Pourquoi il faut lire Hestenes

C. Daviau

Fondation Louis de Broglie, 23 Quai de Conti, 75006 Paris

RESUME. Cet article explique pourquoi les travaux d'Hestenes sur l'algèbre de Clifford d'espace-temps méritent un examen attentif et approfondi de la part de ceux qui ont des doutes sur la valeur des principes généraux de la mécanique quantique.

ABSTRACT. This paper explains why the papers of D. Hestenes, on Space-time Clifford algebra and Dirac equation, must be seriously studied by physicists, if they have some suspicion about general principles of quantum theory.

L'essentiel des idées de la mécanique quantique est issu de l'équation de Schrödinger: nature complexe de l'onde, utilisation des espaces vectoriels hermitiens, densité de probabilité, lien entre grandeurs physiques et opérateurs hermitiens, utilisation de l'espace de configuration au lieu de l'espace physique. Toutes ces caractéristiques marquent une rupture profonde par rapport à la physique classique, et le premier à en être étonné fut le propre fondateur de la mécanique ondulatoire, Louis de Broglie.

Lorsqu'il eut l'idée de l'onde associée au mouvement de tout corpuscule, il partait de ce qu'Einstein avait trouvé pour la lumière: coexistence des ondes et des corpuscules de lumière, et covariance relativiste de toutes les lois de la physique. Il a été constamment guidé dans ses recherches par la relativité restreinte. Donc l'équation de Schrödinger, non relativiste, ne lui a jamais paru devoir être le point ultime de la compréhension de l'univers. Louis de Broglie a fait partie de ceux qui ont aussitôt trouvé l'équation relativiste aujourd'hui connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon.

Appliquée à l'atome d'hydrogène, cette équation permet de retrouver les corrections relativistes obtenues par Sommerfeld pour rendre compte de la structure fine du spectre de l'hydrogène. Mais elle ne fournit pas les bons nombres quantiques, ignorant le spin des particules. L'idée que l'électron est doté d'un moment cinétique propre et d'un moment magnétique fut émise par Uhlenbeck et Goudsmit dès 1926. Deux ans seulement plus tard, partant du principe que l'équation d'ondes devait être relativiste et du premier ordre pour permettre de garder l'interprétation probabiliste de l'onde, Dirac obtint une équation qui introduisait, automatiquement, l'existence d'un moment cinétique et magnétique propre, avec le bon rapport gyromagnétique. Elle permettait aussi d'obtenir tous les nombres quantiques n, j, m, dont avaient besoin les spectroscopistes, donnait exactement les niveaux d'énergie de Sommerfeld avec le bon nombre d'états différents possibles dans chaque niveau. Et ceci, joint au principe d'exclusion de Pauli, permet de rendre compte de la structure électronique de tous les atomes.

Louis de Broglie a donc attaché la plus grande attention à la théorie de Dirac, dont il a donné un exposé complet dès 1934 [1]. L'équation de Dirac a été la base sur laquelle il a bâti sa théorie de la fusion des particules de spin 1/2, qui lui a permis de construire sa théorie du photon. Avec ses élèves, il a approfondi de nombreux aspects de la théorie de Dirac.

Or aujourd'hui l'équation de Dirac semble souvent rangée aux oubliettes de l'histoire des sciences, au point qu'un traité récent de mécanique quantique peut se permettre d'oublier volontairement de l'enseigner à nos étudiants. D'où vient que l'équation de Dirac soit si dérangeante, qu'elle s'insère si mal dans le formalisme général de la théorie quantique? Le fait est que l'équation de Dirac est une équation à une particule, qu'elle ne permet pas de décrire un système et que personne n'a su jusqu'ici écrire une équation d'ondes relativiste d'un système de particules. L'onde de Dirac admet des solutions d'énergie négative, et il n'est pas possible de s'en débarrasser. L'interprétation de ces ondes d'énergie négative est délicate. On leur associe les particules conjuguées de charge, les positrons, et ceci est considéré comme un immense succès de la théorie de Dirac. Mais la théorie des trous inventée par Dirac pour résoudre les problèmes des énergies négatives fait appel au principe d'exclusion de Pauli, ce n'est pas une théorie à une seule particule, et le fait expérimental est que les positrons, tout comme les électrons, sont dotés d'énergie propre positive. Aussi prétend-on habituellement que seule la théorie quantique des champs peut rendre compte de tout cela, et on n'expose même plus la théorie de Dirac dans tous les traités élémentaires.

La théorie de Dirac introduit des objets nouveaux, les spineurs. L'onde n'est plus à valeurs complexes, mais formée par 4 complexes. La théorie quantique enseigne qu'à toute transformation t effectuée sur un système peut être associée UNE transformation linéaire T sur l'espace des états. Or à une rotation, en théorie de Dirac, sont associées DEUX transformations linéaires opposées de la fonction d'ondes. En termes de théorie des groupes, ceci signifie que l'on utilise non pas le groupe des rotations mais son groupe de recouvrement universel, $SU(2)$, et il en est de même pour le groupe des rotations de Lorentz. Il y a là une situation non conforme aux principes généraux de la théorie, et pourtant inévitable puisque les particules de spin 1/2 existent. La non conformité avec les principes généraux est habituellement passée sous silence, ou cachée par la confusion volontaire entre l'utilisation d'un homomorphisme de groupe et l'utilisation de la relation réciproque présentée comme un homomorphisme, alors que ça n'est même pas une fonction. Le tour de passe-passe est baptisé "représentation à deux valeurs".

En 1967 D. Hestenes publie un article [2] dans lequel il propose une nouvelle équation d'ondes relativiste pour l'électron. Cet article est largement passé inaperçu à l'époque, et n'a été sérieusement étudié que par quelques Français, Casanova, Quilichini et Boudet. La théorie d'Hestenes est à la fois fort différente et équivalente à la théorie de Dirac.

Elle est équivalente en ce sens qu'à toute solution de l'une peut être attachée de manière unique une solution de l'autre, en sorte que les résultats expérimentaux sont rigoureusement les mêmes. Il y a plusieurs façons de le voir, et j'en ai donné une preuve détaillée en [3]. Mais si la théorie d'Hestenes est équivalente à celle de Dirac, quel peut en être l'intérêt? Voilà la question à laquelle je voudrais répondre ici, et qui justifie le titre de cet article.

L'outil mathématique de la théorie d'Hestenes est l'algèbre de Clifford d'espace- temps. Cette algèbre est à l'espace-temps de la relativité restreinte ce que le corps des quaternions d'Hamilton est à l'espace de dimension 3, ou ce que le corps des nombres complexes est à la géométrie plane: un outil de calcul géométrique. Le corps des quaternions est une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford d'espace, que nous noterons en abrégé A.C.E., et l'algèbre de Clifford d'espace-temps, en abrégé A.C.E.T., est en quelque sorte la généralisation des quaternions à l'espace de la relativité restreinte.

De la même manière que l'exponentielle complexe permet de construire les fonctions trigonométriques et donc de décrire les rotations du plan, l'exponentielle dans le corps des quaternions permet de décrire les rotations de l'espace, et dans l'A.C.E.T. l'exponentielle permet de décrire les rotations de Lorentz. Point essentiel, ces algèbres introduisent d'emblée et dans le bon sens l'homomorphisme permettant de décrire les "représentations à deux valeurs" indispensables à la description des particules de spin 1/2. L'A.C.E.T. est donc le cadre mathématique naturel permettant d'écrire une équation d'ondes relativiste de l'électron.

Ce cadre mathématique est d'ailleurs implicitement présent dans la théorie de Dirac, où l'on remarque que les matrices de Dirac et leurs produits engendrent une algèbre à 16 paramètres, de sorte que l'on peut construire 16 grandeurs de champ: un scalaire, Ω_1, un vecteur d'espace-temps, j (4 paramètres), un tenseur antisymétrique de rang 2 (6 paramètres), un tenseur antisymétrique de rang 3 (4 paramètres), un pseudo-scalaire, Ω_2, soit en tout $1+4+6+4+1=16$ grandeurs. Une telle structure a été retrouvée également dans la théorie du photon de Louis de Broglie. Comme toute théorie mathématique intéressante, elle peut être redécouverte sous de multiples aspects.

L'A.C.E.T. est ainsi un espace vectoriel de dimension 16, somme directe de l'espace des scalaires, de l'espace des vecteurs d'espace-temps, à 4 dimensions, de l'espace à 6 dimensions des bivecteurs, de l'espace à 4 dimension des trivecteurs ou pseudo-vecteurs, et de l'espace à une dimension des pseudo-scalaires. De même l'algèbre de Clifford d'espace est un espace vectoriel de dimension 8, somme directe de l'espace des scalaires, de l'espace des vecteurs (3 dimensions), de l'espace des bivecteurs (3 dimensions), de l'espace des pseudo-scalaires (1 dimension). L'élément général de l'A.C.E.T. s'écrit :

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \tag{1}$$

où A_0 est un scalaire, A_1 un vecteur, A_2 un bivecteur, A_3 un pseudo-vecteur et A_4 un pseudo-scalaire. Les termes d'indice pair engendrent une sous-algèbre de l'A.C.E.T., de dimension 8 et l'on peut identifier cette algèbre à l'A.C.E., de même dimension. De même la sous-algèbre paire de l'A.C.E. peut être identifiée au corps des quaternions.

Bien entendu ce n'est pas pour la beauté de l'outil mathématique qu'il faut lire Hestenes, mais pour les avantages que cet outil apporte à l'écriture des lois physiques. Or ces avantages sont remarquables, même pour la physique classique. Dès son premier livre, en 1966 [4], Hestenes donnait les lois de l'électromagnétisme sous la forme extrêmement concise et élégante de Marcel Riesz :

$$\partial\!\!\!/ F = \frac{4\pi}{c} J \quad , \quad F = \partial\!\!\!/ A \tag{2}$$

où F est le bivecteur champ électromagnétique, J est le vecteur courant, A le vecteur potentiel et $\partial\!\!\!/$ est l'opérateur différentiel gradient : $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$. Même si l'algèbre de Clifford ne servait à rien d'autre, la simplicité des formules (2) suffirait à justifier l'emploi de cet outil mathématique. De plus cette simplicité se maintient [3] si l'on complète les équations de Maxwell par des termes rendant compte du magnétisme libre, ou si l'on passe à l'électromagnétisme du photon de Louis de Broglie, dont les sept équations maxwelliennes peuvent même être regroupées en une seule.

Hestenes a également écrit un traité de mécanique classique [5], dans lequel il fait le meilleur usage des facilités apportées par l'algèbre de Clifford d'espace.

Il est tout à fait remarquable que les lois de l'électromagnétisme peuvent être écrites avec un seul opérateur différentiel, qui est justement celui de la mécanique ondulatoire. L'A.C.E.T. est le seul outil mathématique qui puisse mettre en évidence ce cousinage, dont il reste à découvrir le sens profond. Cette parenté est renforcée par le fait que le ψ d'Hestenes, tout comme F, est un élément pair de l'A.C.E.T..

Le propre d'une algèbre est de disposer, en plus du calcul vectoriel, d'une multiplication interne associative. Dans l'A.C.E., cette multiplication permet de regrouper en une seule opération le produit scalaire et le produit vectoriel. Dans l'A.C.E.T., le produit par un vecteur regroupe aussi le produit intérieur et le produit extérieur. Il est possible de donner une représentation de l'algèbre de Clifford par une algèbre de matrices [3] [6], le produit étant alors simplement le produit matriciel usuel. Ce produit interne permet de définir l'exponentielle par la série:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{3}$$

L'exponentielle est partout définie et est analytique sur toute l'algèbre. Dans le corps des complexes, elle applique l'ensemble des imaginaires purs sur le groupe multiplicatif des complexes unitaires, isomorphe au groupe des rotations planes autour d'un point. Dans l'A.C.E., elle applique les quaternions purs sur le groupe des quaternions unitaires, isomorphe à $SU(2)$. Dans l'A.C.E.T., l'exponentielle applique le sous-espace des éléments pairs sur le groupe multiplicatif des éléments pairs inversibles, et la restriction aux bivecteurs applique ceux-ci sur les rotations de Lorentz. Il en résulte que tout élément pair inversible s'écrit:

$$\psi = e^P \quad , \quad P = s + b + p \tag{4}$$

où P est la somme du scalaire s, du bivecteur b et du pseudo-scalaire p. Et comme chacun de ces éléments permute avec chacun des deux autres, on a: $e^P = e^s e^p e^b$. Si donc on pose

$$\rho = e^{2s} \quad , \quad p = \frac{\beta}{2}\gamma \quad , \quad \gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

et si on note R la rotation de Lorentz $R = e^b$, on obtient alors:

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma}R \tag{5}$$

qui est la forme la plus intéressante du ψ d'Hestenes. Il faut remarquer que la forme (5) avait été trouvée dix ans plus tôt par Jakobi et Lochak [7], mais avec à droite une matrice colonne constante, et par un raisonnement beaucoup plus compliqué.

De même que le corps des complexes ou des quaternions est doté d'une conjugaison, l'A.C.E.T. est dotée d'une conjugaison, la réversion, qui change l'ordre de tous les produits, de sorte que le renversé de :

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

est

$$\tilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4 \tag{6}$$

On a toujours $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$, et si l'on pose $A^+ = \gamma_0\tilde{A}\gamma_0$, alors avec le choix de la signature $+ - --$ pour la métrique d'espace-temps et la représentation matricielle usuelle, A^+ désigne simplement l'adjoint de A. On a :

$$\tilde{R} = \widetilde{e^b} = e^{\tilde{b}} = e^{-b} = \left(e^b\right)^{-1} = R^{-1} \tag{7}$$

Les grandeurs de champ de la théorie de Dirac sont ici :

$$\Omega_1 + \Omega_2\gamma = \psi\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\gamma} = \rho\cos\beta + \rho\sin\beta\gamma \tag{8}$$

$$j = \psi\gamma_0\tilde{\psi} = \rho R\gamma_0\tilde{R} \tag{9}$$

$$k = \psi\gamma_3\tilde{\psi} = \rho R\gamma_3\tilde{R} \tag{10}$$

j et k sont les vecteurs courant et spin. Quant au bivecteur densité de moment magnétique et électrique, c'est :

$$b = \psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi} = \rho R\gamma_2\gamma_1\tilde{R} \tag{11}$$

On peut remarquer le caractère tout à fait différent, extérieurement, des grandeurs de champ. Néanmoins Ω_1, Ω_2, j, k et b contiennent les $1+1+4+4+6=16$ grandeurs de la théorie de Dirac. L'invariance de jauge électrique, qui s'écrivait $\Psi' = e^{i\varphi}\Psi$ dans le formalisme de Dirac, s'écrit dans l'A.C.E.T. :

$$\psi' = \psi e^{\varphi\gamma_1\gamma_2} \tag{12}$$

La phase qui varie dans l'invariance de jauge électrique est la phase de la rotation dans le plan défini par le bivecteur $\gamma_1\gamma_2$, qu'on peut appeler le plan du spin. Hestenes a remarqué [8] que le facteur $i\hbar$ de la théorie de Dirac est en fait une représentation du spin de l'électron par une valeur propre du tenseur de spin. Il note également [9] que la théorie de Schrödinger est identique à la théorie de Pauli quand l'électron est dans un état propre du spin.

L'équation de Dirac - Hestenes s'écrit :

$$\hbar\partial\!\!\!/\psi\gamma_2\gamma_1 = m_0 c\psi\gamma_0 + \frac{e}{c}A\psi \tag{13}$$

Elle permet de décrire l'électron sans aucune intervention des nombres complexes, sans espace hermitien, sans opérateur, donc il s'agit d'un changement considérable du paysage de la mécanique ondulatoire. La disparition des nombres complexes permet d'entrevoir un rapprochement entre l'onde électronique et la physique du champ classique, c'est donc pour tous ceux qui sont attachés à l'enseignement de Louis de Broglie une piste qui ne devrait en aucun cas être sous-estimée. Ainsi que l'a écrit R. Boudet [10] : "On peut représenter l'électron de Dirac par l'horloge dont s'est servi L. de Broglie pour décrire le mouvement vibratoire de son corpuscule. Le plan du cadran de l'horloge est le plan du spin."

Outre les articles précédemment cités, on se doit de lire l'article de 1973 [11], dans lequel Hestenes étudie de manière détaillée le tenseur impulsion-énergie asymétrique de Costa de Beauregard et Tétrode, et toutes les relations avec l'impulsion, la vitesse, le spin, qui peuvent être étudiées de manière beaucoup plus commode dans le cadre de l'A.C.E.T.. Il y retrouve le fait que la loi d'évolution du tenseur d'énergie a exactement la forme que l'électrodynamiqu classique donne pour l'effet d'un champ électromagnétique agissant sur un courant chargé. Hestenes montre aussi que la constante de Planck est inséparable du spin dans la théorie de Dirac, donc aussi dans la théorie de Schrödinger. Il remarque que le théorème donnant le rapport gyromagnétique d'un fluide chargé classique suppose implicitement que le flux d'impulsion est colinéaire au flux de charge, ce qui n'est pas vrai en général en théorie de Dirac.

On trouvera en [12] une bibliographie plus complète des travaux d'Hestenes. Comme pour toute oeuvre humaine, les articles d'Hestenes souffrent de quelques imperfections. Le premier article [2] contenait une erreur corrigée dans l'article [11], et utilisait un produit $\gamma_1\gamma_2$ au lieu du produit $\gamma_2\gamma_1$, ce qui ne permet pas de retrouver exactement la théorie classique. Ce sont des détails apparemment sans importance, mais qui peuvent perturber le lecteur non averti.

UNE NOUVELLE VISION DE LA RELATIVITE.

Au fil des années et des articles, un glissement s'est opéré sur le lien avec la relativité, qu'il est intéressant d'analyser. Le point de départ est classique: [4] dans la rotation de Lorentz r, un vecteur x est transformé en $x' = Rx\tilde{R}$ et ψ est transformé en $\psi' = R\psi$, de sorte que l'on a, par exemple: $j' = Rj\tilde{R}$. C'est, habillé de manière légèrement différente, le point de vue de la théorie de Dirac où le spineur Ψ devient, dans la rotation r : $\Psi' = R\Psi$. Ensuite les articles de 1967 et 1973 sont complètement muets sur le sujet: on ne dit plus ce que devient ψ sous une transformation de Lorentz.

Hestenes publie en 1974 [13] [14] deux articles intéressants par le nouveau point de vue qu'ils donnent de la mécanique et de l'électrodynamique relativiste: chaque observateur en mouvement voit les grandeurs propres, c'est à dire les vecteurs, bivecteurs, de l'A.C.E.T. de manière relative à l'A.C.E. qu'il utilise, et qui est différente pour deux observateurs différents en mouvement l'un par rapport à l'autre. La vitesse d'univers, le vecteur énergie-impulsion, le champ électromagnétique qui sont des éléments à valeur définie dans l'A.C.E.T., sont décomposés par un observateur local et Hestenes montre par exemple comment la force de Lorentz :

$$\frac{dp}{dt} = e(E + \frac{1}{c} v \times B) \tag{14}$$

est la traduction dans l'A.C.E. de l'observateur de l'équation intrinsèque, à valeur dans l'A.C.E.T. :

$$\dot{p} = eF \cdot v \tag{15}$$

Ceci ne remet nullement en cause les postulats de la relativité restreinte. Le point de vue d'Hestenes, mettant à la base l'A.C.E.T., est pleinement conforme à l'affirmation d'Einstein : "Les lois de la nature ne peuvent prendre une expression logiquement satisfaisante que si elles sont formulées dans le continuum spatio-temporel quadridimensionnel". C'est bien pour cela que (15) est plus simple que (14). Le champ électromagnétique apparait encore plus comme une unité formelle quand on écrit les lois d'évolution sous la forme (2) et (15). Seulement au lieu de considérer que les lois de la physique ne dépendent pas du repère utilisé, nous sommes maintenant amenés à dire que les GRANDEURS de la physique sont à valeur fixe dans l'A.C.E.T. et sont vues sous des aspects différents dans les A.C.E. relatives à chaque observateur.

Armé de cette nouvelle approche de la relativité, Hestenes s'est alors appliqué à regarder la théorie de Dirac en termes de grandeurs propres, à valeur dans l'A.C.E.T., et de grandeurs relatives à l'A.C.E. d'un observateur [8] [9]. L'équation (13) utilise un repère donné de l'espace-temps. On peut l'écrire d'une manière ne dépendant pas de cette base, sous la forme que Boudet [10] appelle équation invariante, en la multipliant à droite par l'inverse de ψ, ce qui a un sens puisque nous disposons d'une multiplication interne:

$$\hbar \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = m_0 c \psi \gamma_0 \psi^{-1} + \frac{e}{c} A \tag{16}$$

Cette équation est bien à valeur dans l'A.C.E.T., puisque le potentiel A est un vecteur déterminé d'espace-temps, tandis que $\psi\gamma_0\psi^{-1}$ et $\partial\!\!\!/ \psi\gamma_2\gamma_1\psi^{-1}$ sont sommes d'un vecteur et d'un trivecteur :

$$\psi\gamma_0\psi^{-1} = e^{\beta\gamma} R\gamma_0\tilde{R} = \cos\beta e_0 + \sin\beta\gamma e_0 \quad , \quad e_0 = R\gamma_0\tilde{R} \tag{17}$$

Pour que les vecteurs $e_j = R\gamma_j\tilde{R}$ ne dépendent pas du repère particulier utilisé, il faut que l'on ait, pour un autre repère orthornormé, obtenu par une rotation S de Lorentz à partir de (γ_j), c'est à dire tel que : $\gamma'_j = S\gamma_j S^{-1}$,

$$e_j = R\gamma_j\tilde{R} = R'\gamma'_j\tilde{R}' = R'S\gamma_j\tilde{S}\tilde{R}' = (R'S)\gamma_j(\widetilde{R'S})$$

donc on doit avoir :

$$R = R'S \quad , \quad R' = RS^{-1} \quad , \quad \psi' = \psi S^{-1} \tag{17}$$

Or ceci n'a absolument rien à voir avec la transformation de la théorie de Dirac. L'invariance relativiste de la théorie de Dirac n'est pas l'invariance relativiste de la théorie d'Hestenes. On peut d'ailleurs voir que la transformation $\Psi' = S\Psi$ n'assure qu'une invariance FORMELLE de la théorie, les équations ayant la même forme avec des objets différents, tandis qu'en utilisant (17), non seulement l'équation d'onde est inchangée, mais les objets décrits par cette équation ne bougent pas.

Il en résulte que si l'équation d'Hestenes est équivalente à celle de Dirac pour un repère particulier au repos, les deux théories ne sont pas équivalentes pour des observateurs en mouvement. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles on n'a jamais su construire une théorie de champ unitaire englobant la mécanique quantique. Par un heureux ou fâcheux hasard dû aux propriétés particulières des rotations de Lorentz, la formule fausse $\Psi' = S\Psi$ permet néanmoins de calculer de manière exacte les coordonnées de certaines grandeurs, et ce sont les seules que la théorie de Dirac s'autorise, donc on ne s'aperçoit de rien.

Les objets fondamentaux de la théorie de l'électron, à valeur dans l'A.C.E.T., sont la densité ρ, l'angle d'Yvon-Takabayasi β et la rotation R qui fait passer d'une base fixe $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ quelconque de l'espace-temps à la base orthonormée mobile liée à la particule, (e_0, e_1, e_2, e_3), où $e_j = R\gamma_j\tilde{R}$. La formule de transformation (17) ne fait alors que traduire la composition des rotations :

$$\begin{array}{ccc} Y_j & \overset{R}{\longmapsto} & e_j \\ {\scriptstyle S}\downarrow\uparrow{\scriptstyle S^{-1}} & \nearrow {\scriptstyle R'} & \\ Y'_j & & \end{array} \quad , \quad R' = RS^{-1} \tag{18}$$

La vision que l'on a, grâce à l'A.C.E.T., de l'onde associée à un électron, apparait donc plus comme une théorie de champ, où le champ

(ρ, β, R) varie de point en point, que comme une théorie quantique. Ceci amène Hestenes [8] à critiquer le principe suivant lequel "les valeurs propres des opérateurs hermitiens correspondent aux valeurs observées", ce qui aboutit en théorie de Dirac à dire que la vitesse de l'électron est la vitesse de la lumière, chose assurément très bizarre. Il analyse les différents rôles joués par l'hermiticité dans les théories de Dirac et de Schrödinger. Il note que dans le cas des états liés dans un potentiel, il n'y a pas nécessité de regarder les valeurs propres, mais il suffit d'utiliser le lien fondamental entre l'énergie et la phase pour obtenir le spectre de l'énergie. Il suggère que la signification physique des valeurs propres dans la théorie quantique est qu'elles correspondent à des observables locaux qui sont homogènes dans l'espace et constants dans le temps.

Qu'y a-t-il à attendre de ce nouveau point de vue? Pour ceux qui ont une confiance aveugle dans la cohérence des postulats de la mécanique quantique, assurément rien, et c'est pour cela qu'Hestenes a eu l'impression de prêcher dans le désert [12]. Pour ceux qui se limiteront à retrouver sous un nouvel habillage les résultats de la théorie de Dirac, le bénéfice peut être maigre. Mais il est peut-être possible de dépasser la théorie linéaire, c'est en tout cas ce que nous avons tenté [15] avec l'équation :

$$\hbar \partial\!\!\!/ \psi \gamma_2 \gamma_1 \psi^{-1} = m_0 c \frac{1}{\rho} \psi \gamma_0 \tilde{\psi} + \frac{e}{c} A \tag{19}$$

Cette équation non linéaire admet une conjugaison de charge sans énergies négatives. Elle nous parait pouvoir obtenir des résultats très proches de ceux de l'équation de Dirac dans le cas de l'atome d'hydrogène, mais cela reste à prouver.

On peut se demander pourquoi, armé de cet outil puissant qu'il manie depuis plus de 20 ans, Hestenes n'a pas su révolutionner la physique. Je crois que cela tient à ce qu'il n'a pas vraiment intégré dans sa pensée le dualisme ondes-corpuscules. Il voit l'onde de Dirac comme une onde statistique moyenne, et cherche [16] à décrire l'électron comme une particule associée à une onde électromagnétique issue de son propre mouvement périodique. Mais lâcher l'onde de Dirac ainsi, n'est-ce pas lâcher la proie pour l'ombre? Après tout, c'est l'onde de Dirac qui fournit les bons nombres quantiques et les bons niveaux d'énergie, et ce n'est pas demain qu'une autre théorie en fera autant. En outre on peut critiquer l'interprétation seulement statistique de l'onde de Dirac.

En effet si l'on obtient une cohérence avec l'électromagnétisme classique :

$$\partial_\mu T^\mu = eF \cdot j \tag{20}$$

c'est parce que l'on utilise la densité ρ, présente dans le tenseur T qui donne une densité d'impulsion-énergie. Si l'on veut raisonner en termes de particules, il faut utiliser un vrai tenseur impulsion-énergie, et cela est possible en posant:

$$T = \rho \mathcal{T} \quad , \quad T^{\mu\nu} = \rho \mathcal{T}^{\mu\nu} \tag{21}$$

mais alors la loi d'évolution de ce tenseur sera :

$$\partial_\mu \mathcal{T}^\mu = eF \cdot v - \partial_\mu (ln\rho) \mathcal{T}^\mu \tag{22}$$

donc fera intervenir, outre la force de Lorentz agissant sur la particule, une force d'origine purement quantique liée à l'existence de l'onde, ce que L. de Broglie avait trouvé il y a bien longtemps avec le potentiel quantique. On est donc amené à penser que l'onde de Dirac n'est pas seulement une onde statistique, mais qu'elle informe l'électron individuel de l'univers qui l'entoure.

Louis de Broglie écrivait dans "l'Electron magnétique" : "On ne peut guère prétendre que la théorie de Dirac, dans son état actuel, soit complètement en accord avec les conceptions de la relativité, même sous sa forme restreinte. Une des idées directrices de la théorie de la relativité parait être, en effet, de toujours faire intervenir d'une façon symétrique les coordonnées d'espace et de temps. Or en théorie de Dirac cette intervention symétrique des variables $xyzt$ n'est pas réalisée... La variable temps ne joue aucun rôle dans le calcul des valeurs et fonctions propres d'un opérateur hermitique; quand elle y figure, c'est simplement à titre de paramètre... Les densités de valeur moyenne sont définies dans l'espace et pour passer de la densité à la valeur moyenne elle-même, il faut faire une intégration dans l'espace, opération qui n'est pas relativistiquement invariante."

Les critiques sévères que portait L. de Broglie dès 1934 aux principes généraux de la mécanique quantique justifient que l'on fasse l'effort d'étudier à fond cet autre formalisme, complètement relativiste, qu'est l'algèbre de Clifford d'espace-temps.

Références

[1] L. de Broglie : L'électron magnétique, (Hermann, Paris 1934)

[2] D. Hestenes : Real Spinor Fields. (Journal of Mathematical Physics Vol. 8 number 4. 1967)
[3] C. Daviau : Electromagnétisme, monopôles magnétiques et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps (Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 14 net n1989)
[4] D. Hestenes : Space-Time Algebra (Gordon and Breach, New York 1966)
[5] D. Hestenes : New Foundations for Classical Mechanics (Reidel, Dordrecht 1986)
[6] G. Casanova : L'Algèbre Vectorielle. (Presses Universitaires de France, Paris 1976).
[7] G. Jakobi et G. Lochak : Introduction des paramètres relativistes de Cayley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac. (Comptes rendus, t. 243 1956 p. 234-237 et p.357-360)
[8] D. Hestenes : Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory (Journal of Math. Physics, Vol. 16 nMarch 1975)
[9] R. Gurtler and D. Hestenes : Consistency in the formulation of the Dirac, Pauli, and Schrödinger theories (Journal of Math. Physics, Vol 16, n, March 1975)
[10] R. Boudet : La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace- temps. (Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 13 n1988)
[11] D. Hestenes : Local observables in the Dirac theory (J. Math. Phys., Vol. 14, n, July 1973)
[12] D. Hestenes : "A Unified Language for Mathematics and Physics" and "Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics". JSR Chisholm and AK Common eds (Reidel, Dordrecht, 1986)
[13] D. Hestenes : Proper particle mechanics (J. Math. Phys., Vol. 15, no 10, October 1974)
[14] D. Hestenes : Proper dynamics of a rigid point particle (J. Math. Phys., Vol. 15, no 10, October 1974)
[15] C. Daviau et G. Lochak : Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire. (Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 16 n1991)
[16] D. Hestenes : Quantum Mechanics from Self-Interaction (Foundations of Physics, Vol 15, n, 1985)

(Manuscrit reçu le 10 avril 1991)