rho))^2}{\rho^2} = \frac{l(t,\rho) - l_1(t,\rho)}{\rho^2}(l(t,\rho) + l_1(t,\rho))$$

vers une limite finie, donc aussi la convergence de

$$((l(t,\rho))^2 - (l_1(t,\rho))^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}$$

vers zéro lorsque $|x| = \rho \to 0$. Ainsi la partie spatiale de (2.3) sera bien définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Mais du fait que $l(t,0) > 0$, la fonction

$$f_1(t,\rho) = \frac{l(t,\rho)}{\rho}$$

tend vers $+\infty$ lorsque $\rho \to 0$, de sorte que la métrique est en réalité non admissible.

On pourrait objecter à ce raisonnement le fait que, par rapport à (2.3), la fonction $l(t,\rho)/\rho$ intervient uniquement dans l'expression

$$\frac{l(t,\rho)}{\rho}(xdx),$$

qui, écrite sous la forme

$$l(t,|x|)(\frac{x_1}{|x|}dx_1 + \frac{x_2}{|x|}dx_2 + \frac{x_3}{|x_|}dx_3),$$

nous dispense de la valeur infinie de $\lim_{\rho\to 0} l(t,\rho)/\rho$. Mais l'incohérence subsiste alors sous une autre forme : les fonctions $x_i/|x|$, $(i = 1,2,3)$, n'ayant pas de limites pour $|x| \to 0$, les conditions $f(t,0) > 0$ et $l(t,0) > 0$ entraînent la discontinuité des composantes $f(t,\rho)l(t,\rho)x_i/\rho$, $(i = 1,2,3)$, du tenseur métrique sur $\mathbf{R} \times \{(0,0,0)\}$.

En conclusion, il n'existe pas de métrique admissible compatible avec la notion de source ponctuelle.

*Corollaire 2.1. Le rayon $\sigma(t)$ de la sphère limitant la source possède une borne inférieure strictement positive sur tout intervalle compact de valeurs de $t$, et il en est de même, en conséquence, de son rayon de courbure $\zeta(t) = g(t,\sigma(t))$, considéré par rapport à la métrique riemannienne induite.*

### 2.2. Incompatibilité de la notion de point matériel avec la solution extérieure des équations d'Einstein

Nous savons [15] que la solution extérieure relative à la métrique canonique (2.3) s'obtient sous une forme très commode en introduisant la fonction :

$$g(t,\rho) = \rho l_1(t,\rho)$$

qui représente le rayon de courbure de la sphère $|x| = \rho$, considérée avec la métrique riemannienne induite. Les fonctions inconnues $f(t, \rho)$, $l(t, \rho)$, $g(t, \rho)$ satisfont alors au système des deux équations :

$$fl = c\frac{\partial g}{\partial \rho} \tag{2.4}$$

$$\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g) = (\frac{1}{l}\frac{\partial g}{\partial \rho})^2 \tag{2.5}$$

avec

$$Q(g) = 1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2 \quad , \quad \mu = \frac{km}{c^2} \quad , \quad \nu = \frac{e\sqrt{k}}{c^2} \quad , \quad \lambda \geq 0,$$

$m$ et $e$ étant respectivement la masse et la charge de la distribution considérée de matière. Ainsi la métrique relative à la solution extérieure s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = (f(t,\rho))^2 dt^2 + 2c\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho}\frac{xdx}{\rho}dt - (\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2 dx^2 + (\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2\frac{(xdx)^2}{\rho^2}$$

qui met en évidence le rôle prépondérant du potentiel

$$(f(t,\rho))^2 = c^2(\frac{2}{c}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} + Q(g(t,\rho))).$$

En ce qui concerne le potentiel électrique, il est donné par la formule :

$$P(t,\rho) = \frac{e}{g(t,\rho)}.$$

Cela dit, il est naturel de se demander si la solution extérieure apporte des éléments nouveaux à notre problème, c'est-à-dire si elle fait apparaître d'autres situations, à part celles déjà vues, incompatibles avec la notion de source ponctuelle. En fait la proposition 2.1 est fondée essentiellement sur le comportement de la fonction $f_1(t, \rho)$, tandis que la solution extérieure est commandée par la fonction $g(t, \rho)$. Or cette solution, nous allons le constater, impose à son tour des minorations strictement positives à $g(t, \rho)$ en excluant ainsi, a fortiori, la formation d'une source ponctuelle (dont le rayon de courbure serait nul).

Nous allons considérer d'abord les champs stationnaires et ensuite les champs dynamiques. Ceux-ci sont en général des champs avec diffusion d'ondes gravitationnelles. Les champs dynamiques sans diffusion d'ondes, appelés aussi champs de Huyghens [15], sont définis par une fonction $g(t, \rho)$ qui résulte de la fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ des états stationnaires en y remplaçant les constantes $\sigma_0$ et $\zeta_0$ respectivement par $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$, $t$ parcourant un certain intervalle ouvert $]\beta_1, \beta_2[$. Ainsi les champs de Huyghens se rattachent strictement aux états du bord de la source, de sorte que le problème de la minoration de $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$ se ramène au problème relatif à la fonction $g(\sigma_0, \zeta_0, \rho)$ des états stationnaires, si, pour toute valeur fixée $t_1 \in ]\beta_1, \beta_2[$, $(\sigma(t_1), \zeta(t_1))$ représente un état stationnaire possible (c'est-à-dire compatible avec les équations de gravitation des états stationnaires) du bord. Cela est vrai, on le verra dans un instant, mais on ne peut pas le garantir sans une étude préalable. D'ailleurs, comme il s'agit d'une propriété du bord de la source, sa validité ne concerne pas spécifiquement les champs de Huyghens. C'est pourquoi le problème de la minoration de $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$ ne sera pas traité indépendamment du problème général relatif à la minoration des fonctions $g(t, \rho)$ qui définissent des champs avec diffusion d'ondes.

### 2.2.1. Minorations de la fonction $g$ relative aux états stationnaires

Le champ passe dans un état stationnaire lorsque $t$ parcourt un intervalle fermé $I$ tel que $\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} = 0$ pour tout $t \in I$.Alors les fonctions $f, l, g$ dépendent uniquement de $\rho$, de sorte que nous avons à étudier les minorations de $g(\rho)$ qui résultent de la solution stationnaire :

$$f(\rho)l(\rho) = c\frac{dg(\rho)}{d\rho} \tag{2.6}$$

$$Q(g(\rho)) = (\frac{1}{l(\rho)}\frac{dg(\rho)}{d\rho})^2 \tag{2.7}$$

La dégénérescence de la métrique étant exclue, (2.6) entraîne $dg(\rho)/d\rho > 0$, et ensuite (2.7) implique l'inégalité stricte

$$Q(g(\rho)) > 0 \tag{2.8}$$

dont la discussion dépend des propriétés, d'ailleurs tout à fait élémentaires, de la fonction

$$Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \frac{\nu^2}{u^2} + \lambda u^2$$

considérée sur la demi-droite $]0, +\infty[$.

*Supposons d'abord que la source stationnaire ne soit pas chargée.* Alors

$$\nu = 0 \quad , \quad Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \lambda u^2 \quad , \quad Q'(u) = 2(\frac{\mu}{u^2} + \lambda u),$$

$$Q(u) \to -\infty \quad \text{pour} \quad u \to 0,$$

$Q(u) \to +\infty$ ou $Q(u) \to 1$ pour $u \to +\infty$ suivant que $\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$.

La fonction $Q(u)$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle possède un zéro unique $2\mu_1 \in ]0, 2\mu]$, ($2\mu_1 = 2\mu$ si $\lambda = 0$), de sorte que, d'après (2.8), nous avons la minoration :

$$g(\rho) > 2\mu_1$$

pour toute solution physique extérieure. En particulier $\zeta_0 > 2\mu_1$.

*Supposons maintenant que la source stationnaire soit chargée.* Alors $\nu \neq 0$ et la fonction $Q(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $u \to 0$, son comportement pour $u \to +\infty$ restant le même que précédemment. D'autre part sa dérivée :

$$Q'(u) = \frac{2}{u^3}(\lambda u^4 + \mu u - \nu^2)$$

s'annule pour une valeur unique $u_1 \in ]0, +\infty[$, de sorte que

$$\inf Q(u) = Q(u_1) \quad , \quad u \in ]0, +\infty[.$$

La situation diffère essentiellement de celle vue précédemment. Pour voir le problème de façon plus claire, nous allons supposer $\lambda = 0$ (constante cosmologique nulle), ce qui ne constitue pas une restriction véritable, car nous nous intéressons à ce qui se passe au voisinage de la source. Alors

$$Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \frac{\nu^2}{u^2} \quad , \quad \nu \neq 0 \quad , \quad u_1 = \frac{\nu^2}{\mu} = \frac{e^2}{mc^2} \quad , \quad Q(u_1) = 1 - \frac{\mu^2}{\nu^2},$$

de sorte que le comportement de la solution dépend du signe de $Q(u_1)$.

*1er cas.* Si $Q(u_1) < 0$, $Q(u)$ s'annule pour deux valeurs de $u$ :

$$u_0' = \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \quad , \quad u_0 = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$$

dont la deuxième appartient à la demi-droite $]u_1, +\infty[$.

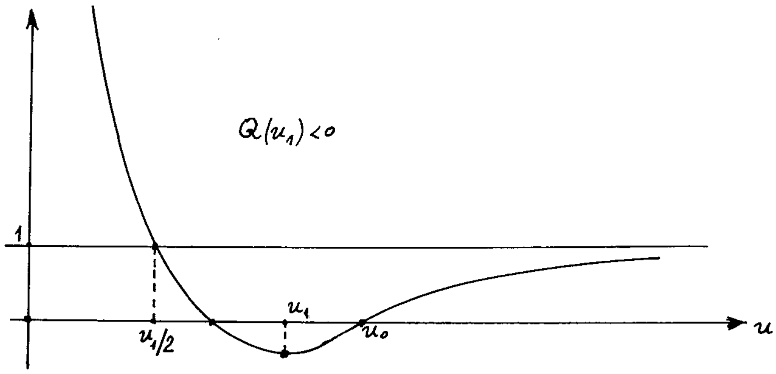


**Figure 1.**

Puisque $g(\rho)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$ et que $Q(g(\rho)) > 0$, la connexité nous oblige à prendre en considération uniquement la restriction de $Q(u)$ à la demi-droite $]u_0, +\infty[$ d'où la minoration

$$g(\rho) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}.$$

*2ème cas.* Si $Q(u_1) = 0$, on a la minoration $g(\rho) > u_1$.

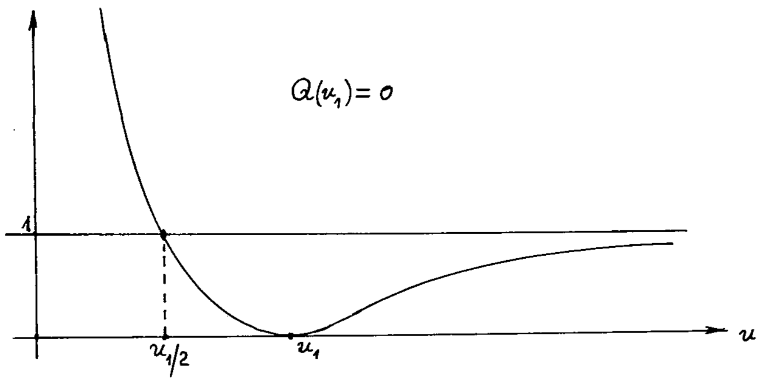


**Figure 2.**

*3ème cas.* Si $Q(u_1) > 0$, c'est-à-dire si la source est fortement chargée, la condition (2.8) n'entraîne plus la minoration de $g(\rho)$ par une valeur strictement positive, mais de toute façon une telle minoration existe certainement.

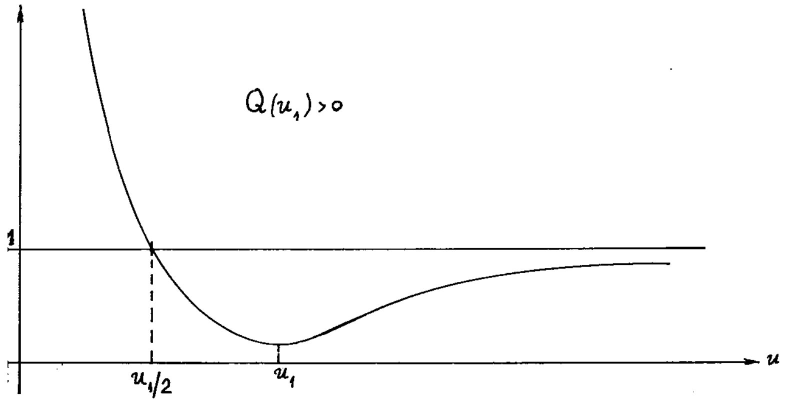


**Figure 3.**

Pour le voir, rappelons [14] que toute métrique admissible $\Theta(4)$-invariante satisfait à la condition :

$$\frac{1}{l(\tau,0)}\frac{\partial g(\tau,0)}{\partial \rho}=1$$

qui se déduit aussi directement de (2.2) et de $g(\tau,\rho)=\rho l_1(\tau,\rho)$. Dans le cas actuel d'une métrique stationnaire, on a

$$\frac{1}{l(0)}\frac{dg(0)}{d\rho}=1,$$

de sorte que, si $g(\rho)$ n'était pas minorée par une valeur strictement positive, en faisant tendre $\rho$, donc aussi $g(\rho)$, vers zéro dans (2.7), on aboutirait à l'égalité absurde $+\infty=1$. Or le problème qui se pose est de savoir si l'on peut encore indiquer une minoration strictement positive commune à toutes les solutions physiques $g(\rho)$ associées à une masse $m$ et à une charge $e$ données. En fait, divers raisonnements de nature aussi bien quantitative que qualitative, suggèrent que le minimum de $Q(u)$ marque la limite de validité de la solution extérieure, c'est-à-dire que la restriction de $Q(u)$ à $]0,u_1[$ doit être exclue de la solution physique extérieure, ce qui donne la minoration

$$g(\rho)\geq\frac{e^2}{mc^2}.$$

Les calculs connus concernant le problème de la minoration dans ce cas sont basés sur les métriques appauvries traditionnelles qui contiennent le paramètre de Levi-Civita et aussi sur quelques hypothèses simplificatrices concernant le tenseur d'impulsion-énergie à l'intérieur de la source chargée. Mais contrairement aux cas précédents où $Q(u_1) \leq 0$, les relativistes acceptent maintenant la minoration du paramètre de Levi-Civita par des nombres strictement positifs. Ainsi [1], [3], [12] donnent la minoration

$$r > \frac{\nu^2}{2\mu},$$

dont la forme correcte s'obtient en remplaçant le paramètre de Levi-Civita par le rayon de courbure :

$$g(\rho) > \frac{\nu^2}{2\mu}.$$

Un calcul ultérieur de W.B. Bonnor [4], basé sur des hypothèses plus réalistes formulées dans [7] et [17], aboutit à la condition

$$r \geq \frac{\nu^2}{\mu},$$

dont la forme correcte, à savoir

$$g(\rho) \geq \frac{\nu^2}{\mu},$$

s'identifie à la minoration de $g(\rho)$ par la valeur qui minimise la fonction $Q(u)$. Nous n'allons pas reprendre ces calculs sur la base de la forme correcte des métriques spatio-temporelles, car les hypothèses concernant le tenseur d'impulsion-énergie à l'intérieur de la source sont toujours incertaines. Cependant la minoration résultant des calculs de Bonnor est à prendre au sérieux du fait qu'elle est corroborée par d'autres considérations. Nous allons développer maintenant ces raisonnements pensant que leur poids est plus significatif que celui des calculs basés sur le tenseur d'impulsion-énergie.

*Notre premier argument* est fondé sur l'introduction d'une fonction permettant de mesurer, dans un certain sens, l'écart entre une métrique stationnaire $\Theta(4)$-invariante et la métrique plate. Rappelons d'abord qu'une métrique riemannienne spatiale $0(3)$-invariante :

$$ds^2 = (\frac{g(\rho)}{\rho})^2 dx^2 + ((l(\rho))^2 - (\frac{g(\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}$$

est euclidienne si et seulement si

$$\frac{1}{(l(\rho)}\frac{dg(\rho)}{d\rho} = 1 \quad \text{ou} \quad l(\rho) = g'(\rho). \tag{2.9}$$

Considérons ensuite la métrique spatio-temporelle stationnaire :

$$ds^2 = (f(\rho)dt + \frac{l(\rho)}{\rho}(xdx))^2 - [(\frac{g(\rho)}{\rho})^2dx^2 + ((l(\rho))^2 - (\frac{g(\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}]$$

qui est définie par la solution extérieure (2.6),(2.7). Compte tenu de $\lambda = 0$, celle-ci nous donne

$$\frac{1}{l(\rho)}\frac{dg(\rho)}{d\rho} = \sqrt{Q(g(\rho))} \quad , \quad f(\rho) = c\sqrt{Q(g(\rho))}$$

$$\text{avec} \quad Q(g(\rho)) = 1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{(g(\rho))^2} \tag{2.10}$$

de sorte que, en faisant tendre $\rho$, donc aussi $g(\rho)$, vers $+\infty$, on trouve

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{l(\rho)}\frac{dg(\rho)}{d\rho} = 1 \quad , \quad lim_{\rho\to+\infty}f(\rho) = c.$$

En conséquence, d'après (2.9) et (2.10), la différence

$$1 - \sqrt{Q(g(\rho))}$$

caractérise, sur chaque sphère $|x| = \rho$, l'écart entre la métrique plate :

$$ds^2 = (cdt + \frac{g'(\rho)}{\rho}(xdx))^2 - [(\frac{g(\rho)}{\rho})^2dx^2 + ((g'(\rho))^2 - (\frac{g(\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}]$$

et la métrique stationnaire résultant des équations d'Einstein. Ainsi, dans les cas déjà vus où $Q(u_1) \leq 0$, le caractère non pseudo-euclidien de la métrique devient de plus en plus marqué au fur et à mesure que l'on se rapproche de la matière, car cette propriété équivaut à la croissance stricte de $Q(u)$ sur la demi-droite $[g(\sigma_0), +\infty[= [\zeta_0, +\infty[$. Or c'est effectivement la matière, chargée ou non chargée, qui engendre la métrique non pseudo-euclidienne, de sorte qu'il n'y a aucune raison pour que la même propriété ne soit aussi valable dans le cas actuel où $Q(u_1) > 0$.

Cela nous amène à postuler de façon générale la croissance stricte de $Q(u)$ sur $[\zeta_0, +\infty[$, et alors la minoration

$$g(\rho) > g(\sigma_0) > \frac{\nu^2}{\mu}$$

en est une conséquence directe. En effet, compte tenu de $Q(\nu^2/2\mu) = 1$, notre principe exclut d'abord les valeurs $g(\rho) \in ]\nu^2/2\mu, \nu^2/\mu[$ à l'extérieur de la matière, car la fonction $Q(u)$ est à la fois décroissante et inférieure à 1 sur l'intervalle $]\nu^2/2\mu, \nu^2/\mu[$. Mais alors, pour des raisons de connexité, le passage à des valeurs $g(\rho) \leq \nu^2/2\mu$ est aussi automatiquement exclu, bien que, pour $g(\rho)$ très petit, $Q(g(\rho))$ soit d'un ordre de grandeur très élevé qui donnerait lieu à une métrique à caractère fortement non pseudo-euclidien.

*Remarque.* En vertu de l'égalité $Q(\nu^2/2\mu) = 1$, si la valeur $\nu^2/2\mu$ de $g(\rho)$ se réalisait à l'extérieur de la matière pour une valeur $\rho_1$ de $\rho$, on aurait, sur la sphère $|x| = \rho_1$, les conditions caractérisant une métrique pseudo-euclidienne, à savoir

$$\frac{1}{l(\rho_1)}\frac{dg(\rho_1)}{d\rho} = 1 \quad , \quad f(\rho_1) = c,$$

ce qui est inadmissible. D'autre part la réalisation de valeurs de $g(\rho)$ d'ordre de grandeur suffisamment petit donnerait lieu à des valeurs de $Q(g(\rho))$, donc aussi de $(1/l(\rho))(dg(\rho)/d\rho)$, d'ordre de grandeur très élevé au voisinage du centre, contrairement à ce que suggère la condition

$$\frac{1}{l(0)}\frac{dg(0)}{d\rho} = 1,$$

qui est valable quelle que soit la métrique admissible.

*Notre deuxième argument* est fondé sur un phénomène physique, à savoir sur le décalage vers le rouge des rayonnements émis du bord de la source. Pour un rayonnement émis radialement, le décalage constaté sur une sphère $|x| = \rho_1 > \sigma_0$ est donné par la formule :

$$Z(\rho_1, \sigma_0) = -1 + \frac{f(\rho_1)}{f(\sigma_0)} = -1 + \frac{\sqrt{Q(g(\rho_1))}}{\sqrt{Q(g(\sigma_0))}}.$$

Fixons $\rho_1$ et étudions son comportement en fonction du rayon de courbure $\zeta_0 = g(\sigma_0)$ du bord de la source, en supposant au départ $\zeta_0 > \nu^2/\mu$.

La décroissance de $\zeta_0$ jusqu'à la valeur $\nu^2/\mu$ entraîne une croissance de la fonction $Z(\rho_1, \sigma_0)$ qui atteint son maximum pour $\zeta_0 = \nu^2/\mu$. Or, si l'on suppose que $\zeta_0$ décroisse au delà de $\nu^2/\mu$, le phénomène s'inverse : le décalage décroît, il s'annule pour une valeur unique $\zeta_0 = g(\sigma_0) \in ]\nu^2/2\mu, \nu^2/\mu[$ pour laquelle $Q(g(\sigma_0)) = Q(g(\rho_1))$, et ensuite se transforme en décalage vers le bleu. Or une telle inversion du phénomène ne semble pas susceptible de se produire, d'autant plus que l'annulation de $Z(\rho_1, \sigma_0)$ dépendrait de la position de l'observateur. En ce qui concerne en particulier les observateurs au voisinage immédiat de la source, ils constateraient des décalages significatifs vers le bleu, ce qui est impossible. En fait, on doit s'attendre à un décalage vers le rouge d'autant plus marqué que le rayon de courbure $\zeta_0$ est petit, mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que la condition $\zeta_0 \geq \nu^2/\mu$ soit respectée.

En conclusion on voit que la valeur

$$u_1 = \frac{\nu^2}{\mu} = \frac{e^2}{mc^2}$$

sépare la demi-droite de définition de la solution mathématique en deux intervalles, $]0, u_1[$ et $]u_1, +\infty[$, dont le premier donne lieu à des caractéristiques incompatibles avec les propriétés d'une solution extérieure. Cela nous conduit à la minoration

$$g(\rho) \geq \frac{e^2}{mc^2},$$

qui doit être acceptée plutôt sous la forme d'une inégalité stricte :

$$g(\rho) > \frac{e^2}{mc^2}$$

quelle que soit la solution stationnaire extérieure relative à une source fortement chargée.

L'expression $e^2/mc^2$ nous est déjà connue en Electrodynamique Classique, mais nous la retrouvons ici à partir de nouveaux principes et avec une signification différente. En ce qui concerne, par exemple, l'électron, qui est fortement chargé, l'Electrodynamique lui attribue le rayon

$$\frac{e^2}{mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-13} cm,$$

en le supposant sphérique. Pour la théorie actuelle, l'électron libre stationnaire est un objet non euclidien dont le rayon est défini à un difféomorphisme près, tandis que la valeur $2.8 \times 10^{-13} cm$ représente la borne inférieure du rayon de courbure de son bord sphérique.

*Remarques générales.* Nous voyons que tout ce qui concerne les particules, chargées ou non, se présente sous un jour nouveau en Relativité Générale. Etant donnée une particule stationnaire, supposée sphérique et rapportée à son référentiel propre, on lui associe d'abord son champ gravitationnel extérieur, défini par la métrique (avec $\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned} ds^2 =& c^2\big(1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{(g(\rho))^2}\big)dt^2 + 2c\frac{dg(\rho)}{d\rho}\frac{xdx}{\rho}dt \\ & - \big(\frac{g(\rho)}{\rho}\big)^2 dx^2 + (\frac{g(\rho)}{\rho})^2\frac{(xdx)^2}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Faute de théorie unitaire, on doit aussi considérer à part son potentiel électromagnétique (en fait électrique), défini par la formule :

$$P(\rho) = \frac{e}{g(\rho)}.$$

Bien entendu les deux champs, gravitationnel et électromagnétique, ne sont pas indépendants. D'une part $P(\rho)$ est déterminé au moyen du rayon de courbure $g(\rho)$ qui est commandé par les effets gravitationnels. D'autre part, $P(\rho)$ intervient dans les potentiels gravitationnels du fait que

$$\frac{\nu^2}{(g(\rho))^2} = \frac{k}{c^4}(P(\rho))^2.$$

Cette interdépendance entre champ gravitationnel et champ électromagnétique a joué jusqu'à maintenant un rôle tout à fait secondaire en Relativité Générale à cause du paramètre de Levi-Civita qui figure aussi dans la métrique de Reissner-Nordström (le pendant de la métrique de Schwarzschild pour une source chargée) et qui a créé l'illusion que le potentiel électrique déduit des équations d'Einstein est identique à celui de Coulomb. Ainsi H. Weyl écrivait [16] : "For the electrostatic potential we therefore get the same formula as when gravitation is disregarded... If the inertial mass of the electron is derived from its field-energy alone, then its radius is of th order of magnitude

$$a = \frac{e^2}{m_0 c^2}.$$

But in our formula a finite mass $m_0$ (producing the gravitational field) occurs quite independently of the smallness of the value of $r$ for which the formula is regarded as valid... On the other hand the mass which is enclosed by a sphere of radieus $r$, assumes the value

$$m_0 - \frac{1}{2}\frac{e_0^2}{c^2 r},$$

which is dependent on the value of $r$. The mass is consequently distributed continuously. The density of mass coincides, of course, with the density of energy. The "initial level" at the centre, from which the mass is to be calculated, is not equal to 0 but to $-\infty$. Therefore the mass $m_0$ of the electron cannot be determined from this level at all, but signifies the "ultimate level" at an infinity great distance. $a$ now signifies the radius of the sphere which encloses the mass zero". On constate dans ces raisonnements contradictoires la confusion énorme occasionnée par l'introduction du paramètre de Levi-Civita dans les métriques. Pour se faire une idée claire de la situation, reprenons la métrique stationnaire (2.11) et en particulier le potentiel

$$(f(\rho))^2 = c^2(1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{(g(\rho))^2}) = c^2(1 - \frac{2k}{c^2 g(\rho)}(m - \frac{e^2}{2c^2 g(\rho)}))$$

qui y joue le rôle prépondérant. La comparaison avec le cas de la gravitation pure, c'est-à-dire avec le cas où $e = 0$, conduit à définir la masse variable

$$M(g(\rho)) = m - \frac{e^2}{2c^2 g(\rho)} \quad , \quad \rho \geq \sigma_0,$$

qui s'identifie à la constante $m$ lorsque $e = 0$. Ainsi les observateurs sur chaque sphère $|x| = \rho > \sigma_0$ obtiennent la forme exacte du potentiel en prenant d'abord le potentiel relatif à la gravitation pure et en y remplaçant ensuite $m$ par $M(g(\rho))$, c'est-à-dire en soustrayant à $m$ une masse de nature électromagnétique égale à

$$\frac{e^2}{2c^2 g(\rho)}.$$

Or $M(g(\rho))$ est toujours minorée par $m/2$. En effet, si la source est faiblement chargée, c'est-à-dire si $\mu \geq |\nu|$ ou, ce qui revient au même, $|e| \leq m\sqrt{k}$, on a

$$g(\rho) \geq g(\sigma_0) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \geq \mu = \frac{km}{c^2},$$

d'où

$$M(g(\rho)) \geq m - \frac{e^2}{2c^2 g(\sigma_0)} > m - \frac{e^2}{2c^2\mu} = \frac{m}{2} + \frac{km^2 - e^2}{2km} \geq \frac{m}{2}.$$

D'autre part, si la source est fortement chargée, on a

$$g(\rho) \geq g(\sigma_0) > \frac{e^2}{mc^2} \quad \text{et} \quad M(g(\rho)) > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}.$$

En conséquence la contribution de la masse aux potentiels gravitationnels à l'extérieur de la source l'emporte toujours sur celle de la charge.

Cela dit, à côté des potentiels gravitationnels, on doit aussi tenir compte du potentiel électrique $e/g(\rho)$. Comment peut-on comparer les effets de celui-ci aux effets de la gravitation ? La première difficulté provient du fait que, comme nous l'avons déjà souligné, les deux champs, gravitationnel et électromagnétique, sont interdépendants. Mais la difficulté principale résulte de notre impossibilité de déterminer les interactions entre corps étendus chargés, et, en particulier, entre particules étendues chargées. Il n'en reste pas moins que l'on a tort de penser que la gravitation est à éliminer à l'échelle des particules. J. Ehlers remarque à ce propos [8] : "Very often it is asserted that the gravitational force between an electron and a proton in a hydrogen atom is smaller than the Coulomb force by a factor of about $10^{40}$. Does that statement represent knowledge or folklore? We have certainly no direct experimental evidence for it, nor is it part of a relativistic theory covering consistently electromagnetic and gravitational interactions between subatomic particles governed by quantum mechanics". L'assertion en question est basée sur la comparaison du potentiel de Newton $-km/r$ avec celui de Coulomb $e/r$. Mais, du moins pour les petites valeurs de $r$, cette comparaison n'a pas de sens dans le cadre de la Relativité Générale. Déjà pour une particule isolée, le potentiel de Newton est remplacé par la métrique (2.11), et celui de Coulomb par l'expression $e/g(\rho)$ qui est incompatible avec une charge ponctuelle à cause de la minoration de $g(\rho)$ par des valeurs strictement positives. En fait la structure non euclidienne des particules en liaison avec la prise en considération du tenseur métrique modifie radicalement la situation. Il est même raisonnable de penser que la gravitation est susceptible de jouer un rôle non négligeable dans la constitution interne et la stabilité des particules : l'expression $e/g(\rho)$ du potentiel électrique étant valable uniquement à l'extérieur de la particule, il n'y a aucune raison de croire que son prolongement à l'intérieur l'emporte sur tout ce qui pourrait se rattacher à la gravitation pure, d'autant plus que nous avons alors affaire à des potentiels débarrassés des "infinis". D'autre part il ne faut pas oublier que la gravitation est une action dynamique. Nous nous sommes bornés aux états stationnaires du champ extérieur afin d'établir les minorations de $g(\rho)$ tout en sachant que le champ est essentiellement la manifestation d'états dynamiques. Or ceux-ci sont engendrés par les ébranlements gravitationnels du bord de la source, qui à leur tour résultent des oscillations radiales de la matière dans son ensemble. En conséquence la gravitation en tant que phénomène dynamique doit jouer un rôle déterminant non seulement à l'extérieur de la source, mais aussi à son intérieur.

### 2.2.2. Minorations de la fonction $g(t,\rho)$ relative aux états dynamiques

Nous allons nous occuper maintenant des minorations de $g(t,\rho)$ dans le cas général où nous avons affaire à des champs avec diffusion d'ondes. Bien entendu nos conclusions seront a fortiori valables pour les fonctions définissant les champs de Huygens.

D'après l'étude préalable fondée sur la propagation de la lumière, on sait (cf. corollaire 2.1) que, sur tout intervalle compact de valeurs de $t$, le rayon $\sigma(t)$ de la source doit être minoré par une valeur strictement positive, et il en est de même en conséquence de la fonction $g(t,\rho)$, $\rho \geq \sigma(t)$. On peut renforcer cette conclusion en montrant qu'elle se déduit aussi de la solution extérieur (2.4), (2.5) moyennant les propriétés de la fonction $g(t,\rho)$. En effet, en nous servant d'une homotopie $C^\infty$, comme dans la proposition 2.1, supposons que le rayon $\sigma(t) > 0$ de la source se réduise à la valeur nulle par déformation continue donnant ainsi lieu finalement à une source ponctuelle et à une métrique sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Nous allons démontrer que celle-ci n'est pas admissible, ce qui établira notre assertion. Raisonnons par l'absurde, en supposant que la fonction $g(t,\rho)$ ainsi que ses dérivées soient continues sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Explicitons l'équation (2.5) :

$$\frac{2}{c}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} = -1 + (\frac{1}{l(t,\rho)}\frac{\partial g(t,\rho)}{\partial \rho})^2 - \lambda(g(t,\rho))^2 + \frac{2\mu}{g(t,\rho)} - \frac{\nu^2}{(g(t,\rho))^2}$$

et ensuite faisons tendre $\rho$ vers zéro. En vertu de la continuité et des relations :

$$g(t,0) = 0 \quad , \quad \frac{1}{l(t,0)}\frac{\partial g(t,0)}{\partial \rho} = 1,$$

on obtient alors

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{\partial g(t,\rho)}{\partial t} = -\infty$$

suivant que $\nu = 0$ ou $\nu \neq 0$. Or ces deux conditions contredisent la continuité de $\partial g(t,\rho)/\partial t$, car l'identité $g(t,0) = 0$ entraîne $\partial g(t,0)/\partial t = 0$ pour toute métrique admissible. Par conséquent la réduction de la source à une masse ponctuelle est impossible.

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si l'on peut aller plus loin et établir des minorations strictement positives universelles, c'est-à-dire indépendantes de $t$, pour le rayon de courbure $\zeta(t)$ du bord, donc aussi pour la fonction $g(t,\rho)$ de la solution extérieure. Bien entendu, il est raisonnable de penser que les conclusions résultant de la considération des champs stationnaires sont largement suffisantes, d'autant plus que les minorations obtenues ont surtout un caractère théorique, les bornes inférieures physiquement réalisables pour $g(t,\rho)$ étant à coup sûr d'un ordre de grandeur beaucoup plus significatif. Cependant notre discussion ne sera pas inutile, car elle nous permettra de clarifier tous les aspects du problème.

Pour faciliter les raisonnements nous allons supposer encore $\lambda = 0$, ce qui ne constitue d'ailleurs pas une vraie restriction. Ainsi nous aurons

$$Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \frac{\nu^2}{u^2}.$$

D'autre part nous ferons usage constamment de la relation

$$g(t,\sigma(t)) = \zeta(t),$$

d'où l'on tire par dérivation

$$\frac{\partial g(t,\sigma(t))}{\partial t} + \frac{\partial g(t,\sigma(t))}{\partial \rho}\sigma'(t) = \zeta'(t). \tag{2.12}$$

Notons que la fonction $g(t,\rho)$ est définie sur le fermé

$$\{(t,\rho) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \rho \geq \sigma(t)\}$$

de sorte que la dérivée $\partial g(t,\sigma(t))/\partial \rho$ est en fait une dérivée à droite. En ce qui concerne $\partial g(t,\sigma(t))/\partial t$, elle peut être aussi bien une dérivée à droite qu'une dérivée à gauche. D'ailleurs $\partial g(t_1, \sigma(t_1))/\partial t$ n'est pas susceptible de définition directe lorsque $\sigma(t_1)$ est un minimum local de $\sigma(t)$ et l'on doit procéder alors par passage à la limite. Quoi qu'il en soit, il est préférable d'envisager toujours un prolongement de la détermination mathématique de $g(t, \rho)$ pour $\rho < \sigma(t)$ sur un voisinage de la courbe $\{(t, \rho) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} | \rho = \sigma(t)\}$, ce qui permet de concevoir la dérivation au sens ordinaire. Les dérivées $\partial g(t, \sigma(t))/\partial t$ et $\partial g(t, \sigma(t))/\partial \rho$ qui en résultent sont alors bien définies, car, en vertu de la continuité, elles ne dépendent pas du prolongement choisi pour $g(t, \rho)$.

Cela dit, diverses considérations conduisent encore à admettre les minorations déjà établies, mais nous avons besoin maintenant d'une discussion plus circonstanciée. En particulier nous allons utiliser l'énoncé suivant.

*Proposition 2.2. Supposons que la source soit faiblement chargée, ce qui signifie* $|\nu| \leq \mu$, *et soit* $(t_1, \rho_1) \in \mathbf{R} \times ]\sigma(t_1), +\infty[$ *un point donnant lieu à la condition* $g(t_1, \rho_1) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$. *Alors on a* $g(t, \rho_1) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ *pour tout* $t \geq t_1$ *pour lequel la sphère* $|x| = \rho_1$ *se trouve à l'extérieur de la source durant l'intervalle de temps* $[t_1, t]$. *(En d'autres termes dès que la minoration stricte par* $\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ *se trouve réalisée sur une sphère extérieure* $|x| = \rho_1$, *elle ne se détruit plus ultérieurement).*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une valeur $t_2 > t_1$ telle que $g(t_2, \rho_1) \leq \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ avec $\rho_1 > \sigma(t)$ quel que soit $t \in [t_1, t_2]$. L'ensemble des valeurs $t \in ]t_1, t_2]$ pour lesquelles $g(t, \rho_1) = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ n'étant pas vide, on peut considérer sa borne inférieure, notée $t_3$, ce qui donne $g(t_3, \rho_1) = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ et $g(t, \rho_1) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ pour tout $t \in [t_1, t_3[$. Compte tenu de $Q(\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}) = 0$ et de (2.5) où $\partial g/\partial \rho > 0$, on obtient

$$\frac{\partial g(t_3, \rho_1)}{\partial t} > 0,$$

de sorte que la fonction $g(t, \rho_1)$ est strictement croissante sur un voisinage de $t_3$. On peut donc trouver un nombre réel $\eta > 0$ tel que $t_1 < t_3 - \eta$ et que

$$g(t, \rho_1) < g(t_3, \rho_1) = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_3 - \eta, t_3[,$$

d'où une contradiction. Cela établit notre assertion.

Nous allons étudier d'abord le cas où la source n'est pas chargée.

*1er cas : $\nu = 0$ (gravitation pure).*

Notre discussion sera fondée sur les énoncés ci-après.

*Proposition 2.3. Si $\zeta(t_1) = g(t_1, \sigma(t_1)) \leq 2\mu$ pour une valeur $t_1$ de $t$, alors le bord de la source se trouve dans un état dynamique sur un intervalle de temps contenant $t_1$, et de plus*

$$\frac{\partial g(t_1, \sigma(t_1))}{\partial t} > 0,$$

*ce qui implique en particulier la croissance stricte de $g(t, \sigma(t_1))$ sur un intervalle de temps contenant $t_1$ (pourvu que la sphère $|x| = \sigma(t_1)$ reste à l'extérieur de la source durant cet intervalle).*

En effet, $\zeta(t_1) \leq 2\mu$ implique $Q(g(t_1, \sigma(t_1)) = 1 - 2\mu/\zeta(t_1) \leq 0$, et ensuite (2.5) montre que

$$\frac{\partial g(t_1, \sigma(t_1))}{\partial t} > 0.$$

Par conséquent $g(t, \sigma(t_1))$ est strictement croissante sur un intervalle de temps contenant $t_1$. En outre, d'après (2.12), $|\sigma'(t_1)| + |\zeta'(t_1)| \neq 0$, ce qui entraîne $(\sigma'(t), \zeta'(t)) \neq (0, 0)$ sur un voisinage de $t_1$.

*Proposition 2.4. Si l'ébranlement gravitationnel s'annule pour une valeur $t_0$ de $t$, alors $\zeta(t_0) = g(t_0, \sigma(t_0)) > 2\mu$, ce qui entraîne en particulier $g(t_0, \rho) > 2\mu$ pour tout $\rho > \sigma(t_0)$.*

En effet, $\sigma'(t_0) = \zeta'(t_0) = 0$ implique $\partial g(t_0, \sigma(t_0))/\partial t = 0$, d'après (2.12), et ensuite (2.5) donne

$$Q(g(t_0, \sigma(t_0))) = Q(\zeta(t_0)) = 1 - \frac{2\mu}{\zeta(t_0)} > 0.$$

*Corollaire 2.4. Si le bord de la source se trouve en équilibre lorsque $t$ parcourt un certain intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$, ce qui entraîne $\sigma(t) = \sigma(\alpha_1) = \sigma(\beta_1)$ et $\zeta(t) = \zeta(\alpha_1) = \zeta(\beta_1)$ pour tout $t \in [\alpha_1, \beta_1]$, alors $\zeta(t) > 2\mu$, donc aussi $g(t, \rho) > 2\mu$, pour tout $(t, \rho) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\sigma(\alpha_1), +\infty[$.*

Cet énoncé résout le problème de la minoration de $g(t, \rho)$ lors des états stationnaires du bord de la source. Considérons maintenant la situation relative aux états dynamiques du bord. Pour fixer les idées rapportons-nous aux notations ci-dessus et supposons que celui-ci passe dans un état dynamique sur un intervalle ouvert $I_1$ d'origine $\beta_1$, de sorte que $|\sigma'(t)| + |\zeta'(t)| > 0$ sur un ouvert dense dans $I_1$. Du point de vue mathématique, il se peut que $I_1 = ]\beta_1, +\infty[$, mais ce n'est pas une hypothèse réaliste. D'ailleurs dans une telle éventualité théorique, on doit admettre que l'ébranlement gravitationnel s'annule pour des valeurs de $t$ dans $]\beta_1, +\infty[$. On peut donc raisonner toujours sur un intervalle ouvert borné $I = ]\beta_1, \beta_2[$ tel que l'ébranlement gravitationnel s'annule pour $t = \beta_1$ et $t = \beta_2$. Alors, les valeurs $\zeta(\beta_1)$ et $\zeta(\beta_2)$ étant strictement supérieures à $2\mu$ (cf. proposition 2.4), il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que $\beta_1 + \eta_1 < \beta_2 - \eta_2$ et que $\zeta(t) > 2\mu$ sur $[\beta_1, \beta_1 + \eta_1] \cup [\beta_2 - \eta_2, \beta_2]$. Mais des valeurs de $\zeta(t)$ inférieures ou égales à $2\mu$ ne sont pas exclues en principe lorsque $t \in ]\beta_1 + \eta_1, \beta_2 - \eta_2[$. Bien entendu, il faut se garder de croire que la réalisation éventuelle de telles valeurs entraîne la formation d'un "trou noir". Celui-ci est toujours exclu automatiquement du fait que, la solution (2.4), (2.5) étant valable pour $\rho \geq \sigma(t)$, la loi de propagation de la lumière à l'extérieur de la matière reste toujours la même indépendamment des valeurs prises apr $\zeta(t)$.

Cela dit, considérons maintenant l'évolution de la situation à partir de l'instant $\beta_1 + \eta_1$ en supposant, pour simplifier nos raisonnements, que les fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ soient monotones par morceaux. Si $\sigma(t)$ croît à partir de $\sigma(\beta_1 + \eta_1)$ sur un certain intervalle $[\beta_1 + \eta_1, \beta_1 + \eta_1 + \eta] \subset I$, $\eta > 0$, alors, pour tout $t \in ]\beta_1 + \eta_1, \beta_1 + \eta_1 + \eta]$, il existe $t_1 \in [\alpha_1, \beta_1 + \eta_1[$ tel que $\sigma(t_1) \leq \sigma(t)$ et $\sigma(t') < \sigma(t)$ pour tout $t' \in ]t_1, t[$, ce qui, compte tenu de $\zeta(t_1) > 2\mu$, assure la minoration $g(t', \sigma(t)) > 2\mu$ quel que soit $t' \in [t_1, t]$, d'après la proposition 2.2, d'où en particulier $\zeta(t) > 2\mu$.

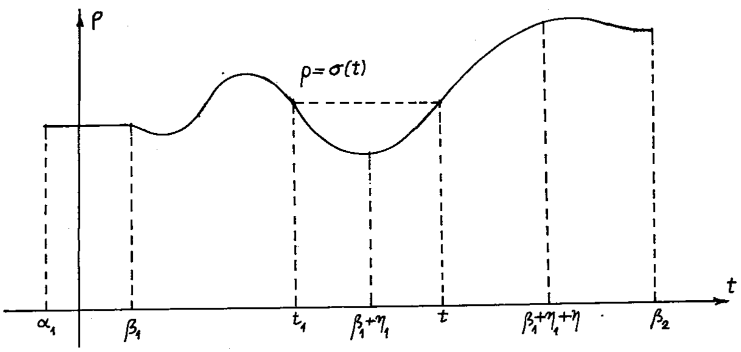


**Figure 4.**

Il reste donc à étudier le cas où $\zeta(t)$ atteint des valeurs $\leq 2\mu$ lors d'une décroissance de $\sigma(t)$ à partir de valeurs de $t$ pour lesquelles $\zeta(t) >$

$2\mu$. Sans restreindre la généralité, on peut considérer une décroissance de $\sigma(t)$ sur un intervalle d'origine $\beta_1 + \eta_1$. Supposons alors qu'au cours de la contraction de la source, on arrive à une valeur $t_1 > \beta_1 + \eta_1$ telle que $g(t_1, \sigma(t_1)) = \zeta(t_1) = 2\mu$, ($\zeta(t) > 2\mu$ pour $t \in [\alpha_1, t_1[$). Il se peut que $\sigma(t_1)$ soit un minimum relatif de $\sigma(t)$, et alors la proposition 2.2 assure encore le passage à des valeurs $> 2\mu$ sur un intervalle ouvert d'origine $t_1$. Ainsi la valeur $\zeta(t_1) = 2\mu$ se réalise instantanément, l'évolution de la source donnant lieu aussitôt à des valeurs $> 2\mu$. Nous avons donc à étudier l'autre éventualité, c'est-à-dire la décroissance de $\sigma(t)$ pour $t > t_1$ avec décroissance simultanée de $\zeta(t)$ donnant lieu à des valeurs $< 2\mu$. Or $\sigma(t)$ doit atteindre un minimum relatif $\sigma(t_2)$, $t_2 > t_1$, et puisque $\sigma'(t_2) = 0$, on en déduit, d'après (2.12),

$$\frac{\partial g(t_2, \sigma(t_2))}{\partial t} = \zeta'(t_2).$$

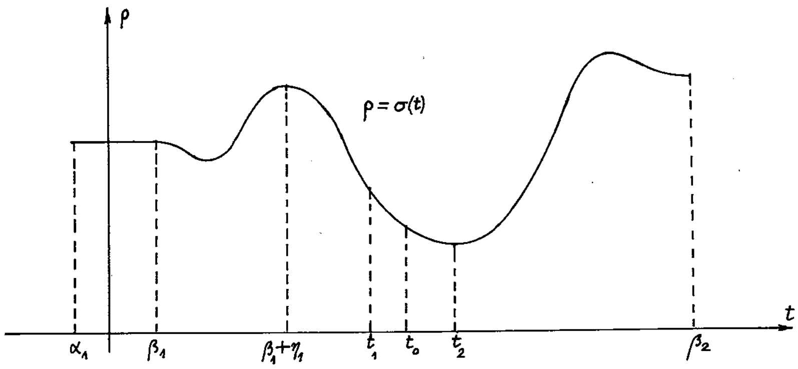


**Figure 5.**

Si l'on suppose que $\zeta(t)$ décroisse sur tout l'intervalle $[t_1, t_2]$, on aura $g(t_2, \sigma(t_2)) = \zeta(t_2) < 2\mu$, donc aussi, d'après (2.5),

$$\frac{\partial g(t_2, \sigma(t_2))}{\partial t} > 0 \quad \text{et} \quad \zeta'(t_2) > 0,$$

d'où une contradiction. Par conséquent il existe une valeur $t_0 \in ]t_1, t_2[$ telle que $\zeta(t)$ soit croissante sur $[t_0, t_2]$, et cela malgré la contraction poursuivie de la source. Ce changement soudain du comportement de $\zeta(t)$ est difficile à admettre et s'il s'avère impossible, l'éventualité envisagée, c'est-à-dire le passage de $\zeta(t)$ à des valeurs $\leq 2\mu$, est automatiquement exclue. Mais admettons-le provisoirement et cherchons à en déduire les conséquences. Il se peut que la croissance de $\zeta(t)$ sur $[t_0, t_2]$ conduise à une valeur $\zeta(t_2) > 2\mu$, mais plaçons-nous dans le cas le plus défavorable en supposant $\zeta(t) \leq 2\mu$ sur tout l'intervalle $[t_1, t_2]$. Alors il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que, pour toute valeur fixée $t \in [t_1 - \epsilon_1, t_2]$, nous ayons

$$\frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial t} > 0.$$

Cette condition induit *un processus de croissance de $g(t, \rho)$ dans le temps* sur les sphères laissées à l'extérieur pendant la contraction de la source. De façon plus précise, quel que soit $t \in [t_1 - \epsilon_1, t_2[$, $g(t', \sigma(t))$ croît strictement avec $t'$ sur un intervalle d'origine $t$, sa croissance se poursuivant sûrement tant que $g(t', \sigma(t))$ ne dépasse pas la valeur $2\mu$. Cet établissement progressif des valeurs $> 2\mu$ de $g(t', \sigma(t))$ continue évidemment pendant la phase d'expansion de la source pour $t > t_2$ sur les sphères restant encore à l'extérieur au voisinage du bord. En outre, à partir de l'instant $t_0$ la croissance de $g(t, \rho)$ se réalise aussi sur le bord lui-même.

Le processus de croissance de $g(t, \rho)$ dans le temps se trouve corroboré par l'action conjuguée *d'un processus de croissance de $g(t, \rho)$ dans l'espace* en vertu de la validité universelle de la condition

$$\frac{\partial g(t, \rho)}{\partial \rho} > 0$$

à l'extérieur de la source. De façon plus précise, dès que, pour $t$ fixé $\in [t_1 - \epsilon_1, t_2[$, $g(t', \sigma(t))$ atteint une valeur $> 2\mu$, on aura aussi forcément $g(t', \rho) > 2\mu$ sur un intervalle de valeurs de $\rho$ contenant $\sigma(t)$ :

$$[\sigma(t) - \eta_3, \sigma(t) + \eta_4] \quad , \quad \eta_3 > 0 \quad , \quad \eta_4 > 0,$$

donc aussi en particulier pour toute valeur $\rho < \sigma(t)$ dans un voisinage de $\sigma(t)$. Ce phénomène se manifeste déjà à partir de valeurs de $t$ supérieures à $t_1$, valeurs pour lesquelles $\zeta(t) > 2\mu$, et s'étend de proche en proche vers la source en accélérant ainsi le passage aux valeurs $> 2\mu$ sur les sphères restant encore à l'extérieur.

Ainsi, en admettant la décroissance sur $[t_1, t_0]$ puis la croissance sur $[t_0, t_2]$ de $\zeta(t)$, malgré la contraction poursuivie de la source, nous constatons que le passage de $\zeta(t)$ à des valeurs $\leq 2\mu$ correspond à une situation de durée courte et instable, mais l'instabilité qui en résulte, au lieu de s'amplifier, disparaît aussitôt par passage à un état stable caractérisé par des valeurs $> 2\mu$ de $\zeta(t)$. Nous pensons que cette constatation traduit en fait l'impossibilité de réalisation physique des valeurs $\leq 2\mu$ de $\zeta(t) = g(t, \sigma(t))$ : Dès que la valeur $\zeta(t) > 2\mu$ est assez voisine de $2\mu$, la dérivée

$$\frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial t}$$

est strictement positive, de sorte que, compte tenu de

$$\frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial \rho} > 0,$$

la décroissance $\zeta(t)$ nécessite des valeurs négatives significatives de $\sigma'(t)$, c'est-à-dire une contraction rapide de la source, de façon que

$$\zeta'(t) = \frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial t} + \frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial \rho}\sigma'(t) < 0.$$

Or dans une phase de forte contraction de la matière, la valeur absolue de la vitesse de contraction $\sigma'(t)$ est nécessairement très faible, ce qui interdit les valeurs négatives de $\zeta'(t)$. Cela dit, nous avons constaté que la réalisation théorique, d'ailleurs passagère, de valeurs de $\zeta(t)$ inférieures ou égales à $2\mu$ présuppose l'acceptation du comportement signalé de $\zeta(t)$. Mais le passage de $\zeta(t)$ par un minimum lors d'une contraction de la source ne semble pas susceptible de se produire physiquement. Nous savons déjà que le rayon de courbure $g(t, \rho)$ des sphères $|x| = \rho$ est une fonction strictement croissante de $\rho$ pour toute valeur fixée de $t$. Cela nous amène à postuler un comportement analogue pour le rayon de courbure $\zeta(t)$ du bord, c'est-à-dire que $\zeta(t)$ croît ou décroît en même temps que le rayon $\sigma(t)$, de sorte que $\zeta(t_1) > \zeta(t_2)$ si et seulement si $\sigma(t_1) > \sigma(t_2)$. Dans ces conditions, si

$$\zeta(t_1) = \inf_{t \in [\beta_1, \beta_2]} \zeta(t) \quad , \qquad \text{alors} \quad \sigma(t_1) = \inf_{t \in [\beta_1, \beta_2]} \sigma(t),$$

et réciproquement. En fait, cette conséquence de notre postulat suffit, elle seule, pour exclure les valeurs $\leq 2\mu$ de $\zeta(t)$.

*Proposition 2.5. Si le minimum absolu de $\zeta(t)$ sur $[\beta_1, \beta_2]$ se réalise en même temps que celui de $\sigma(t)$, alors $\zeta(t) > 2\mu$ pour toute valeur de $t$.*

En effet, soit $t_1 \in [\beta_1, \beta_2]$ une valeur telle que $\zeta(t_1)$ soit le minimum absolu de $\zeta(t)$ sur $[\beta_1, \beta_2]$. Si $t_1 \in ]\beta_1, \beta_2[$, on aura manifestement $\zeta'(t_1) = 0$, mais il en est de même si $t_1 = \beta_1$ ou $t_1 = \beta_2$, en vertu de l'annulation de l'ébranlement gravitationnel aux extrémités de l'intervalle $[\beta_1, \beta_2]$. Or, d'après notre hypothèse, $\sigma(t_1)$ est aussi le minimum absolu de $\sigma(t)$ sur $[\beta_1, \beta_2]$, donc $\sigma'(t_1) = 0$, de sorte que l'ébranlement gravitationnel s'annule pour $t = t_1$. Mais alors, d'après la proposition 2.4, on a $\zeta(t_1) > 2\mu$.

En définitive, après avoir examiné le problème sous ses divers aspects, on doit admettre la minoration $\zeta(t) > 2\mu$ pour toute valeur de $t$.

*2ème cas : $|\nu| < \mu$ avec $\nu \neq 0$.* La fonction

$$Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \frac{\nu^2}{u^2}$$

s'annule maintenant pour deux valeurs de $u$,

$$\mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2},$$

et possède un minimum absolu strictement négatif obtenu pour $u = \nu^2/\mu$ :

$$\min Q(u) = Q(\frac{\nu^2}{\mu}) = 1 - \frac{\mu^2}{\nu^2} < 0.$$

En outre $Q(u) > 0$ sur les intervalles $]0, \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}[$ et $]\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, +\infty[$, $Q(u) < 0$ sur $]\mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}[$.

Supposant que l'ébranlement gravitationnel s'annule pour $t = t_0$, on a $Q(g(t_0, \sigma(t_0))) = Q(\zeta(t_0)) > 0$, ce qui entraîne

$$\text{ou bien} \quad \zeta(t_0) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{ou bien} \quad 0 < \zeta(t_0) < \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}.$$

Nous voyons que la condition $\zeta(t_0) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, qui est valable pour les états stationnaires, n'est plus automatiquement vérifiée, comme c'est le cas déjà vu de $\zeta(t_0) > 2\mu$ lorsque $\nu = 0$, de sorte que la discussion précédente ne s'y applique pas directement. C'est pourquoi, au lieu d'étudier d'abord le problème de la minoration de $g(t, \rho)$ lors des états stationnaires du bord, comme nous l'avons fait auparavant, nous considérons dès le début la situation générale. Vu l'étude détaillée du premier cas, nous nous contentons maintenant d'une discussion sommaire. Supposons donc que lors d'une contraction de la source pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, $\zeta(t)$ passe de la valeur

$$\zeta(t_1) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$$

à la valeur

$$\zeta(t_2) < \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2},$$

l'éventualité $\zeta(t_2) \leq \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ n'étant pas exclue (notre raisonnement dépend uniquement du fait que $\zeta(t_2) < \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$). Alors il existe $t_3 \in ]t_1, t_2[$ tel que $\zeta(t_3) = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, ce qui entraîne

$$\frac{\partial g(t_3, \sigma(t_3))}{\partial t} > 0,$$

donc aussi

$$\frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial t} > 0,$$

sur un intervalle $]t_3 - \eta_1, t_3 + \eta_2[$, $(\eta_1 > 0, \eta_2 > 0)$. Cette condition donne lieu à un processus de croissance dans le temps de $g(t, \rho)$ sur les sphères extérieures, processus qui se trouve renforcé par le processus de croissance dans l'espace. Ainsi, à partir d'un certain instant $t_4$, on aura

$$g(t, \rho) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$$

$$\text{pour tout} \quad \rho \in ]\sigma(t_3) - \epsilon_1, \sigma(t_3) + \epsilon_2[ \quad , \quad (\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0).$$

Si $g(t_4, \sigma(t_3) - \epsilon_1) = \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, les deux processus induisent de nouveau une croissance de $g(t, \rho)$, au delà de $\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ et à partir d'un certain instant, sur des sphères plus proches de la source, et ainsi de suite. Etant donné que les valeurs $> \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de $g(t, \rho)$ se conservent (cf. proposition 2.2) et que $\sigma(t)$ doit atteindre un minimum, les valeurs $> \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de $g(t, \rho)$ seront établies finalement partout à l'extérieur et sur le bord de la matière. Nous voyons ainsi que les valeurs $\leq \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de $g(t, \rho)$ correspondent théoriquement à une certaine instabilité de courte durée, qui doit traduire en fait l'impossibilité de leur réalisation physique.

Le raisonnement précédent ne s'oppose pas à la réalisation théorique de valeurs $\leq \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de $\zeta(t)$ pendant un bref laps de temps. Mais il semble raisonnable de les exclure d'avance. En effet, en admettant encore que $\zeta(t)$ croît ou décroît en même temps que $\sigma(t)$, on voit que, si $\min \zeta(t) \leq \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, l'ébranlement gravitationnel s'annule pour une valeur $t_0$ telle que $\zeta(t_0) \leq \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, ce qui entraîne en particulier

$$\frac{\partial g(t_0, \sigma(t_0))}{\partial t} = 0.$$

Ainsi au voisinage immédiat du bord de la source, la dérivée $\partial g(t,\rho)/\partial t$ sera très voisine de zéro, de sorte que l'on aura affaire à une métrique presque stationnaire qui, du fait que $\zeta(t_0) < \nu^2/\mu$, sera presque pseudo-euclidienne, en vertu d'un raisonnement développé lors de l'étude des états stationnaires relatifs aux sources fortement chargées. Cependant un tel comportement de la métrique est inadmissible au voisinage de la source.

Or en excluant les valeurs $\leq \mu - \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de $\zeta(t)$, on peut traiter le problème exactement comme dans le cas où $\nu = 0$, car l'annulation de l'ébranlement gravitationnel conduit alors forcément à la condition $\zeta(t_0) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$. En conclusion nous constatons encore que la minoration relative aux états stationnaires continue à être valable, c'est-à-dire que $\zeta(t) > \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ pour toute valeur de $t$.

*3ème cas* : $|\nu| = \mu$. Puisque $Q(u) = (1 - \mu/u)^2$, l'existence d'une valeur $t_1$ telle que $\zeta(t_1) = \mu$ entraîne

$$\frac{\partial g(t, \sigma(t))}{\partial t} > 0$$

sur un voisinage de $t_1$, ce qui donne lieu à un processus de croissance de $g(t,\rho)$ dans le temps, qui est corroboré toujours par un processus de croissance dans l'espace. Ainsi les valeurs $> \mu$ de $g(t,\rho)$ s'établissent vite sur les sphères extérieures et sur le bord de la source. L'instabilité introduite par la valeur $\zeta(t_1) = \mu$ ne doit donc pas correspondre à des situations physiques. En d'autres termes nous devons accepter la minoration $\min \zeta(t) > \mu$. Celle-ci s'impose d'ailleurs automatiquement dès que l'on exclut, ce qui est raisonnable, les valeurs $\leq \mu$ de $g(t,\rho)$ sur la base du raisonnement évoqué précédemment.

*4ème cas* : $|\nu| > \mu$. Nous avons vu que diverses considérations conduisent à la condition $g(\rho) \geq \zeta_0 > \nu^2/\mu$ pour la fonction $g(\rho)$ des états stationnaires. Nous pensons que la même minoration doit être retenue dans le cas général. En effet, si $\zeta(t_0) = \min \zeta(t) < \nu^2/\mu$, alors l'ébranlement gravitationnel s'annulerait pour $t = t_0$, ce qui donnerait lieu à une métrique presque stationnaire de nature presque pseudo-euclidienne sur un voisinage de la source, ce qui est inadmissible. Cela nous conduit à la minoration $\min \zeta(t) \geq \nu^2/\mu$, qui doit être acceptée sous la forme d'une inégalité stricte :

$$\min \zeta(t) > \frac{\nu^2}{\mu}.$$

## 3. Particules test de masse au repos non nulle dans un champ $\Theta(4)$-invariant

Nous allons aborder maintenant les problèmes relatifs au mouvement d'une particule test de masse au repos non nulle dans le champ extérieur, stationnaire ou dynamique, d'une source $\Theta(4)$-invariante. D'après les hypothèses déjà explicitées, si la source et la particule sont chargées toutes les deux, la ligne d'univers de la particule sera définie par les équations de Maxwell-Einstein, et, dans le cas particulier où la particule n'est pas chargée, elle sera une géodésique de la métrique. Tout ce qui concerne les propriétés du mouvement repose sur ce principe qui est fondé sur des hypothèses très restrictives, et, dans une certaine mesure, contradictoires, rendant possible l'acceptation de la notion de particule test. Celle-ci s'introduit à titre d'approximation en faisant abstraction des dimensions de la particule et en retenant uniquement sa masse totale et sa charge totale. Bien entendu, dans ce contexte, la masse électromagnétique sera supposée nulle, ce qui ne contredit d'ailleurs pas une certaine conception de l'Electrodynamique Classique [2].

Moyennant ces simplifications, nous nous proposons de pousser nos raisonnements aussi loin que nous le pouvons sur la base des possibilités offertes par le formalisme de la Relativité Générale afin de mettre en évidence quelques caractéristiques du mouvement qui sont inconcevables dans la Mécanique Classique.

Cela dit, dans un premier temps nous allons établir les intégrales premières des équations différentielles du mouvement. Nous dirons qu'une telle intégrale définit *une loi générale du mouvement*, si elle résulte de la $\Theta(4)$-invariance indépendamment de toute détermination spécifique de la métrique, donc aussi, en particulier, indépendamment de la validité des équations d'Einstein. D'autre part si elle résulte de la métrique canonique définie par les équations d'Einstein nous dirons qu'elle définit *une loi spécifique du mouvement.* En fait le mouvement d'une particule test est soumis à deux lois générales et à une loi spécifique.

### 3.1. Lois générales du mouvement

*1ère loi générale. Le mouvement d'une particule test se réalise sur un plan vectoriel de* $\mathbf{R}^3$.

*2ème loi générale (loi de la vitesse angulaire). Si l'on identifie le plan en question avec le plan* $x_3 = 0$ *(ce qui est toujours possible moyennant une rotation convenable), alors la fonction*

$$g^2\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\frac{dx_2}{ds} - \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\frac{dx_1}{ds}\right)$$

*est une intégrale première des équations différentielles du mouvement, de sorte que, en posant* $x_1 = \rho\cos\phi$ *et* $x_2 = \rho\sin\phi$*, on a*

$$g^2\frac{d\phi}{ds} = \epsilon = \text{Cte} .$$

Les relativistes, en substituant au rayon de courbure $g(t,\rho)$ le paramètre de Levi-Civita, présentent incorrectement la loi de la vitesse angulaire. C'est pourquoi nous indiquons brièvement les calculs qui établissent les lois générales sur la base de la métrique générale $\Theta(4)$-invariante :

$$\begin{aligned} ds^2 =& \big(f(t,\rho)dt + \frac{h(t,\rho)}{\rho}(xdx)\big)^2 \\ &- \big[(\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2 dx^2 + ((l(t,\rho))^2 - (\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\big] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Or, $s$ étant le temps propre de la particule test, le mouvement de celle-ci dans $\mathbf{R}^3$ est défini par une fonction vectorielle de $s$, à savoir

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)).$$

Fixons une valeur $s_0$ de $s$ et, moyennant un automorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^3$, faisons en sorte que le plan $x_3 = 0$ contienne les vecteurs $x(s_0)$ et $x'(s_0)$. Introduisant maintenant les coordonnées $\rho$, $\phi$, $\theta$, considérées sur leur domaine de validité, le mouvement sera défini par une fonction vectorielle de la forme $(\rho(s), \phi(s), \theta(s))$, et l'on aura manifestement les conditions

$$\theta(s_0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta'(s_0) = 0.$$

D'autre part la métrique (3.1) s'écrit

$$ds^2 = f^2 dt^2 + 2fhdtd\rho + (h^2 - l^2)d\rho^2 - g^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - g^2 d\theta^2. \tag{3.2}$$

Soient $m_1$ et $e_1$ respectivement la masse et la charge de la particule test, et écrivons les équations du mouvement par rapport à (3.2) :

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = \frac{e_1}{m_1 c^2} \sum P^k_{.j} \frac{du^j}{ds},$$

$$(k = 0, 1, 2, 3 \quad ; \quad u^0 = t \quad , \quad u^1 = \rho \quad , \quad u^2 = \phi \quad , \quad u^3 = \theta),$$

en notant $P^k_{.j}$ les composantes mixtes du champ électromagnétique. Or, à part $P^0_{.0}$, $P^1_{.0}$ et $P^1_{.1}$, toutes les autres composantes s'annulent, de sorte que l'équation correspondant à l'indice $k = 3$ s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2 + \frac{2}{g}(\frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\rho}{ds})\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Celle-ci détermine la fonction $\theta(s)$ en supposant connues les fonctions $\rho(s)$ et $\phi(s)$, et puisqu'il existe une solution unique satisfaisant aux conditions initiales $\theta(s_0) = \pi/2$ et $\theta'(s_0) = 0$, on en déduit $\theta(s) = \pi/2$ pour toute valeur de $s$. En d'autres termes le mouvement a lieu sur le plan $x_3 = 0$. Ensuite l'équation correspondant à l'indice $k = 2$ s'écrit

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{g}(\frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\rho}{ds})\frac{d\phi}{ds} = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{ds}(g^2\frac{d\phi}{ds}) = 0,$$

d'où la loi de la vitesse angulaire

$$g^2\frac{d\phi}{ds} = \epsilon = \text{Cte} .$$

### 3.2. Loi spécifique du mouvement (intégrale de l'énergie)

Cette loi s'établit sur la base de la métrique canonique définie par la solution (2.4), (2.5) des équations d'Einstein, en tenant compte aussi des deux lois générales. Celles-ci nous donnent d'abord la condition $\theta = \pi/2$, de sorte que, pour achever de définir le mouvement, il nous reste à déterminer les fonctions de $t$ :

$$\rho = \rho(t) \quad \text{et} \quad \phi = \phi(t),$$

qui donnent la position de la particule test sur le plan $x_3 = 0$. La prise en considération de $\rho(t)$ nous permet maintenant de formuler la loi spécifique en utilisant aussi la fonction déjà introduite :

$$Q(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} + \frac{\nu^2}{u^2} + \lambda u^2.$$

*Proposition 3.1. Soit*

$$\gamma(t) = g(t, \rho(t)).$$

*Alors la fonction*

$$m_1 c^2 \frac{\gamma'(t) + cQ(\gamma(t))}{\sqrt{2c\gamma'(t) + c^2 Q(\gamma(t))}} \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}} + \frac{e_1 e}{\gamma(t)}$$

*est une intégrale première (l'intégrale de l'énergie) des équations différentielles du mouvement, c'est-à-dire qu'elle garde une valeur constante sur la trajectoire de la particule test.*

*Démonstration.* Puisque $h = l$, $\theta = \pi/2$, $g^2 d\phi/ds = \epsilon = \text{Cte}$ , (3.2) donne

$$ds^2 = f^2 dt^2 + 2fldtd\rho - g^2 d\phi^2 = f^2 dt^2 + 2fldtd\rho - \frac{\epsilon^2}{g^2} ds^2$$

d'où

$$(1 + \frac{\epsilon^2}{g^2}) ds^2 = f^2 dt^2 + 2fldtd\rho = (f^2 + 2fl\rho'(t)) dt^2 \qquad (3.3)$$

avec

$$g = g(t, \rho(t)) = \gamma(t) \quad , \quad f = f(t, \rho(t)) \quad , \quad l = l(t, \rho(t)).$$

Or, en vertu de (2.4) et (2.5), on a

$$fl = c\frac{\partial g}{\partial \rho} \quad , \quad f^2 = c^2(\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)), \tag{3.4}$$

ce qui donne

$$f^2 + 2fl\rho'(t) = 2c(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \rho}\rho'(t)) + c^2 Q(g) = 2c\gamma'(t) + c^2 Q(\gamma(t)),$$

de sorte que, compte tenu de $ds^2 > 0$, (3.3) entraîne la condition

$$2\gamma'(t) + cQ(\gamma(t)) > 0 \tag{3.5}$$

pour toute valeur de $t$. Par conséquent la fonction

$$F(t) = \frac{2c\gamma'(t) + c^2 Q(\gamma(t))}{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}} \tag{3.6}$$

est partout strictement positive, et, compte tenu de (3.3), son introduction permet d'écrire

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{F(t)}}, \tag{3.7}$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{1}{2}(F(t))^{-3/2}F'(t)\frac{dt}{ds} = -\frac{F'(t)}{2(F(t))^2} \tag{3.8}$$

D'autre part le calcul de la dérivée logarithmique de $F(t)$ :

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{2\gamma"(t) + cQ'(\gamma(t))\gamma'(t)}{2\gamma'(t) + cQ(\gamma(t))} + \frac{2\epsilon^2}{(\gamma(t))^3}\frac{\gamma'(t)}{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}}$$

entraîne

$$\begin{aligned}\gamma"(t) + cQ'(\gamma(t))\gamma'(t) - (2\gamma'(t) + cQ(\gamma(t)))\frac{F'(t)}{2F(t)} \\ = (\frac{cQ'(\gamma(t))}{2} - \frac{\epsilon^2 F(t)}{c(\gamma(t))^3})\gamma'(t).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Considérons maintenant la première équation du mouvement, c'est-à-dire celle qui correspond à l'indice $k = 0$ :

$$\frac{d^2t}{ds^2} + (\frac{1}{fl}\frac{\partial(fl)}{\partial t} - \frac{1}{l}\frac{\partial f}{\partial \rho})(\frac{dt}{ds})^2 + \frac{g}{fl}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\frac{d\phi}{ds})^2 + \frac{e_1 e}{m_1 c}\frac{1}{flg^2}\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{dt}{ds} = 0.$$

D'après (3.4), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{fl}\frac{\partial(fl)}{\partial t} - \frac{1}{l}\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{1}{fl}(\frac{\partial(fl)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial \rho})\\ &= \frac{1}{fl}(c\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial \rho} - c\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial \rho} - \frac{c^2}{2}Q'(g)\frac{\partial g}{\partial \rho}) = -\frac{c}{2}Q'(g)\end{aligned}$$

et tenant compte de (3.7), (3.8), ainsi que de

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\epsilon}{g^2},$$

cette équation s'écrit

$$\frac{cQ'(\gamma(t))}{2} - \frac{\epsilon^2 F(t)}{c(\gamma(t))^3} = -\frac{F'(t)}{2F(t)} + \frac{e_1 e}{m_1 c^2}\frac{\sqrt{F(t)}}{(\gamma(t))^2}.$$

Remplaçant l'expression ainsi obtenue de

$$\frac{cQ'(\gamma(t))}{2} - \frac{\epsilon^2 F(t)}{c(\gamma(t))^3}$$

dans (3.9), on trouve

$$\gamma''(t) + cQ'(\gamma(t))\gamma'(t) - (\gamma'(t) + cQ(\gamma(t)))\frac{F'(t)}{2F(t)} = \frac{e_1 e}{m_1 c^2}\frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2}\sqrt{F(t)}$$

ou encore

$$\frac{(\gamma'(t) + cQ(\gamma(t)))'}{\sqrt{F(t)}} - (\gamma'(t) + cQ(\gamma(t)))\frac{F'(t)}{2(F(t))^{3/2}} = \frac{e_1 e}{m_1 c^2}\frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2},$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}(\frac{\gamma'(t) + cQ(\gamma(t))}{\sqrt{F(t)}} + \frac{e_1 e}{m_1 c^2}\frac{1}{\gamma(t)}) = 0,$$

d'où, compte tenu de l'expression de $F(t)$, l'intégrale de l'énergie :

$$m_1c^2\frac{\gamma'(t)+cQ(\gamma(t))}{\sqrt{2c\gamma'(t)+c^2Q(\gamma(t))}}\sqrt{1+\frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}}+\frac{e_1e}{\gamma(t)}=E_0=\mathrm{Cte}\ . \qquad (3.10)$$

### 3.3. Détermination de la fonction $\gamma(t)$

La fonction $\gamma(t)$ s'obtient maintenant en intégrant l'équation ci-dessus. Celle-ci contient les constantes $c$, $m$, $e$, $\lambda$, $m_1$, $e_1$, $\epsilon$, $E_0$, mais ne dépend pas de la fonction $g(t,\rho)$ qui définit la solution extérieure. En d'autres termes, quelle que soit la détermination choisie pour $g(t,\rho)$ en conformité avec les conditions du problème, la fonction $\gamma(t)=g(t,\rho(t))$, qui est associée au mouvement de la particule test par l'intermédiaire de $\rho(t)$, vérifie toujours la même équation différentielle (3.10). En vertu de cette propriété remarquable, les solutions de l'équation différentielle (3.10), pour une particule test donnée par sa masse et sa charge et aussi pour des constantes $\epsilon$ et $E_0$ données, sont de validité universelle, c'est-à-dire valables par rapport à toutes les déterminations du champ extérieur, stationnaire ou dynamique, par les équations d'Einstein.

Avant de procéder à l'intégration de (3.10), il est nécessaire de préciser le signe de fonction $\gamma'(t)+cQ(\gamma(t))$. Or, nous savons déjà que la fonction $g=g(t,\rho)$, qui définit les solutions extérieures des équations de gravitation, satisfait toujours à la condition $Q(g)>0$. Nous l'avons d'abord constaté pour les champs stationnaires, et ensuite pour les champs généraux avec diffusion d'ondes gravitationnelles en étudiant les minorations de $\zeta(t)$. Cela entraîne en particulier $Q(\gamma(t))>0$ pour toute valeur de $t$, et puisque, d'après (3.5),

$$\gamma'(t)>-\frac{c}{2}Q(\gamma(t)),$$

on a

$$\gamma'(t)+cQ(\gamma(t))>\frac{c}{2}Q(\gamma(t))>0.$$

Alors (3.10) impose la condition

$$E_0-\frac{e_1e}{\gamma(t)}>0 \qquad (3.11)$$

et en introduisant la fonction

$$P(\gamma(t)) = \frac{E_0 - \frac{e_1 e}{\gamma(t)}}{m_1 c^2 \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}}}$$

qui est partout strictement positive, on peut transformer (3.10) en une équation du deuxième degré par rapport à $\gamma'(t)$ :

$$(\gamma'(t))^2 - 2c((P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t)))\gamma'(t) \\ - c^2((P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t)))Q(\gamma(t)) = 0$$

dont le discriminant :

$$c^2(P(\gamma(t)))^2((P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t)))$$

doit être non négatif, d'où compte tenu de (3.11), la condition

$$\frac{e_1 e}{\gamma(t)} + m_1 c^2 \sqrt{(1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2})Q(\gamma(t))} \leq E_0,$$

qui détermine les parties connexes, c'est-à-dire les intervalles, de **R** parcourues par les valeurs de $\gamma(t)$. On peut maintenant résoudre l'équation précédente par rapport à $\gamma'(t)$, ce qui donne

$$\gamma'(t) = c\sqrt{(P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t))}(\pm P(\gamma(t)) + \sqrt{(P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t))}) \tag{3.12}$$

d'où, en intégrant, l'équation

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma(t)} \frac{du}{\sqrt{(P(u))^2 - Q(u)}(\pm P(u) + \sqrt{(P(u))^2 - Q(u)})} = ct$$

qui permet de déterminer $\gamma(t)$ sur chacun de ces intervalles.

Notons que (3.12) nous donne la possibilité d'exprimer $F(t)$ en fonction de $\gamma(t)$, et c'est pourquoi nous écrirons désormais $F(\gamma(t))$ au lieu de $F(t)$. En effet, remplaçant l'expression (3.12) de $\gamma'(t)$ dans (3.6), on obtient facilement

$$F(\gamma(t)) = c^2 \frac{(P(\gamma(t)) \pm \sqrt{(P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t))})^2}{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}}$$

donc aussi

$$\sqrt{F(\gamma(t))} = c\frac{P(\gamma(t)) \pm \sqrt{(P(\gamma(t)))^2 - Q(\gamma(t))}}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}}} \tag{3.13}$$

ou, de façon plus explicite,

$$\sqrt{F(\gamma(t))} = \frac{1}{m_1 c(1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2})}\Bigg(E_0 - \frac{e_1 e}{\gamma(t)} \pm \sqrt{(E_0 - \frac{e_1 e}{\gamma(t)})^2 - (m_1 c^2)^2\big(1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma(t))^2}\big)Q(\gamma(t))}\Bigg).$$

### 3.4. Détermination du mouvement de la particule test

La fonction $\gamma(t)$ étant déterminée, les fonctions $\rho(t)$ et $\phi(t)$, qui définissent la position de la particule test sur le plan $x_3 = 0$, s'obtiennent immédiatement. En premier lieu, compte tenu de la définition de $\gamma(t)$, $\rho(t)$ se détermine en résolvant par rapport à $\rho$ l'équation

$$g(t, \rho) = \gamma(t),$$

la solution étant unique en vertu de la condition $\partial g(t, \rho)/\partial\rho > 0$. En deuxième lieu $\phi(t)$ s'obtient moyennant la loi de la vitesse angulaire :

$$g^2 \frac{d\phi}{ds} = \epsilon.$$

Si $\epsilon = 0$, $\phi(t)$ se réduit à une constante, c'est-à-dire que le mouvement est radial. D'autre part, si $\epsilon \neq 0$, alors, compte tenu de (3.7), on a

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \epsilon\frac{\sqrt{F(\gamma(t))}}{(\gamma(t))^2} \tag{3.14}$$

d'où

$$\phi(t) = \epsilon \int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{F(\gamma(u))}}{(\gamma(u))^2} du.$$

Cette formule appelle deux remarques.

Premièrement, tandis que la détermination de $\rho(t)$ nécessite l'utilisation de $g(t,\rho)$, la fonction $\phi(t)$ est définie uniquement par l'intermédiaire de $\gamma(t)$, de sorte que son expression est toujours la même quelle que soit la fonction $g(t,\rho)$ qui intervient dans la solution extérieure.

Deuxièmement, si le mouvement n'est pas radial, $\phi(t)$ est une fonction strictement monotone de $t$, et l'on peut en conséquence introduire sa réciproque $t = t(\phi)$ et définir ainsi en termes géométriques, c'est-à-dire sans faire intervenir le temps, l'orbite de la particule test :

$$x_1 = \rho(t(\phi))\cos\phi \quad , \quad x_2 = \rho(t(\phi))\sin\phi \quad , \quad x_3 = 0.$$

D'ailleurs moyennant (3.12), (3.13), (3.14) on peut aussi écrire directement l'équation différentielle

$$\pm\epsilon\frac{d\gamma}{d\phi} = \gamma\sqrt{\big(\frac{E_0 - e_1 e/\gamma}{m_1 c^2}\big)^2\gamma^2 - (\gamma^2 + \epsilon^2)Q(\gamma)}$$

qui définit $\gamma$ en tant que fonction de $\phi$.

Cependant l'élimination de $t$ complique et dénature à la fois le problème. Sur le plan purement technique d'abord, l'introduction de la fonction réciproque de $\phi(t)$ n'est envisageable que pour des données numériques précises vu l'existence de plusieurs déterminations de $\gamma(t)$. En outre, même si l'on se place dans un cas où l'on choisit une détermination précise de $\gamma(t)$ définie par des valeurs numériques données des constantes qui y figurent, on aura ensuite à faire face à la difficulté d'exprimer au moyen de $\phi$ la fonction $\rho(t)$ définie par $g(t,\rho(t)) = \gamma(t)$. Or la fonction $g(t,\rho)$ n'est pas tout à fait connue et notre objectif consiste effectivement à faire apparaître toutes les propriétés communes aux différentes déterminations admissibles de $g(t,\rho)$. Rappelons à ce propos que, en Relativité Générale, on n'envisage pas uniquement les résultats quantitatifs. Les résultats qualitatifs sont aussi susceptibles de revêtir une importance capitale. D'autre part le problème lui-même consiste à définir la position de la particule test en fonction du temps, de sorte que l'introduction de l'angle $\phi$ comme paramètre donne lieu à une perte d'information significative. Si l'on pense, en particulier, à l'équation $g(t,\rho) = \gamma(t)$, son premier membre est une fonction de nature assez subtile dépendant des conditions initiales $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$, qui interviennent ainsi nécessairement dans la détermination de $\rho(t)$. Or en substituant à $t$ l'angle $\phi$, on fait perdre à $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ leurs caractéristiques essentielles, ce qui entraîne en particulier l'impossibilité de rendre compte de l'influence des ébranlements gravitationnels sur le mouvement de la particule test.

*Trajectoires stationnaires circulaires.* Supposons que le champ se trouve dans un état stationnaire, c'est-à-dire que la fonction $g$ dépende uniquement de $\rho$ pendant un certain intervalle de temps. Alors, pour que la trajectoire de la particule test soit circulaire, il faut et il suffit que $\gamma(t)$ se réduise à une constante sur cet intervalle, constante minorée nécessairement par $\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ ou par $\nu^2/\mu$ suivant que la source est faiblement ou fortement chargée. Compte tenu de (3.10), de telles constantes, s'il en existe, sont à rechercher parmi les racines de l'équation

$$m_1 c^2 \sqrt{(1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma^2})Q(\gamma)} + \frac{e_1 e}{\gamma} = E_0.$$

### 3.5. Mouvement d'une particule test dans un champ de Huyghens

Nous savons qu'un champ de Huyghens $\Theta(4)$-invariant est défini par une fonction $g$ dans laquelle le temps intervient par l'intermédiaire de $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$, c'est-à-dire par une fonction de la forme $g(\sigma(t), \zeta(t), \rho)$. Considérons alors les fonctions $\rho(t)$ et $\phi(t)$ qui définissent le mouvement de la particule test. La deuxième s'obtient toujours par l'équation (3.14) indépendamment des déterminations possibles de $g(t, \rho)$. En ce qui concerne la première, elle se déduit maintenant de l'équation

$$g(\sigma(t), \zeta(t), \rho) = \gamma(t),$$

ce qui donne une fonction définie par la donnée des conditions initiales $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ :

$$\rho(t) = \rho(\sigma(t), \zeta(t), \gamma(t)).$$

Pour toute valeur fixée $t_1$ de $t$, posons

$$\rho(t; t_1) = \rho(\sigma(t_1), \zeta(t_1), \gamma(t)).$$

Alors les fonctions $\rho(t; t_1)$ et $\phi(t)$, $t \geq t_1$, définissent le mouvement qu'effectuerait la particule test, si l'ébranlement gravitationnel s'annulait sur $[t_1, +\infty[$. Elles déterminent en conséquence une trajectoire, en général fictive, qui sera notée $S(t_1)$ et appelée *le niveau* *stationnaire d'origine* $(\rho(t_1;t_1),\phi(t_1))$. Ainsi aux constantes données $m, e, \lambda, m_1, e_1, \epsilon, E_0, \gamma_0, t_0$, et aux fonctions déjà obtenues $\gamma(t)$ et $\phi(t)$ correspond une infinité de niveaux stationnaires qui représentent les mouvements de la particule test dans des états stationnaires fictives de durée infinie. L'introduction des niveaux stationnaires s'avère indispensable afin de rendre compte des caractéristiques du mouvement réel.

La situation réelle du champ consiste en une succession d'états stationnaires et d'états non stationnaires correspondant à une suite d'intervalles de temps :

$$\ldots, [t_1, t_2], ]t_2, t_3[, \ldots, [t_{2n-1}, t_{2n}], ]t_{2n}, t_{2n+1}[, \ldots$$

Quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, l'ébranlement gravitationnel s'annule en tout point de l'intervalle $[t_{2n-1}, t_{2n}]$, tandis que $(\sigma'(t), \zeta'(t)) \neq (0,0)$ pour toute valeur de $t$ appartenant à un ouvert dense dans $]t_{2n}, t_{2n+1}[$. Ainsi entre les instants $t_{2n-1}$ et $t_{2n}$ le champ se trouve dans un état stationnaire de durée maximale dans le sens que, pour tout $\eta > 0$, il n'est stationnaire ni sur $[-\eta + t_{2n-1}, t_{2n}]$ ni sur $[t_{2n-1}, \eta + t_{2n}]$. D'autre part entre les instants $t_{2n}$ et $t_{2n+1}$ le champ se trouve dans un état non stationnaire de durée maximale dans le sens que, pour tout $\eta > 0$, il existe des intervalles contenus aussi bien dans $]-\eta + t_{2n}, t_{2n+1}[$ que dans $]t_{2n}, \eta + t_{2n+1}[$ sur lesquels l'ébranlement gravitationnel s'annule. Cela dit, nous notons $S([t_{2n-1}, t_{2n}])$ et $NS(]t_{2n}, t_{2n+1}[)$ respectivement les tronçons de trajectoire parcourus par la particule test durant les intervalles de temps $[t_{2n-1}, t_{2n}]$ et $]t_{2n}, t_{2n+1}[$. Il convient de les appeler respectivement *un tronçon maximal de trajectoire stationnaire* et *un tronçon maximal de trajectoire non stationnaire.* Nous voyons ainsi que la trajectoire globale de la particule test se présente comme une succession de tronçons maximaux de trajectoire stationnaires et non stationnaires. Chaque tronçon $S([t_{2n-1}, t_{2n}])$ fait partie du niveau stationnaire $S(t_{2n-1})$, tandis que, durant la réalisation de $NS(]t_{2n}, t_{2n+1}[)$, la particule test effectue un déplacement radial continu par rapport aux niveaux stationnaires définis par les valeurs de $t$ dans l'intervalle $]t_{2n}, t_{2n+1}[$. La vitesse $\rho'(t)$ du déplacement radial résulte de la dérivation de l'identité

$$g(\sigma(t), \zeta(t), \rho(t)) = \gamma(t),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial g(\sigma(t), \zeta(t), \rho(t))}{\partial \rho}\rho'(t) = \gamma'(t) - \frac{\partial g(\sigma(t), \zeta(t), \rho(t))}{\partial \sigma} \cdot \sigma'(t) - \frac{\partial g(\sigma(t), \zeta(t), \rho(t))}{\partial \zeta} \cdot \zeta'(t).$$

Par conséquent la vitesse $\rho'(t)$ est commandée de façon très simple par l'ébranlement gravitationnel $(\sigma'(t), \zeta'(t))$. Compte tenu des difficultés d'estimation numériques des grandeurs non euclidiennes, il s'agit là tout d'abord d'un résultat qualitatif, mais il n'en reste pas moins qu'il apporte des éléments significatifs à la compréhension de la complexité insoupçonnable du mouvement des particules dans le champ dynamique qui résulte des pulsations de la source. Comparé aux idées de stationnarité classiques, il montre en particulier que l'assimilation des sources à des points matériels est une simplification très poussée vis-à-vis du problème de la stabilité des trajectoires : Déjà le passage d'un état stationnaire à l'autre, par l'intermédiaire d'un état dynamique, induit un changement d'orbite de la particule.

## Références


[1] R. Arnowitt, C.W. Misner, S. Deser, Ann. Physics, 33, 88 (1965).

[2] H. Arzeliès, *Problèmes actuels en théorie électromagnétique macroscopique : réalité du champ, emploi éventuel de potentiels avancés*, dans *La pensée physique contemporaine*, édité par S. Diner, D. Fargue, G. Lochak, pp. 81-107, Fondation Louis de Broglie, éditions Augustin Fresnel, 1982.

[3] W.B. Bonnor, Z. Phys., 160, 59 (1960).

[4] W.B. Bonnor, *Charged spheres with* $q^2 > m^2$, Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups, GRG9, pp. 242-243, 1980.

[5] L. de Broglie, *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, Journal de Physique, série VI, 1, VVV, n$\mathring{5}$, pp. 225-241, 1927.

[6] L. de Broglie, *Nouvelles perspectives en microphysique*, Ed. Albin Michel, Paris, 1956.

[7] F.I. Cooperstock and V. de la Cruz, GRG, 9, 835 (1978).

[8] J. Ehlers, *Folklore in Relativity and what is really known*, in *General Relativity and Gravitation*, Proceedings of the 11th Inter. Conf. on GRG, pp. 61-71, Stockholm, 1986, Cambridge University Press.

[9] A. Einstein und J. Grommer, *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetze*, Sitz. Ber. Deut. Akad. Wiss., Berlin, Kl. Math. Phys. Tech., 2-13, 235-245, 1927.

[10] F. Fer, *L'irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthier Villars, Paris, 1977.

[11] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, éditions Mir, Moscou, 1970.

[12] M.A. Markov and V.P. Frolov, Theor. and Math. Physics (USA), 13, 965 (1972), (translation of Teor. and Mat. Fiz. (USSR), 13, 41 (1972)).

[13] R.H. Schattner, *The Structure of Extended Bodies in General Relativity*, Ph. Thesis, University of Munich, 1980.

[14] N. Stavroulakis, *Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale (première partie)*, Ann. Fond. L. de Broglie, vol. 12, n$\mathring{4}$, pp.

443-473, 1987. (Sur la 2ème ligne de la page 450, on doit lire : l'égalité, au lieu de : les égalités).

[15] N. Stavroulakis, *Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale (deuxième partie)*, Ann. Fond. L. de Broglie, vol. 13, n°1, pp. 7-42, 1988. (Rectifications : Page 15, ligne 9, au lieu de $f(\xi(t,\rho),\rho)$, écrire $f(\xi(t,\rho),\rho)\partial\xi(t,\rho)/\partial t$. Page 15, ligne 21, au lieu de : marquée, écrire : marqué. Page 25, ligne 14, au lieu de : sont nulles, écrire : sont non nulles. Page 36, 1ère ligne, écrire $1/c$ avant l'intégrale triple).

[16] H. Weyl, *Space, time, matter*, First American Printing of the Fourth Edition (1922), Dover Publications, INC.

[17] E.T. Whittaker, Proc. Roy. Soc., A149, 384, 1935.

*(Manuscrit reçu le 11 janvier 1990, révisé le 16 février 1990)*