

La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*

HENRI POINCARÉ

Pour bien faire comprendre la question que je vais traiter et qui est à mes yeux d'une importance capitale pour l'enseignement mathématique, il faut que je jette un petit coup d'oeil rétrospectif sur l'histoire du développement de la science.

Si nous lisons un livre écrit il y a cinquante ans, la plupart des raisonnements que nous y trouverons nous sembleront dépourvus de rigueur.

On admettait à cette époque qu'une fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler ; on le démontre aujourd'hui ; on admettait que les règles ordinaires du calcul sont applicables aux nombres incommensurables ; on le démontre aujourd'hui. On admettait bien d'autres choses qui quelquefois étaient fausses.

Nous voyons donc qu'on a marché vers la rigueur ; j'ajouterai qu'on l'a atteinte et que nos raisonnements ne paraîtront pas ridicules à nos descendants ; je veux parler, bien entendu, de ceux de nos raisonnements qui nous satisfont.

Mais comment a-t-on atteint la rigueur ? C'est en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle. Autrefois, on partait d'un grand nombre de notions, regardées comme primitives, irréductibles et intuitives ; telles étaient celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. Aujourd'hui une seule subsiste, celle du nombre entier ; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on atteint la rigueur parfaite.

* Henri Poincaré, *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1956, t. XI, pages 129-133.

Nos pères inscrivaient dans une aire plane une série de rectangles, et obtenaient comme limite de la somme de ces rectangles une intégrale qui représentait cette aire plane. En effet, disaient-ils, la différence entre la surface cherchée et la somme tend vers zéro ; car on peut la rendre plus petite que toute quantité donnée. Ils faisaient ce raisonnement sans scrupule, parce qu'ils croyaient savoir ce que c'est qu'une surface. Nous, au contraire, ce raisonnement ne nous satisfait plus, parce que nous savons qu'on ne sait pas ces choses-là en naissant, qu'on ne peut savoir ce que c'est qu'une surface que quand on sait le calcul intégral. Nous ne démontrons plus que la surface est égale à l'intégrale, mais nous considérons l'intégrale comme la définition de la surface. Cette notion de surface, autrefois fondée sur l'intuition, ne nous paraît plus légitime par elle-même.

D'autre part, les notions mathématiques n'ont acquis cette pureté parfaite qu'en s'éloignant de la réalité. On peut parcourir tout le domaine mathématique sans rencontrer aucun des obstacles qui le hérissaient autrefois ; mais ces obstacles n'ont pas disparu, ils ont seulement été transportés à la frontière ; et l'on aura à les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour entrer dans le domaine de la pratique.

On possédait une notion plus ou moins vague, formée d'éléments disparates, les uns *a priori*, les autres fournis par la généralisation de données d'expériences ; on croyait connaître par intuition ses principales propriétés. Aujourd'hui on rejette tous les éléments empiriques, on ne conserve que les éléments *a priori* ; on prend l'une des propriétés pour définition et on en déduit toutes les autres par un raisonnement rigoureux. Mais il reste à prouver que la propriété qui sert de définition appartient en effet aux objets réels, que nous connaissons par l'expérience, et d'où nous déduisions autrefois la notion intuitive par une généralisation inconsciente. C'est ce que M. Milhaud a fort bien mis en évidence dans la thèse qu'il a soutenue devant la Faculté des Lettres de Paris.

Voilà dans quel sens la science a évolué depuis un demi-siècle.

C'est alors qu'on vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales ; au contraire, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées, et qui suivent des lois

simples, n'apparaissent plus que comme un cas très particulier ; il ne leur reste plus qu'un tout petit coin.

Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Or, si la logique doit être notre seul guide dans les questions d'enseignement, c'est évidemment par les fonctions les plus bizarres qu'il faut commencer. C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique. Faute de l'avoir fait, on n'atteindra jamais la rigueur, ou on ne l'atteindra que par étapes.

Voilà à quoi la logique absolue voudrait nous condamner ; devons-nous lui faire ce sacrifice ? Telle est la question à laquelle, pour mon compte, je n'hésite pas à répondre non.

Sans doute il est dur pour un maître d'enseigner un raisonnement qui ne le satisfait pas entièrement ; et ce ne sera à ses yeux qu'un palliatif insuffisant de dire : nous admettons que, ou : il arrive souvent que, au lieu de dire : il est évident que.

Mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement, et l'on doit se préoccuper avant tout de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne.

Les zoologistes prétendent que le développement embryonnaire d'un animal résume en un temps très court toute l'histoire de ses ancêtres des époques géologiques. Il semble qu'il en est de même du développement des esprits. La tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé celui de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune. A ce compte, l'histoire de la science doit être notre guide.

Quand un élève commence sérieusement à étudier les mathématiques, il croit savoir ce que c'est qu'une fraction, ce que c'est que la continuité, ce que c'est que l'aire d'une surface courbe ; il considère comme évident, par exemple, qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler. Si, sans autre préparation, vous venez lui dire : Non, tout cela n'est pas évident, il faut que je vous le démontre ; et si dans la démonstration vous vous appuyez sur des prémisses qui ne lui semblent pas plus évidentes que la conclusion, que pensera ce malheureux ? Il pensera que la science mathématique n'est qu'un entassement arbitraire de subtilités inutiles ; ou bien il s'en dégoûtera, ou bien il s'en amusera

comme d'un jeu et il arrivera à un état d'esprit analogue à celui des sophistes grecs.

Au contraire, quand il sera plus avancé, quand il se sera familiarisé avec le raisonnement mathématique et que son esprit se sera mûri par cette fréquentation même, les doutes naîtront d'eux-mêmes, et alors votre démonstration sera la bienvenue. Elle en éveillera de nouveaux, et les questions se poseront successivement à l'enfant, comme elles se sont posées successivement à nos pères, jusqu'à ce que la rigueur parfaite puisse seule le satisfaire. Il ne suffit pas de douter de tout, il faut savoir pourquoi l'on doute.

Ce n'est pas tout ; j'ai dit qu'au point de vue de la pure logique, il ne reste plus qu'une notion irréductible, celle du nombre entier, et que toutes les autres n'en sont que des combinaisons. Mais des combinaisons pareilles, on en peut imaginer des milliers ; pourquoi celles-là plutôt que d'autres ? Le choix ne s'explique que par le souvenir de la notion intuitive dont cette combinaison a pris la place ; et si ce souvenir même fait défaut, le choix semblera injustifié. Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit ? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par coeur.

Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel ; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. Le praticien en aura donc toujours besoin, et pour un géomètre pur il doit y avoir cent praticiens.

Mais pour le géomètre pur lui-même, cette faculté est nécessaire ; c'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente ; et il ne suffit pas d'être à même de critiquer les théorèmes des autres, il faut en inventer de nouveaux. Il ne suffit pas de savoir faire des combinaisons correctes, il faut posséder l'art de choisir entre toutes les combinaisons possibles. Cet art, j'ai dit plus haut pourquoi, c'est l'intuition qui nous l'apprend. Sans elle le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.

Or, comment cette faculté se développerait-elle si dès qu'elle se montre, on la pourchasse et on la proscrit, si on apprend à s'en défier avant de savoir ce qu'on en peut tirer de bon ?

Mais l'art de raisonner juste n'est-il pas aussi une qualité précieuse, que le professeur de mathématiques doit avant tout cultiver ? Je n'ai garde de l'oublier, et on doit s'en préoccuper avant tout dès le début ; mais on a assez d'occasions d'exercer les élèves au raisonnement correct, dans les parties des mathématiques où les inconvénients que j'ai signalés ne se présentent pas. On a de longs enchaînements de théorèmes où la logique absolue a régné du premier coup et pour ainsi dire tout naturellement, qui ont par conséquent conservé la forme que les premiers géomètres leur avait donnée.

Ce qu'il faut éviter seulement, c'est de chercher la petite bête dans l'exposition des premiers principes. Cela n'empêche pas d'apprendre à raisonner juste, pourvu que l'on ait soin de ne pas donner aux élèves des idées fausses. Quelquefois il faudra pour cela beaucoup de tact de la part du maître ; souvent il lui suffira, comme je l'expliquais plus haut, de dire : nous admettrons que, au lieu de dire : il est évident que.

Parmi les jeunes gens qui reçoivent une éducation mathématique complète, les uns doivent devenir des ingénieurs ; ils apprennent la Géométrie pour s'en servir ; il faut avant tout qu'ils apprennent à bien voir et à voir vite ; c'est de l'intuition qu'ils ont besoin d'abord. Les autres, moins nombreux, doivent à leur tour devenir des maîtres ; il faut donc qu'ils aillent jusqu'au fond ; une connaissance approfondie et rigoureuse des premiers principes leur est avant tout indispensable. Mais ce n'est pas une raison pour ne pas cultiver chez eux l'intuition, car ils se feraient une idée fausse de la science s'ils ne la regardaient jamais que d'un seul côté, et d'ailleurs ils ne pourraient développer chez leurs élèves une qualité qu'ils ne posséderaient pas eux-mêmes.

J'ai écrit un bien long article sur une question bien abstraite et bien générale. Pour que le lecteur me le pardonne, je vais énoncer quelques conclusions précises.

En spéciales et dans la première année d'Ecole Polytechnique, on ne parlera pas des fonctions sans dérivées, on n'en parlera que pour dire : il peut y en avoir, mais nous ne nous en occuperons pas.

La première fois qu'on parlera aux élèves des intégrales, il faudra les définir par les surfaces et ce n'est que quand ils auront pris beaucoup d'intégrales qu'on leur donnera la définition rigoureuse.