

Aspects hydrodynamiques de la mécanique quantique

P. PAILLÈRE

Centre d'Etudes de Limeil-Valenton
94195 Villeneuve St Georges cedex

RESUME. La dérivation partielle par rapport à l'espace et au temps des équations d'onde de Schrödinger et Klein-Gordon conduit dans le premier cas au système des équations de l'hydrodynamique classique et dans le second au système des équations de l'hydrodynamique relativiste. Dans les deux cas, toutes les quantités thermodynamiques, masse spécifique, pression scalaire, énergie interne et tenseur de viscosité sont exprimés uniquement à partir de l'amplitude de l'onde, alors que la vitesse est liée au gradient de sa phase. Dans le cas relativiste on montre que l'indice du fluide que constitue la substance de l'électron est égal, à une constante près, à la masse variable de de Broglie. Il apparaît ainsi que la théorie des milieux continus chargés de A. Lichnérowicz constitue le pont entre la théorie du guidage de de Broglie et le système des équations de l'hydrodynamique associé à l'équation de Klein-Gordon.

ABSTRACT. Space and time differentiation of the Schrödinger equation leads to the system of classical hydrodynamics equations while differentiation of the Klein-Gordon equation leads to relativistic hydrodynamics. In both cases, all the thermodynamical quantities, density, scalar pressure, internal energy and viscosity tensor are expressed solely with the wave amplitude while velocity depends on the phase gradient. In the relativistic case, it is shown that the index of the fluid constituted by the electron substance is equal (apart from a constant multiplicative term) to the variable mass of L. de Broglie. The theory of charged continuous media by A. Lichnerowicz constitutes then a bridge between the guidance theory of L. de Broglie and the system of hydrodynamical equations associated with the Klein-Gordon equation.

1 - Introduction

Le développement de la mécanique quantique a donné lieu, comme l'on sait, à deux courants de pensée principaux, le courant probabiliste, rattaché à Niels Bohr, et le courant déterministe rattaché à Louis de Broglie. Dans cette dernière perspective qui seule sera envisagée ici, le traitement d'une particule chargée, l'électron en particulier, peut être abordé soit du point de vue de la particule "ponctuelle", soit du point de vue de la particule étendue. En fait ces deux points de vue relèvent de deux formalismes complémentaires qui forment un tout homogène.

La particule ponctuelle relève de l'équation d'onde, la particule étendue, de l'hydrodynamique. Dans les développements qui vont suivre, nous montrerons de quelle façon l'on peut passer du formalisme ondulatoire au formalisme hydrodynamique dans le cas où le spin de la particule n'est pas pris en compte.

Dans un souci de généralité, le cadre de cette étude est constitué par un espace riemannien. La métrique adoptée est de signature + ---

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad , \quad g_{00} > 0 \\ (\alpha, \beta) &= 0, 1, 2, 3 \quad , \quad x^0 = ct \end{aligned} \quad (1-1)$$

Cette convention qui a l'avantage de fournir un $(ds)^2$ positif oblige à réfléchir à la nature des grandeurs physiques du point de vue des notions de "composante covariante" et "composante contravariante". A titre d'exemple nous allons considérer l'opérateur impulsion \hat{p} dans l'espace de Minkowski.

Dans le cas où la métrique est de genre espace, c'est-à-dire de signature - + + +, \hat{p}_α est défini par :

$$\hat{p}_\alpha = -i\hbar\partial_\alpha$$

Cet opérateur est tel que :

$$\begin{aligned} c\hat{p}_0 &= -\hat{E} = -i\hbar\partial_0 = -c\hat{p}^0 \\ \hat{p}_j &= \hat{p}^j = -i\hbar\partial_j \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\hat{p}^0 = \frac{\hat{E}}{c} = i\hbar\partial_0 \quad , \quad \hat{p}^j = \hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$$

Dans le cas où la métrique est du genre temps, c'est-à-dire de signature $+ - - -$, \hat{p}_α est défini par la relation :

$$\hat{p}_\alpha = i\hbar\partial_\alpha \quad (1-2)$$

Cette fois

$$c\hat{p}_0 = \hat{E} = ic\hbar\partial_0 = c\hat{p}^0 \quad , \quad \hat{p}_j = -\hat{p}^j = i\hbar\partial_j$$

et par conséquent :

$$\hat{p}^0 = \frac{\hat{E}}{c} = i\hbar\partial_0 \quad , \quad \hat{p}^j = -\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j \quad (1-3)$$

Dans les deux configurations, ce sont les composantes contravariantes qui se conforment aux définitions habituelles de l'énergie et de l'impulsion présentées dans les ouvrages classiques de mécanique quantique.

Remarquons que l'application à une fonction d'onde scalaire ψ de l'opérateur

$$\hat{p}_\alpha = i\hbar\partial_\alpha$$

donne le vecteur

$$\hat{p}_\alpha\psi = i\hbar\partial_\alpha\psi$$

Toutefois, si l'on désire que l'opération

$$\hat{p}^\alpha\hat{p}_\alpha\psi$$

présente la propriété d'invariance, nous sommes conduits à remplacer le symbole de dérivation partielle ∂_α par le symbole de dérivation covariante ∇_α . De ce fait :

$$\hat{p}_\alpha = i\hbar\nabla_\alpha \quad (1-4)$$

et

$$\hat{p}^\alpha\hat{p}_\alpha = -\hbar^2\nabla^\alpha\nabla_\alpha = -\hbar^2 \square \quad (1-5)$$

étant bien entendu que si \hat{p}_α est appliqué à un scalaire, on a :

$$\hat{p}_\alpha\psi = i\hbar\nabla_\alpha\psi = i\hbar\partial_\alpha\psi$$

La vitesse d'univers, définie par :

$$u^\alpha = dx^\alpha/ds \quad (1-6)$$

est telle que :

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \quad (1-7)$$

Cette relation est particulièrement importante dans notre étude puisque la démarche suivie pour obtenir les équations d'onde consistera à éliminer la vitesse entre cette relation et l'équation du quadrivecteur impulsion de la particule ponctuelle.

La relation (1-7) s'écrit :

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1 \quad (1-8)$$

Si l'on pose :

$$\Upsilon^i = g^{io} / \sqrt{g^{oo}} \quad , \quad \Upsilon^{ij} = -g^{ij} + \Upsilon^i \Upsilon^j \quad (1-9)$$

on obtient, i et j pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3,

$$(\sqrt{g^{oo}} u_0 + \Upsilon^i u_i)^2 - \Upsilon^{ij} u_i u_j = 1 \quad (1-10)$$

Ce formalisme a l'avantage de faire apparaître le produit purement spatial $\Upsilon^{ij} u_i u_j$ qui, dans le cas d'une métrique à "temps orthogonal" est égal au produit scalaire des composantes spatiales de la vitesse d'univers.

2 - L'opérateur vitesse et les équations d'onde

C'est l'opérateur vitesse, déduit de l'opérateur impulsion, qui joue le rôle principal dans la détermination des équations d'ondes de Klein-Gordon et Schrödinger.

Le quadrivecteur-impulsion de l'électron a pour expression, dans le cas où le spin n'est pas pris en compte :

$$p_\alpha = m_0 c u_\alpha + \frac{q}{c} \varphi_\alpha \quad (2-1)$$

m_0 et q désignant respectivement la masse et la charge de l'électron, c , la vitesse de la lumière, et φ_α le 4-vecteur potentiel électromagnétique.

La vitesse a pour expression

$$u_\alpha = \frac{1}{m_0 c} (p_\alpha - \frac{q}{c} \varphi_\alpha) \quad (2-2)$$

les quantités (u, p) figurant dans cette relation sont remplacées par des opérateurs :

$$\hat{u}_\alpha = \frac{1}{m_0 c} \left(\hat{p}_\alpha - \frac{q}{c} \varphi_\alpha \right) \quad \text{avec} \quad \hat{p}_\alpha = i\hbar \nabla_\alpha \quad (2-3)$$

d'où, posant :

$$\mu_0 = m_0 c / \hbar \quad \text{et} \quad k = q / \hbar c, \quad (2-4)$$

on obtient :

$$\hat{u}_\alpha = \frac{i}{\mu_0} (\nabla_\alpha + ik\varphi_\alpha) \quad (2-5)$$

Pour obtenir l'équation de Klein-Gordon, on part de la relation (1-8)

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1$$

On transforme cette équation en équation d'onde en la réécrivant :

$$g^{\alpha\beta} \hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta \psi = \psi \quad (2-6)$$

Soit :

$$[g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha + ik\varphi_\alpha)(\nabla_\beta + ik\varphi_\alpha) + \mu_0^2] \psi = 0, \quad (2-7)$$

Soit encore, si l'on pose :

$$D_\alpha = \nabla_\alpha + ik\varphi_\alpha \quad (2-8)$$

$$(g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + \mu_0^2) \psi = 0 \quad (2-9)$$

Pour obtenir l'équation de Schrödinger, on part de la relation (1-10) :

$$(\sqrt{g^{oo}} u_o + \gamma^i u_i)^2 - \gamma^{ij} u_i u_j = 1$$

et l'on fait l'hypothèse que la vitesse de l'électron est très inférieure à celle de la lumière, soit :

$$|u_i| \ll 1 \quad \forall i \quad (2-10)$$

Dans ces conditions, la relation (1-10) peut être écrite :

$$\sqrt{g^{oo}} u_o + \gamma^i u_i \simeq 1 + \frac{1}{2} \gamma^{ij} u_i u_j \quad (2-11)$$

soit, après “quantification” :

$$(\sqrt{g^{oo}}\hat{u}_0 + \gamma^i\hat{u}_i)\phi = (1 + \frac{1}{2}\gamma^{ij}\hat{u}_i\hat{u}_j)\phi \quad (2-12)$$

Compte tenu de (2-5) et (2-8) la relation (2-12) s’écrit :

$$i\sqrt{g^{oo}}\nabla_0\phi - k\sqrt{g^{oo}}\varphi_0\phi + i\gamma^l D_l\phi = \mu_0\phi - \frac{\gamma^{ij}}{2\mu_0} D_i D_j\phi \quad (2-13)$$

Dans le cas où

$$\sqrt{g^{oo}} = 1 \quad , \quad g^{oi} = 0, \quad (2-14)$$

la relation (2-13) devient, compte tenu de (1-9) :

$$i\nabla_0\phi - k\varphi_0\phi = \mu_0\phi + \frac{g^{ij}}{2\mu_0} D_i D_j\phi$$

Avec le changement de fonction inconnue :

$$\phi = e^{-i\mu_0 x^0} \psi, \quad (2-15)$$

cette relation, compte tenu de (2-4), s’écrit

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_0} g^{ij} D_i D_j\psi + q\varphi_0\psi$$

soit, en posant :

$$V = q\varphi_0 \quad (2-16)$$

et en imposant :

$$g^{ij} = -\delta^{ij} \quad (\text{Minkowski} + - - -) i, j = 1, 2, 3 \quad (2-17)$$

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_{i=1}^3 (\nabla_i + ik\varphi_i)(\nabla_i + ik\varphi_i)\psi + V\psi \quad (2-18)$$

C’est la classique équation de Schrödinger. Si nous résumons :

- l’équation de Klein-Gordon est déduite de la relation entre les composantes de la vitesse d’univers

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1$$

- l'équation de Schrödinger est déduite de l'approximation de la relation entre les composantes de la vitesse lorsque celle-ci est très inférieure à la vitesse de la lumière

$$\sqrt{g^{00}}u_0 + \gamma^i u_i = 1 + \frac{1}{2}\gamma^{ij}u_i u_j$$

- Le point de départ obligé est toujours constitué par une relation entre les composantes covariantes de la vitesse d'univers, ce qui impose la définition de *l'opérateur vitesse*, relié à l'opérateur impulsion par l'équation (2-5), -lorsque le spin n'est pas pris en compte.

3 - L'hydrodynamique de Schrödinger

3-1 Les équations de base

Considérons l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_0} g^{ij} (\nabla_i + ik\varphi_i) (\nabla_j + ik\varphi_j) \psi + V\psi \quad (3-1)$$

$$k = q/\hbar c \quad , \quad V = q\varphi_0.$$

Cette équation s'écrit encore

$$i\hbar c (\nabla_0 + ik\varphi_0) \psi = \frac{\hbar^2}{2m_0} g^{ij} (\nabla_i + ik\varphi_i) (\nabla_j + ik\varphi_j) \psi \quad (3-2)$$

Si l'on impose à l'onde ψ d'être de la forme [11]:

$$\psi = R e^{-iS/\hbar} \quad (3-3)$$

on a, $\forall \alpha$:

$$(\nabla_\alpha + ik\phi_\alpha) \psi = \left[\frac{\nabla_\alpha R}{R} - \frac{i}{\hbar} \left(\nabla_\alpha S - \frac{q}{c} \phi_\alpha \right) \right] \psi \quad (3-4)$$

On pose :

$$F_\alpha = \frac{\nabla_\alpha R}{R} - \frac{i}{\hbar} \left(\nabla_\alpha S - \frac{q}{c} \phi_\alpha \right) \quad (3-5)$$

et

$$P_\alpha = \nabla_\alpha S - \frac{q}{c} \phi_\alpha \quad (3-6)$$

de sorte que :

$$F_\alpha = \frac{\nabla_\alpha R}{R} - \frac{i}{\hbar} P_\alpha.$$

L'équation (3-2) s'écrit

$$i\hbar c F_0 \psi = \frac{\hbar^2}{2m_0} g^{ij} (\nabla_i + k\varphi_i)(F_j \psi);$$

Comme

$$(\nabla_i + ik\varphi_i)(F_j \psi) = (\nabla_i F_j + F_j F_i) \psi,$$

on obtient, après simplification par ψ :

$$i\hbar c F_0 = \frac{\hbar^2}{2m_0} (F^i F_i + \nabla^i F_i)$$

soit :

$$i\hbar c \left(\frac{\nabla_0 R}{R} - \frac{i}{\hbar} P_0 \right) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \left(\frac{\nabla^i R}{R} - \frac{i}{\hbar} P^i \right) \left(\frac{\nabla_i R}{R} - \frac{i}{\hbar} P_i \right) + \nabla^i \left(\frac{\nabla_i R}{R} - \frac{i}{\hbar} P_i \right) \right\}$$

Les quantités $\nabla_\alpha R/R$ et P_α étant réelles, il est facile d'effectuer la séparation entre partie réelle et partie imaginaire ; tous calculs faits, on obtient les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial_0 R}{R} + \frac{1}{2m_0} \left(\frac{2\nabla^i R}{R} P_i + \nabla^i P_i \right) = 0 \quad (3-7)$$

$$cP_0 = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} - \frac{P^i P_i}{\hbar^2} \right) \quad (3-8)$$

A ce niveau des calculs, on pose :

$$P_i = m_0 v_i \quad (3-9)$$

c'est-à-dire

$$\nabla_i S - \frac{q}{c} \varphi_i = m_0 v_i = P_i \quad (3-9')$$

soit encore

$$\nabla_i S = m_0 v_i + \frac{q}{c} \varphi_i = p_i \quad (3-10)$$

Dans ces conditions l'équation (3-7) s'écrit

$$\frac{\partial_0 R}{R} + v^i \frac{\nabla_i R}{R} + \frac{1}{2} \nabla_i v^i = 0$$

soit, après multiplication par $2R^2 m_0$

$$\partial_0(m_0 R^2) + \nabla_i(m_0 R^2 v^i) = 0 \quad (3-11)$$

Cette équation évoque l'équation de continuité de l'hydrodynamique classique à condition de poser, par analogie :

$$\rho = m_0 R^2 \quad (3-12)$$

ce qui implique que

$$[R] \sim [l]^{-3/2} \quad (3-13)$$

Quant à l'équation (3-8), elle s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} = q\varphi_0 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} - \frac{P^i P_i}{2m_0}$$

on pose :

$$\Delta R = -\nabla^i \nabla_i R \quad (3-14)$$

et

$$U = q\varphi_0 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta R}{R} \quad (3-15)$$

Compte tenu de (3-9) l'équation (3-8) peut être écrite :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} (\nabla^i S - \frac{q}{c} \varphi^i) (\nabla_i S - \frac{q}{c} \varphi_i) - U = 0 \quad (3-16)$$

Cette équation qui constitue la transposition au niveau quantique de l'équation de Hamilton Jacobi, ¹ exprime que l'énergie totale E définie par :

$$E = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3-17)$$

¹ On ne peut parler, stricto sensu, de l'équation de Hamilton-Jacobi, puisqu'il ne s'agit pas, comme le fait remarquer le Professeur Bass de mécanique du point. Mais comme elle lui ressemble, par souci de commodité, voire de facilité, nous continuerons à l'appeler ainsi.

est égale à la somme de l'énergie potentielle due au potentiel mécanique U , et de l'énergie cinétique

$$-\frac{P^i P_i}{2m_0} = \frac{m_0}{2} \sum_i (v^i)^2 \quad (3-18)$$

Il faut souligner que l'équation de continuité et l'équation de Hamilton-Jacobi qui apparaissent résultent des deux définitions par analogie :

$$\rho = m_0 R^2 \quad , \quad m_0 v_i = \nabla_i S - \frac{q}{c} \varphi_i, \quad (3-19)$$

qui constituent le pont entre le quantique, (R, S) , et l'hydrodynamique, (ρ, v_j) , comme vont le confirmer les développements ultérieurs.

3-2 Equations de l'impulsion

Soit l'équation de Hamilton-Jacobi (3-16), que, compte tenu de (3-9), (3-15), nous écrivons :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m_0}{2} v_i v^i - q\varphi_0 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta R}{R} = 0 \quad (3-20)$$

on prend le gradient de cette équation, et comme nous sommes en métrique de Minkowski, nous pouvons permuter l'ordre des dérivations de sorte que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_j S) + m_0 v_i \nabla_j v^i - q \nabla_j \varphi_0 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_j \left(\frac{\Delta R}{R} \right) = 0$$

comme

$$\nabla_j S = m_0 v_j + \frac{q}{c} \varphi_j,$$

il s'ensuit que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_0 v_j) + m_0 v_i \nabla_j v^i + q \left(\frac{\partial}{\partial ct} \phi_j - \nabla_j \phi_0 \right) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_j \frac{\Delta R}{R} = 0$$

on a

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial (ct)} = \nabla_0 \varphi_j \quad \text{et} \quad \nabla_0 \varphi_j - \nabla_j \varphi_0 = F_{0j};$$

l'équation H.J. est alors multipliée par

$$R^2 = \rho/m_0$$

ce qui donne :

$$\rho\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \nabla_j v^i\right) + qR^2 F_{oj} - \frac{\hbar^2}{2m_0^2} R^2 \nabla_j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R}\right) = 0$$

on définit la densité volumique de charge électrique par :

$$\mu = qR^2 \quad (3-21)$$

Par ailleurs, d'après (3-9)', on trouve

$$v^i \nabla_j v_i = v^i \nabla_i v_j - \frac{q}{m_0} F_{ji} \frac{v^i}{c} \quad (3-22)$$

et l'équation (3-20) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i v_j - \mu \left(F_{jo} + F_{ji} \frac{v^i}{c}\right) - \frac{\hbar^2}{2} R^2 \nabla_j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R}\right) = 0$$

le coefficient de μ n'est autre que la force de Lorentz :

$$F_{Lj} = \mu F_{j\alpha} u^\alpha \quad (3-23)$$

et l'équation (3-20) devient :

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i v_j - \frac{\hbar^2}{2} R^2 \nabla_j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R}\right) = f_{Lj}$$

que l'on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \nabla_i(\rho v^i v^j) - v^j \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i)\right] - \frac{\hbar^2}{2m_0^2} R^2 \nabla^j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R}\right) = f_L^j$$

on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0$$

en outre (3-19) permet d'écrire

$$R^2 \nabla^j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} \right) = \frac{1}{2m_0} \nabla_i \{ \nabla^j \nabla^i \rho - (\nabla^i \rho)(\nabla^j \rho) / \rho \} \quad (3-24)$$

Remarque : on peut aussi écrire

$$R^2 \nabla^j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} \right) = \frac{1}{2m_0} \rho \nabla^i \nabla^j \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (3-24')$$

ρ_0 : constante d'intégration; d'où une première expression des équations de l'impulsion du fluide de Schrödinger.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^j) + \nabla_i \{ \rho v^i v^j - \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \rho \nabla^i \nabla^j \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \} = f_L^j \quad (3-25)$$

Il faut remarquer que (3-24) s'écrit encore :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m_0} \right) R^2 \nabla^j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} \right) = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla_i \{ g^{ij} \nabla^l \nabla_l \rho - \frac{(\nabla^i \rho)(\nabla^j \rho)}{\rho} \} \quad (3-26)$$

d'où :

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + \nabla_i \{ \rho v^i v^j - g^{ij} \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 (\nabla^l \nabla_l \rho) + \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \frac{\nabla^i \rho \cdot \nabla^j \rho}{\rho} \} = f_L^j \quad (3-27)$$

Tout se passe comme si le fluide que constitue la substance de l'électron de Schrödinger présentait un tenseur des pressions P^{ij} tel que :

$$P^{ij} = -p g^{ij} + \Pi^{ij} \quad (3-28)$$

la pression scalaire p ayant pour expression :

$$p = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^i \nabla_i \rho \quad (3-29)$$

et le tenseur de viscosité :

$$\Pi^{ij} = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^i \rho \nabla^j \rho / \rho \quad (3-30)$$

avec $\rho = m_0 R^2$. D'après (3-25) on a aussi

$$P^{ij} = -\left(\frac{\hbar}{2m_0}\right)^2 \rho \nabla^i \nabla^j \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (3-31)$$

et

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + \nabla_i(P^{ij}) = F_L^j \quad (3-32)$$

3.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie de l'hydrodynamique de Schrödinger est obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation de Hamilton-Jacobi (3-16) en tenant compte de (3-17)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v^i \nabla_i E - q \frac{v^i}{c} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Cette équation est multipliée par $\rho = m_0 R^2$. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla_i(\rho v^i E) - E\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i)\right] - m_0 \mu \frac{v^i}{c} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - m_0 R^2 \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (3-33)$$

mais, d'après (3-16), (3-17) et (3-18)

$$E = \frac{m_0 v^2}{2} + U \quad (3-34)$$

et (3-33) s'écrit, après division par m_0 , et compte tenu de (3-11):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + \nabla_i\left(\rho \frac{v^2}{2} v^i\right) - \mu v^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^0} + R^2 v^j \nabla_j U = 0$$

$$R^2 v^j \nabla_j U = R^2 v^j \left[q \nabla_j \varphi_0 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} \right) \right]$$

or, d'après (3-26)

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} R^2 \nabla^j \left(\frac{\nabla^i \nabla_i R}{R} \right) = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla_i \{ g^{ij} \nabla^l \nabla_l \rho - (\nabla^i \rho \nabla^j \rho) / \rho \} = -\nabla_i(P^{ij}) \quad (3-35)$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2}) + \nabla_i(\rho \frac{v^2}{2} v^i) + \mu v^j (\nabla_j \varphi_0 - \nabla_0 \varphi_j) - v_j \nabla_i P^{ij} = 0$$

or

$$\begin{aligned} \nabla_j \varphi_0 - \nabla_0 \varphi_j &= F_{j0} = -F_{0j} \quad \text{et} \\ -\mu F_{0j} v^j &= -cf_L^0 \quad (\text{travail du champ électrique}) \end{aligned} \quad (3-36)$$

En outre :

$$v_j \nabla_i P^{ij} = \nabla_i (P^{ij} v_j) - P^{ij} \nabla_i v_j$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2}) + \nabla_i(\rho \frac{v^2}{2} v^i - P^{ij} v_j) + P^{ij} \nabla_i v_j = cf_{L0}$$

et comme:

$$P^{ij} v_j = (-g^{ij} p + \Pi^{ij}) v_j = -p v^i + \Pi^{ij} v_j \quad (3-37)$$

l'équation de l'énergie devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2}) + \nabla_i[(\rho \frac{v^2}{2} + p) v^i - \Pi^{ij} v_j] + P^{ij} \nabla_i v_j = cf_{L0} \quad (3-38)$$

On introduit maintenant l'énergie interne ϵ sachant que l'équation de l'énergie s'écrit classiquement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2}) + \nabla_i[(\frac{v^2}{2} + p + \rho \epsilon) v^i - \Pi^{ij} v_j] = cf_L^0 \quad (3-39)$$

L'équation (3-38) est soustraite de (3-39), il reste :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla_i(\rho \epsilon v^i) = P^{ij} \nabla_i v_j$$

d'où :

$$\rho(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v^i \nabla_i \epsilon) = -p \nabla^i v_i + \Pi^{ij} \nabla_i v_j \quad (3-40)$$

On pose :

$$\frac{D\epsilon}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v^i \nabla_i \epsilon \quad (3-41)$$

C'est la dérivée totale, le long de la trajectoire, de l'énergie interne par unité de masse ; par ailleurs, de la relation de continuité on tire

$$\nabla_i v^i = \rho \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (3-42)$$

(3-42) et (3-41) sont portées dans (3-40) et l'on obtient :

$$\frac{D\epsilon}{dt} + p \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\Pi^{ij} \nabla_i v_j}{\rho} \quad (3-43)$$

Si à un instant donné tous les points de l'électron ont la même vitesse,

$$\nabla_i v_j = 0 \quad (3-44)$$

et l'électron est isentropique puisque

$$T \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + p \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (3-45)$$

σ désignant l'entropie et T la température du "fluide" électron, par définition.

3-4 Résumé

En résumé, partant d'une métrique de signature $+- --$ telle que $g^{oo} = 1$, $g^{oi} = 0$, on obtient l'équation de Schrödinger, (valable pour les faibles vitesses électroniques) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_0} g^{ij} (\nabla_i + ik\varphi_i) (\nabla_j + ik\varphi_j) \psi + V\psi, \quad \text{avec} \quad (3-46)$$

$$k = q/\hbar c \quad , \quad V = q\varphi_0 \quad , \quad \psi = Re^{-iS/\hbar}$$

on pose :

$$\begin{aligned} \rho &= m_0 r^2 \quad , \quad \mu = qR^2 \quad , \quad S_{,t} = E \quad , \quad \nabla_j S - \frac{q}{c} \varphi_j = m_0 v_j \\ f_{L\alpha} &= \mu F_{\alpha\beta} u^\beta \quad \text{avec} \quad u^\beta = v^\beta / c \\ p &= \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^i \nabla_i \rho \quad , \quad \Pi^{ij} = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^i \rho \nabla^j \rho / \rho \end{aligned} \quad (3-47)$$

$$\frac{D\epsilon}{dt} + p \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = (\Pi^{ik} \nabla_k v_i) / \rho$$

et l'on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \nabla_i[\rho v^i v^j - p g^{ij} + \Pi^{ij}] = f_L^j \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon) + \nabla_i[(\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon + p)v^i - \Pi^{ik} v_k] = c f_{LO} = \mu F_{0\beta} v^\beta \end{cases} \quad (3-48)$$

3-5 Exemple d'application

En coordonnées sphériques, les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad , \quad \nabla_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Dans le cas où il y a symétrie de révolution autour de Oz : $\nabla_\phi = 0$. Si en outre le fluide est isotrope, $\nabla_\theta = 0$. De ce fait :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r}$$

Il en résulte que la pression et le tenseur de viscosité sont donnés par :

$$p = -\left(\frac{\hbar}{2m_0}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \quad , \quad g^{rr} = -1$$

$$\Pi^{rr} = \left(\frac{\hbar}{2m_0}\right)^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 / \rho$$

on pose :

$$\frac{\hbar}{2m_0} = a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = f'$$

Le groupement $-p g^{ij} + \Pi^{ij}$ qui figure dans l'équation de l'impulsion (cf(3-38)), s'écrit :

$$-p g^{rr} + \Pi^{rr} = p + \Pi^{rr}$$

soit

$$p + \Pi^{rr} = a \left[\frac{\rho'^2}{\rho} - \rho'' - \frac{2}{r} \rho' \right]$$

Supposons cette quantité proportionnelle à ρ :

$$\frac{\rho''}{\rho} + \frac{2}{r} \frac{\rho'}{\rho} - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 = K$$

On cherche f tel que $\rho = e^f$

$$\rho' = f' \rho \quad , \quad \rho'' = (f'' + f'^2) \rho$$

d'où :

$$f'' + \frac{2}{r} f' = K$$

Un développement de la forme :

$$f = \alpha r^2 + \beta r + \gamma + \delta/r$$

$$f' = 2\alpha r + \beta - \delta/r^2$$

$$f'' = 2\alpha + 2\delta/r^3$$

se traduit par :

$$2\alpha + 2\frac{\delta}{r^3} + 4\alpha + \frac{2\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3} = K$$

d'où :

$$6\alpha = K \quad \text{et} \quad \beta = 0 \quad , \quad \delta \quad \text{quelconque} \quad .$$

$$f = \frac{K}{6} r^2 + \frac{\delta}{r} + \gamma \quad , \quad \rho_0 = e^\gamma$$

$$\rho = e^{\frac{K}{6} r^2 - \frac{\delta}{r} + \gamma} = \rho_0 e^{\frac{K}{6} r^2 - \frac{\delta}{r}}$$

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{K}{3} r - \frac{\delta}{r^2} \right) \rho \leq 0 \quad \text{pour} \quad Kr^3 \leq 3\delta;$$

avec

$$\delta = 0 \quad \text{et} \quad K = -6/\lambda^2,$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{2r}{\lambda^2}} < 0$$

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} = \left[\left(\frac{2r}{\lambda^2} \right)^2 - \frac{2}{\lambda^2} \right] \rho \geq 0 \quad \text{pour} \quad r \geq \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

On obtient une masse spécifique de l'électron présentant un maximum en $r = 0$ et tendant vers zéro lorsque $r \rightarrow \infty$.

Il y a davantage de "présence" au centre que sur les bords ($\rho \sim R^2$, R amplitude de l'onde). La pression a pour valeur

$$p = a[-(\frac{2r}{\lambda^2})^2 + \frac{6}{\lambda^2}]\rho \geq 0 \quad \text{pour} \quad r \leq \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{4ar}{\lambda^4}(2\frac{r^2}{\lambda^2} - 5) \geq 0 \quad \text{pour} \quad r \geq \lambda\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Par conséquent, à partir du centre la pression décroît, s'annule et remonte pour s'annuler à l'infini.

4 - L'Hydrodynamique de Klein-Gordon

4-1 Rappel de la théorie des milieux continus chargés. Indice des fluides holonômes

Rappelons les résultats obtenus par A. Lichnerowicz [8]. On considère un espace riemannien muni d'une métrique de signature $+ - - -$

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4-1)$$

Le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide chargé a pour expression

$$T^{\alpha\beta} = rc^2 u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta},$$

avec :

$$r = \rho + (e + p)/c^2 \quad , \quad e = \rho\epsilon \quad (4-2)$$

ρ : masse spécifique e : énergie interne par unité de volume ϵ : énergie interne par unité de masse, u^α représente la vitesse d'univers :

$$u^\alpha = dx^\alpha/ds \quad , \quad u_\alpha u^\alpha = 1 \quad (4-3)$$

p : pression scalaire

$$\Pi^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} + u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha \quad (4-4)$$

$\tau^{\alpha\beta}$: tenseur de viscosité q^α : vecteur de conduction thermique φ^λ désignant le 4-vecteur potentiel, le champ électromagnétique est défini par :

$$F_{\lambda\mu} = \nabla_\alpha \varphi_\mu - \nabla_\mu \varphi_\lambda \quad (4-5)$$

il est tel que, μ désignant la densité de charge électrique :

$$F_{;\mu}^{\lambda\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^\lambda \quad , \quad j^\lambda = \mu c u^\lambda$$

$$j_{;\lambda}^\lambda = 0 \quad , \quad (\mu u^\lambda)_{;\lambda} = 0 \quad (4-6)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique a pour expression :

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} - F_\nu^\alpha F^{\nu\beta} \right] \quad (4-7)$$

sa divergence est égale à l'opposé de la force de Lorentz :

$$M_{;\beta}^{\alpha\beta} = -f_L^\alpha$$

avec

$$f_L^\alpha = \mu F^{\alpha\beta} u_\beta = F^{\alpha\beta} j_\beta / c \quad (4-8)$$

On pose :

$$P^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \quad (4-9)$$

et les équations du mouvement qui s'écrivent :

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4-10)$$

se présentent sous la forme :

$$(rc^2 u_\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

la dérivée covariante de u^α ayant pour expression

$$\frac{Du^\alpha}{ds} = u_{;\beta}^\alpha u^\beta$$

l'équation (4-10) devient

$$r \frac{Du^\alpha}{ds} + u^\alpha (ru^\beta)_{;\beta} + \frac{1}{c^2} P_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4-11)$$

Etant donné que $u^\alpha u_\alpha = 1$ et $u_\alpha Du^\alpha = 0$, on obtient :

$$(ru^\beta)_{;\beta} = -u_\alpha P_{;\beta}^{\alpha\beta} / c^2 \quad (4-12)$$

on a :

$$P_{;\beta}^{\alpha\beta} = -p_{;\beta} g^{\alpha\beta} + \Pi_{;\beta}^{\alpha\beta} + M_{;\beta}^{\alpha\beta}$$

Posant

$$Q^\alpha = -p_{;\beta} g^{\alpha\beta} + \Pi_{;\beta}^{\alpha\beta} \quad (4-13)$$

il résulte que

$$P_{;\beta}^{\alpha\beta} = Q^\alpha - f_L^\alpha, \quad u_\alpha P_{;\beta}^{\alpha\beta} = u_\alpha Q^\alpha \quad (4-14)$$

et la relation (4-12) s'écrit

$$(ru^\alpha)_{;\alpha} + \frac{u_\alpha Q^\alpha}{c^2} = 0 \quad (4-15)$$

tandis que (4-11) prend la forme :

$$\frac{Du^\alpha}{ds} + (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{Q_\beta}{rc^2} = \left(\frac{\mu}{rc^2}\right) F^{\alpha\beta} u_\beta \quad (4-16)$$

A ce niveau, on fait l'hypothèse que le fluide est holonôme au sens de Lichnerowicz,² c'est-à-dire que

$$\frac{Q_\beta}{rc^2} = -\frac{F_{,\beta}}{F} \quad (4-17)$$

F est un scalaire appelé "indice du fluide". Cette expression est portée dans (4-15) et l'on obtient

$$\nabla_\alpha \left(\frac{ru^\alpha}{F}\right) = 0 \quad (4-18)$$

C'est l'équation de continuité pour le fluide considéré. Elle est à rapprocher de l'équation de conservation de la charge électrique (cf (4-6)) :

$$(\mu u^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (4-19)$$

² Par définition le fluide est holonôme si le vecteur K_β défini par $Q_\beta = rK_\beta = \nabla_\alpha (-pg_{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta})$ est un champ de gradient: $K_\beta = \partial_\beta \ln F$ (cf [8] pp. 37, 71, 101).

de sorte que l'on peut poser :

$$\frac{F\mu}{rc^2} = K, \quad \text{constante} \quad (4-20)$$

4-2 Expression des principes de la thermodynamique

Il résulte de la relation (4-15) que nous rappelons

$$(ru^\alpha)_{;\alpha} + \frac{u^\alpha Q_\alpha}{c^2} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} r &= \rho + (e + p)/c^2 \\ Q_\alpha &= -p_{,\alpha} + \Pi_{\alpha;\beta}^\beta \end{aligned} \quad (4-21)$$

que

$$(\rho c^2 u^\alpha)_{;\alpha} + [(e + p)u^\alpha]_{;\alpha} - \frac{Dp}{ds} + u_\alpha \Pi_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$$

On pose :

$$\xi = u_\alpha \Pi_{;\beta}^{\alpha\beta}$$

ξ est un invariant lié au phénomène dissipatif. On pose :

$$e = \rho\epsilon \quad (4-22)$$

ϵ est l'énergie interne du fluide (que peut constituer la substance d'un électron), par unité de masse. On pose aussi

$$\frac{Dp}{ds} = \dot{p}$$

Dans ces conditions la relation (4-15) s'écrit :

$$[(\rho\epsilon + p)u^\alpha]_{;\alpha} = -(\rho c^2 u^\alpha)_{;\alpha} + \dot{p} - \xi$$

soit :

$$(\rho\epsilon + p)u^\alpha_{;\alpha} + \frac{D}{ds}(\rho\epsilon + p) = -(\rho c^2 u^\alpha)_{;\alpha} + \dot{p} - \xi$$

on exprime maintenant $u^\alpha_{;\alpha}$ à partir de la divergence covariante $(\rho u^\alpha)_{;\alpha}$:

$$(\rho u^\alpha)_{;\alpha} = \dot{\rho} + \rho u^\alpha_{;\alpha}$$

d'où

$$u_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\rho}(\rho u^{\alpha})_{;\alpha} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (4-23)$$

et l'on obtient

$$\frac{D\epsilon}{ds} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{ds} = -\frac{rc^2}{\rho^2}(\rho u^{\alpha})_{;\alpha} - \frac{\xi}{\rho},$$

ou encore :

$$T \frac{d\sigma}{ds} = \frac{D\epsilon}{ds} + p \frac{D}{ds} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{rc^2}{\rho^2}(\rho u^{\alpha})_{;\alpha} - \frac{u_{\alpha} \Pi_{;\beta}^{\alpha\beta}}{\rho} \quad (4-24)$$

(σ entropie, T température par définition).

4-3 Formalisme lagrangien

Dans les équations du mouvement (4-16) on porte la relation (4-17) exprimant le caractère d'holonomie du fluide, et l'on obtient :

$$\frac{Du^{\alpha}}{ds} + (g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta}) \frac{Q_{\beta}}{rc^2} = \frac{\mu}{rc^2} F^{\alpha\beta} u_{\beta};$$

or

$$\frac{\mu}{rc^2} = \frac{K}{F}$$

d'après (4-20) et :

$$F \frac{Du^{\alpha}}{ds} - (g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta}) F_{,\beta} = K F^{\alpha\beta} u_{\beta}$$

ou

$$F \frac{Du_{\alpha}}{ds} + u_{\alpha} \frac{DF}{ds} = K F_{\alpha\beta} u^{\beta} + F_{,\alpha}$$

étant donné que :

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \nabla_{\alpha} \phi_{\beta} - \nabla_{\beta} \phi_{\alpha} = \partial_{\alpha} \phi_{\beta} - \partial_{\beta} \phi_{\alpha}, \\ F_{\alpha\beta} u^{\beta} &= u^{\beta} \nabla_{\alpha} \phi_{\beta} - \frac{D\phi_{\alpha}}{ds} = u^{\beta} \partial_{\alpha} \phi_{\beta} - \frac{d\phi_{\alpha}}{ds}, \end{aligned}$$

et :

$$\frac{D}{ds}(F u_{\alpha}) + \frac{d}{ds}(K \phi_{\alpha}) = K u^{\beta} \partial_{\alpha} \phi_{\beta} + F_{,\alpha}$$

$$\frac{D}{ds}(Fu_\alpha) = \frac{d}{ds}(Fu_\alpha) - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda Fu_\lambda u^\rho = \frac{d}{ds}(Fu_\alpha) - \frac{1}{2}Fu^\mu u^\rho g_{\mu\rho,\alpha}$$

les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{d}{ds}(Fu_\alpha + K\phi_\alpha) = \frac{F}{2}u^\mu u^\rho g_{\mu\rho,\alpha} + Ku^\beta \phi_{\beta,\alpha} + F_{,\alpha} \quad (4-25)$$

Si l'on pose :

$$L = F(g_{\mu\rho}u^\mu u^\rho)^{1/2} + K\phi_\mu u^\mu \quad , \quad (g_{\mu\rho}u^\mu u^\rho = 1) \quad (4-26)$$

on vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} &= Fu_\alpha + K\phi_\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{F}{2}u^\mu u^\rho g_{\mu\rho,\alpha} + Ku^\mu \phi_{\mu,\alpha} + F_{,\alpha} \end{aligned} \quad (4-27)$$

de sorte que les équations du mouvement vérifient

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (4-28)$$

Ce formalisme montre que le mouvement de chaque point du fluide dérive d'un principe d'action stationnaire, lié à l'indice du fluide :

$$\delta S = 0 \quad , \quad S = \int_{s_1}^s L ds \quad (4-29)$$

En d'autres termes, on peut dire que les trajectoires des points du fluide sont les géodésiques de la métrique de Finsler ³ définie par :

$$ds' = L ds = F ds + K\phi_\alpha dx^\alpha \quad (4-30)$$

³ Dans l'espace riemannien qui constitue le cadre des mouvements, les particules chargées suivent des trajectoires non géodésiques. Dans le but de leur faire suivre des géodésiques, il y a lieu de considérer un espace "élargi" où l'élément de longueur d'univers a pour expression :

$$ds' = F\sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} + K\phi_\alpha dx^\alpha$$

et non plus $(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (cf [8], p. 103).

4-4 Les équations de base de l'hydrodynamique de Klein-Gordon

Soit l'équation de Klein-Gordon

$$[(\nabla^\alpha + ik\phi^\alpha)(\nabla_\alpha + ik\phi_\alpha) + \mu_0^2]\psi = 0 \quad , \quad k = q/\hbar c \quad , \quad \mu_0 = m_0c/\hbar \quad (4-31)$$

on pose :

$$\psi = Re^{-iS/\hbar} \quad (4-32)$$

et l'on porte dans (4-31). Un calcul analogue à celui du paragraphe 3-1 permet d'écrire

$$[(\nabla^\alpha + ik\phi^\alpha)(\nabla_\alpha + ik\phi_\alpha)\psi = (F^\alpha F_\alpha + \nabla_\alpha F^\alpha)\psi$$

avec :

$$F_\alpha = \frac{\nabla_\alpha R}{R} - \frac{i}{\hbar}(\nabla_\alpha S - \frac{q}{c}\phi_\alpha) \quad (4-33)$$

et l'équation (4-31) devient en simplifiant par ψ

$$F^\alpha F_\alpha + \nabla_\alpha F^\alpha + \mu_0^2 = 0 \quad (4-34)$$

Comme précédemment on pose (cf (3-6)):

$$P_\alpha = \nabla_\alpha S - \frac{q}{c}\phi_\alpha \quad \text{réel} \quad (4-35)$$

d'où

$$F^\alpha F_\alpha = \frac{\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R}{R^2} - \frac{1}{\hbar^2} P^\alpha P_\alpha - \frac{2i}{\hbar} \frac{\nabla^\alpha R}{R} P_\alpha$$

Par ailleurs :

$$\nabla_\alpha F^\alpha = \nabla_\alpha \left(\frac{\nabla^\alpha R}{R} \right) - \frac{i}{\hbar} \nabla_\alpha P^\alpha = \frac{R \nabla_\alpha \nabla^\alpha R - \nabla_\alpha R \nabla^\alpha R}{R^2} - \frac{i}{\hbar} \nabla_\alpha P^\alpha$$

de sorte que l'équation (4-34) se met sous la forme :

$$\frac{\nabla_\alpha \nabla^\alpha R}{R} + \mu_0^2 - \frac{1}{\hbar^2} P^\alpha P_\alpha - \frac{i}{\hbar} [2P_\alpha \frac{\nabla^\alpha R}{R} + \nabla_\alpha P^\alpha] = 0$$

la séparation entre quantités réelles et imaginaires se concrétise par :

$$P^\alpha P_\alpha = \hbar^2 \left(\frac{\square R}{R} + \mu_0^2 \right) = \hbar^2 \frac{\square R}{R} + (m_0c)^2 \quad (4-36)$$

et

$$R\nabla_{\alpha}P^{\alpha} + 2P^{\alpha}\nabla_{\alpha}R = 0 \quad (4-37)$$

on pose

$$M^2 = (m_0c)^2 \left[1 + \left(\frac{\hbar}{m_0c} \right)^2 \frac{\square R}{R} \right] \quad (4-38)$$

(masse variable de Louis de Broglie, cf [4]) et compte tenu de (4-35), la relation (4-36) s'écrit

$$(\nabla^{\alpha}S - \frac{q}{c}\phi^{\alpha})(\nabla_{\alpha}S - \frac{q}{c}\phi_{\alpha}) - M^2 = 0 \quad (4-39)$$

C'est l'équation de "Hamilton-Jacobi" associée à l'hydrodynamique de Klein-Gordon. Quant à la relation (4-37), après multiplication par R , elle s'écrit :

$$\nabla_{\alpha}(R^2P^{\alpha}) = 0 \quad (4-40)$$

Etant donné que (4-39) implique la relation :

$$P_{\alpha} = \nabla_{\alpha}S - \frac{q}{c}\phi_{\alpha} = Mu_{\alpha} \quad (4-41)$$

la relation (4-40) peut être écrite

$$\nabla_{\alpha}(MR^2u^{\alpha}) = 0 \quad (4-42)$$

(4-42) est à rapprocher de (4-18)

$$\nabla_{\alpha}\left(\frac{r}{F}u^{\alpha}\right) = 0$$

Il semblerait donc que doit exister un rapport étroit entre M , R^2 , r et F , comme nous le verrons ultérieurement.

4-5 Equations de l'impulsion

Comme dans le cas de l'hydrodynamique de Schrödinger, on prend le gradient de l'équation de Hamilton-Jacobi (4-39)

$$2P_{\alpha}\nabla_{\mu}P^{\alpha} = 2M\nabla_{\mu}M$$

or

$$P_{\alpha} = Mu_{\alpha}$$

de sorte que

$$u^\alpha \nabla_\mu (\nabla_\alpha S - \frac{q}{c} \phi_\alpha) = \nabla_\mu M \quad (4-43)$$

on a :

$$\nabla_\mu \nabla_\alpha S = \nabla_\mu \partial_\alpha S = \partial_\mu \partial_\alpha S - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \partial_\lambda S$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\mu S = \nabla_\alpha \partial_\mu S = \partial_\alpha \partial_\mu S - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \partial_\lambda S$$

et donc

$$\nabla_\mu \nabla_\alpha S = \nabla_\alpha \nabla_\mu S$$

Il en résulte pour (4-43)

$$\begin{aligned} u^\alpha \nabla_\alpha (\nabla_\mu S - \frac{q}{c} \phi_\mu) - \nabla_\mu M &= \frac{q}{c} (\nabla_\mu \phi_\alpha - \nabla_\alpha \phi_\mu) u^\alpha \\ u^\alpha \nabla_\alpha (M u_\mu) - \nabla_\mu M &= \frac{q}{c} F_{\mu\alpha} u^\alpha, \end{aligned} \quad (4-44)$$

soit

$$M u^\alpha \nabla_\alpha u_\mu + u_\alpha u_\mu \nabla_\alpha M - \phi_\mu M = \frac{q}{c} F_{\mu\alpha} u^\alpha;$$

Après division par M et multiplication par rc^2 : (r défini en (4-2)), il vient

$$rc^2 \frac{Du^\mu}{ds} + (u^\alpha u^\mu - g^{\alpha\mu}) \frac{rc^2}{M} \nabla_\alpha M = \frac{rqc}{M} F^{\mu\alpha} u_\alpha \quad (4-45)$$

Cette équation, obtenue à partir de l'équation de Klein-Gordon, est à comparer à l'équation (4-16) que nous rappelons ici

$$rc^2 \frac{Du^\mu}{ds} - (u^\alpha u^\mu - g^{\alpha\mu}) Q_\alpha = \mu F^{\mu\alpha} u_\alpha$$

Cette comparaison permet de procéder à deux identifications :

$$\frac{Q_\alpha}{rc^2} = -\frac{\nabla_\alpha M}{M} \quad (4-46)$$

$$\mu = \frac{rqC}{M} \quad (4-47)$$

or, d'après (4-17) :

$$\frac{Q_\alpha}{rc^2} = -\frac{F_{,\alpha}}{F} = -\frac{\nabla_\alpha M}{M}$$

et donc

$$F = \frac{M}{M_0} = [1 + (\frac{\hbar}{m_0 c})^2 \frac{\square R}{R}]^{1/2} \quad (4-48)$$

(F est sans dimension) par ailleurs, d'après (4-20)

$$F\mu = Krc^2 \quad (4-49)$$

et d'après (4-47)

$$M_0 F \mu = r q C;$$

comme d'après (4-38),

$$M_0 = m_0 c \quad (4-50)$$

on obtient

$$F\mu = \frac{r q}{m_0} \quad (4-51)$$

le rapport de (4-49) à (4-51) donne

$$K = q/m_0 c^2 \quad (4-52)$$

Par ailleurs, l'identification de (4-42) et (4-18) se traduit par :

$$MR^2 = \frac{rc}{F}$$

soit :

$$r = m_0 R^2 F^2 = \rho + (e + p)/c^2 \quad (4-53)$$

on procède ainsi à l'identification de deux valeurs de la masse spécifique "totale" : à partir de l'équation de Klein-Gordon et de l'onde ψ , on fait apparaître R , F et r et c'est cette valeur qui est identifiée à l'expression traditionnelle de r (cf (4-2)). En ce qui concerne la densité de charge électrique, on a par (4-51) et (4-53) :

$$\mu = qR^2 F \quad (4-54)$$

Bien entendu, si dans l'expression de F on fait tendre c vers l'infini, de façon à retrouver les conditions de Schrödinger, on obtient $F = 1$, $r = m_0 R^2$, $\mu = qR^2$. Quant aux équations du mouvement fluide, elles sont données par (4-10) i.e. :

$$(rc^2 u^\alpha u^\beta)_{;\beta} + Q_\alpha = f_L^\alpha \quad , \quad (f_L^\alpha = \mu F^{\alpha\beta} u_\beta) \quad (4-55)$$

avec

$$Q_\alpha = -rc^2 \frac{F,\alpha}{F} = -m_0 c^2 R^2 F F,\alpha$$

$$Q_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m_0} R^2 \nabla_\alpha \left(\frac{\square R}{R} \right) \quad (4-56)$$

Nous allons montrer que Q_α peut être écrit sous la forme d'une divergence

$$R^2 \nabla_\alpha \left(\frac{\nabla^\rho \nabla_\rho R}{R} \right) = \nabla_\alpha (R \nabla^\rho \nabla_\rho R) - 2(\nabla^\rho \nabla_\rho R)(\nabla_\alpha R)$$

on sait que :

$$\nabla_\alpha [(\nabla^\rho R)(\nabla_\rho R)] = 2(\nabla_\rho R)(\nabla_\alpha \nabla^\rho R)$$

$$\nabla_\rho [(\nabla^\rho R)(\nabla_\alpha R)] = (\nabla_\alpha R)(\nabla^\rho \nabla_\rho R) + (\nabla^\rho R)(\nabla_\rho \nabla_\alpha R)$$

de sorte que de la seconde équation on peut tirer :

$$2(\nabla_\alpha R) \square R = 2\nabla_\rho [(\nabla^\rho R)(\nabla_\alpha R)] - 2(\nabla^\rho R)(\nabla_\rho \nabla_\alpha R)$$

en outre, $\nabla_\alpha [(\nabla^\rho R)(\nabla_\rho R)] = 2(\nabla^\rho R)(\nabla_\rho \nabla_\alpha R)$. Comme $\nabla_\rho \nabla_\alpha R = \nabla_\alpha \nabla_\rho R$, on peut écrire

$$2(\nabla_\alpha R) \square R = \nabla_\rho [2(\nabla^\rho R)(\nabla_\alpha R)] - \nabla_\alpha [(\nabla^\rho R)(\nabla_\rho R)] \quad \text{soit}$$

$$2(\nabla_\alpha R) \square R = \nabla^\rho [2(\nabla_\rho R)(\nabla_\alpha R)] - g_{\alpha\rho} (\nabla^\mu R)(\nabla_\mu R)$$

par conséquent :

$$R^2 \nabla_\alpha \left(\frac{\square R}{R} \right) = \nabla^\rho \{ g_{\alpha\rho} [R \square R + (\nabla^\mu R)(\nabla_\mu R)] - 2(\nabla_\rho R)(\nabla_\alpha R) \} \quad (4-57)$$

étant donné que :

$$\nabla_\alpha R = (\nabla_\alpha R^2)/2R$$

et que

$$R \nabla^\alpha \nabla_\alpha R + (\nabla_\alpha R)(\nabla^\alpha R) = \nabla_\alpha (R \nabla^\alpha R) = (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R^2)/2$$

la relation (4-57) s'écrit

$$R^2 \nabla_\alpha \left(\frac{\square R}{R} \right) = \nabla^\rho \left\{ \frac{1}{2} g_{\alpha\rho} \square R^2 - \frac{1}{2R^2} (\nabla_\rho R^2)(\nabla_\alpha R^2) \right\} \quad (4-58)$$

et (4-56) prend la forme :

$$Q_{\alpha} = \nabla^{\rho} \left\{ \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{(\nabla_{\rho} R^2)(\nabla_{\alpha} R^2)}{R^2} - \frac{\hbar^2}{4m_0} g_{\alpha\rho} \square R^2 \right\}$$

et les équations (4-55) s'écrivent :

$$\nabla_{\rho} \left\{ r c^2 u^{\alpha} u^{\rho} - g^{\alpha\rho} \frac{\hbar^2}{4m_0} \square R^2 + \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{(\nabla^{\alpha} R^2)(\nabla^{\rho} R^2)}{R^2} \right\} = f_L^{\alpha} \quad (4-59)$$

Sous cette forme, on a fait apparaître la pression scalaire p et le tenseur de viscosité $\Pi^{\alpha\rho}$, tels que :

$$p = \frac{\hbar^2}{4m_0} \square R^2$$

$$\Pi^{\alpha\rho} = \frac{\hbar^2}{4m_0} (\nabla^{\alpha} R^2)(\nabla^{\rho} R^2) / R^2 \quad (4-60)$$

D'après (4-53)

$$R^2 = r/m_0 F^2$$

On pose

$$\tilde{r} = r/F^2 \quad (4-61)$$

et

$$p = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \square \tilde{r}$$

$$\Pi^{\alpha\rho} = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^{\alpha} \tilde{r} \nabla^{\rho} \tilde{r} \quad (4-62)$$

Remarque : Si dans les dérivées par rapport à $x^0 = ct$, c est supposé croître indéfiniment, le dalembertien \square se réduit à $\nabla^i \nabla_i \tilde{r}$.

Par ailleurs, la relation (4-48) montre que F se réduit à l'unité, de sorte que l'on retrouve pour p l'expression écrite en (3-29).

La même remarque reste applicable à $\Pi^{\alpha\rho}$, et par conséquent, *l'hydrodynamique de Schrödinger se déduit, par passage à la "limite" $1/c = 0$, de l'hydrodynamique de Klein-Gordon*, régie par les équations

$$\nabla_{\rho} \{ r c^2 u^{\alpha} u^{\rho} - g^{\alpha\rho} p + \Pi^{\alpha\rho} \} = f_L^{\alpha} \quad (4-63)$$

4-6 Thermodynamique

On a vu en (4-47) que la densité de charge a pour expression

$$\mu = \frac{rqc}{M} = \frac{rq}{m_0 F}$$

Si l'on désigne par dV_0 l'élément de volume invariant défini par

$$dV_0 = \frac{d\Omega}{ds} = \frac{\sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}{ds} \quad (4-64)$$

la charge de l'électron a pour valeur

$$\int \mu dV_0 = q \quad , \quad \text{soit} \quad \int \frac{rq dV_0}{m_0 F} = q \quad (4-65)$$

et par conséquent :

$$\int \frac{rdV_0}{F} = m_0 \quad \text{ou} \quad \int R^2 \left[1 + \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right)^2 \frac{\square R}{R} \right]^{1/2} dV_0 = 1 \quad (4-66)$$

ce qui signifie que la masse spécifique ρ introduite en (4-2) a pour valeur

$$\rho = \frac{r}{F} \quad (4-67)$$

et d'après (4-20)

$$\frac{\mu}{\rho} = Kc^2 \quad (4-68)$$

En outre, on a vu en (4-18) que :

$$\nabla_\alpha \left(\frac{r}{F} u^\alpha \right) = 0$$

et par conséquent, la masse spécifique ρ est telle que :

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0 \quad (4-69)$$

Il en résulte que la relation (4-24) qui exprime les 2 principes de la thermodynamique s'écrit

$$T \frac{d\sigma}{ds} = \frac{D\epsilon}{ds} + p \frac{D}{ds} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{u_\alpha \Pi^{\alpha\beta}}{\rho} \quad (4-70)$$

Etant donné (cf (4-2)) que :

$$r = \rho + (e + p)/c^2 \quad \text{et} \quad r = F\rho \quad , \quad (e = \rho\epsilon)$$

on a :

$$(e + p) = c^2\rho(F - 1) \quad (4-71)$$

on a aussi, d'après (4-53)

$$\begin{aligned} r &= m_0 R^2 F^2 \\ (e + p) &= m_0 c^2 R^2 F(F - 1) \end{aligned} \quad (4-72)$$

avec

$$F = \left[1 + \left(\frac{\hbar}{m_0 c}\right)^2 \frac{\square R}{R}\right]^{1/2}$$

on a vu en (4-60) que :

$$p = \frac{\hbar^2}{4m_0} \square R^2$$

or

$$\square R^2 = 2[\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R + R \square R]$$

de sorte que :

$$p = \frac{\hbar^2}{2m_0} [\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R + R \square R]$$

et

$$e = m_0 c^2 R^2 (F^2 - F) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha R - \frac{\hbar^2}{2m_0} R \square R$$

d'où

$$\frac{e}{m_0 c^2 R^2} = \frac{1}{2} [(F - 1)^2 - \left(\frac{\hbar}{m_0 c}\right)^2 \frac{\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R}{R}] \quad (4-73)$$

tandis que p s'écrit

$$\begin{aligned} p &= \frac{\hbar^2}{2m_0} [\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R + R^2 (F^2 - 1) \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2] \\ \frac{p}{m_0 c^2 R^2} &= \frac{1}{2} [F^2 - 1 + \left(\frac{\hbar}{m_0 c}\right)^2 \frac{\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R}{R}] \end{aligned} \quad (4-74)$$

on pose

$$\nu = \left(\frac{\hbar}{m_0}\right)^2 \frac{\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R}{R} \quad (4-75)$$

on doit avoir (en principe)

$$e > 0 \quad \text{et} \quad p > 0$$

ce qui implique :

$$(F - 1)^2 - \nu > 0 \quad , \quad F^2 - 1 + \nu > 0$$

$$1 - F^2 < \nu < (F - 1)^2 = (1 - F)^2$$

on doit avoir d'abord :

$$(1 - F)(1 + F) < (1 - F)(1 - F) \quad , \quad (1 - F)F < 0$$

soit : $F < 0$ ou $F > 1$ mais $\rho = r/F$ ce qui implique $F > 0$, et donc

$$F > 1 \quad , \quad \rho < r = \rho + \frac{e + p}{c^2} \tag{4-76}$$

ν devra donc être tel que :

$$-(F^2 - 1) < \nu < (F - 1)^2 \tag{4-77}$$

La limite inférieure de F est $F = 1$ qui entraîne :

$$\nu = 0$$

autrement dit, le 4-vecteur $\nabla^\alpha R$ est isotrope; et, d'après (4-73) et (4-74) :

$$e = 0 \quad , \quad p = 0,$$

ce qui correspond à la particule ponctuelle.

Vérification de ces résultats. A partir des valeurs que nous venons d'obtenir pour e , p , ρ , on peut vérifier que l'équation (4-24) qui traduit les principes de la thermodynamique est satisfaite.

Conclusion

En conclusion, on peut dire que le "fluide électron" que *l'on fait apparaître* à partir de l'équation d'onde de Klein-Gordon, satisfait en particulier aux équations des milieux continus chargés étudiés en [8].

C'est un fluide tel que le rapport des densités de charge et de masse est une constante

$$\frac{\mu}{\rho} = Kc^2 = \frac{q}{m_0}$$

(cf(4-52)) les trajectoires de ses points sont des géodésiques dans la métrique de Finsler (cf(4-30)).

L'indice de ce fluide est, à une constante près, ce que L. de Broglie appelait "masse variable de l'électron" (cf [4]).

Ainsi, par l'intermédiaire de l'onde de Klein-Gordon, on peut raccorder les développements effectués par A. Lichnerowicz d'une part, et par Louis de Broglie d'autre part.

Alors que l'équation d'onde de Schrödinger ne découle pas directement de celle de Klein-Gordon, l'hydrodynamique de Schrödinger se déduit de l'hydrodynamique de Klein-Gordon par le passage à la limite $1/c \rightarrow 0$. Les équations relativistes du fluide que constitue la substance de l'électron peuvent être présentées de deux façons :

Soit :

$$(rc^2 u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta})_{;\beta} = f_L^\alpha \quad , \quad u^\alpha u_\alpha = 1$$

$$f_L^\alpha = \mu F^{\alpha\beta} u_\beta \quad , \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

Soit :

$$\nabla_\alpha \left(\frac{ru^\alpha}{F} \right) = 0 \quad , \quad (rc^2 u^i u^j - pg^{ij} + \Pi^{ij})_{;\beta} = f_L^i$$

avec, R désignant l'amplitude de l'onde de Klein-Gordon :

$$r = \rho + (e + p)/c^2 \quad , \quad \rho = \frac{r}{F} \quad , \quad r = m_0 R^2 F^2$$

$$F^2 = 1 + \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right)^2 \frac{\square R}{R} \quad , \quad \text{soit, avec } \tilde{r} = \frac{r}{F^2}$$

$$F^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right)^2 \left[\frac{\square \tilde{r}}{\tilde{r}} - \frac{\nabla_\alpha \tilde{r} \nabla^\alpha \tilde{r}}{2(\tilde{r})^2} \right]$$

En fonction de $\tilde{r} = r/F^2 = m_0 R^2$, on a :

$$p = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \square \tilde{r}$$

$$\Pi^{\alpha\beta} = \left(\frac{\hbar}{2m_0} \right)^2 \nabla^\alpha \tilde{r} \nabla_\alpha \tilde{r} / \tilde{r}$$

de sorte que :

$$2p - \Pi_\alpha^\alpha = m_0 c^2 R^2 (F^2 - 1)$$

(cf(4-74)).

Ainsi, les relations qui décrivent le comportement du fluide de Klein-Gordon dépendent uniquement de

$$\tilde{r} = \frac{r}{F^2} = m_0 R^2$$

c'est-à-dire, en dernière analyse, de l'amplitude de l'onde de Klein-Gordon, R , qui joue donc un rôle essentiel.

Pour cette raison, on peut s'attendre à rencontrer des difficultés dans la recherche de l'hydrodynamique associée à l'équation de Dirac.

Remerciements

L'exposé ci-dessus remonte à 1981 ; à l'époque il avait été présenté en petit comité au cours d'une séance du groupe de mécanique quantique animé par M. Gervat au Centre d'Etudes de Limeil.

Dix ans ont passé, et à la suite d'un concours de circonstances fortuit, à la demande de M. Lochak, directeur de la Fondation Louis de Broglie, que je tiens à remercier très vivement pour m'avoir donné la possibilité de m'exprimer, j'ai repris ces développements en vue d'une publication.

A cette occasion je me suis penché sur mes "sources", et j'ai retrouvé dans mon dossier "Lochak" un certain nombre d'articles dus à des auteurs bien connus dont j'ai pu, plus ou moins consciemment m'inspirer au passage : S.N. Bagchi, L. Bess, D. Bohm, D. Fargue, F. Halbwachs, D. Shay, J.P. Vigier, H.E. Wilhelm et C.Y. Wong. Il s'agit là d'une liste non exhaustive de personnes qui ont d'une certaine façon contribué à ce travail. Qu'ils en soient remerciés. Je n'ai pas eu la possibilité de consulter la thèse du Professeur Bass qui a été le précurseur en la matière, mais une partie des auteurs précédemment cités l'ont probablement consultée – D. Fargue, F. Halbwachs, J.P. Vigier – et d'une certaine façon mon travail lui doit quelque chose. A double titre d'ailleurs, puisqu'il a eu l'amabilité de le lire en me signalant certains points qui méritaient d'être un peu clarifiés.

Enfin je n'aurais garde d'oublier le professeur Salmon ; c'est sous son influence que j'ai commencé, en 1977 à effectuer quelques investigations sur le potentiel de Madelung [15].

Références

- [1] J. Bass, *Quelques remarques à propos de la mécanique quantique et son interprétation*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 15, n, 1990 (Thèse 1948).
- [2] S.N. Bagchi, *Hydrodynamical approach to quantum physics*, Proc. J.A.C.S. **58**, 21-61 (1975).
- [3] L. Bess, *Hamiltonian Dynamics and the Schrödinger Equation*, Progress of theoretical physics, vol. 52, nJuly 1974.
- [4] Louis de Broglie, J.L. Andrade e Silva, *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars.
- [5] D. Fargue, *Interprétation fluide de la mécanique quantique non relativiste des corpuscules à spin* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 276 (14/5/1973).
- [6] D. Fargue, Chapitre III de sa thèse de Doctorat, *Fluides quantiques chargés en Mécanique Hamiltonienne*.
- [7] Francis Halbwachs, *Théorie relativiste des fluides à spin*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
- [8] André Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (Masson).
- [9] G.A. Schaub, *An Hydrodynamic interpretation of wave mechanics*, University microfilm, Ann Arbor, Mich. U.S.A.
- [10] D. Shay, *Wave mechanics equivalent to classical mechanics*, Physical Review A. vol. 13, n, June 1976.
- [11] D. Bohm, J.P. Vigier, *Model of the Causal Interpretation of Quantum theory in terms of a fluid with Irregular Fluctuation*, Physical Review vol. 96, n1, October 1, 1954.
- [12] J.P. Vigier, *Interprétation géométrique et physique de la formule du guidage en relativité générale*, C.R. Acad. Sc. Paris T. 266, p. 598-600 (11/3/1968).
- [13] H.E. Wilhelm, *Hydrodynamic Model of Quantum Mechanics* Physical Review D, Vol. 1, n8, 15 April 1970.
- [14] C.Y. Wong, *On the Schrödinger equation in fluid dynamical form*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, n, June 1970.
- [15] Y. Martin, P. Paillère, J. Salmon, *Diffusion d'un électron négatif par un ion positif en théorie du guidage*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284, série A, p. 1417 (1977).

(Manuscrit reçu le 25 mars 1991)