

Constante d'intégration, équivalence masse-énergie et jauge électromagnétique

O. COSTA DE BEAUREGARD

Institut Henri Poincaré
11 rue P. et M. Curie, 75005 Paris

RESUME. L'invariance de jauge électromagnétique est une loi différentielle. Dans de nombreux cas les conditions d'intégration fixent la jauge, et l'on peut penser qu'il y a là un principe général.

ABSTRACT. Electromagnetic gauge invariance is a differential law. In many cases integration conditions fix the gauge, and it may be that this a general principle.

Bien souvent le choix d'une jauge appropriée simplifie la formalisation d'un problème d'électromagnétisme, et l'on peut se demander "s'il n'y aurait pas de la physique là dedans".

Par exemple, la condition de Lorentz impose au superpotentiel arbitraire U d'obéir à l'équation dalembertienne de propagation des ondes dans le vide, et en fait donc une grandeur de champ. La solution "onde plane" correspondante est l'onde "longitudinale", qu'on écarte comme "non-physique". Mais *ipso facto* la jauge transversale est ainsi *univoquement* sélectionnée pour l'onde plane ordinaire de même quadri-fréquence, avec l'implication que *cette jauge est physique*.

Et *physique elle est bien* puisque, Louis de Broglie [1] l'a montré, elle est impliquée dans l'expression de la densité de spin $\vec{A} \times \vec{E}$. Si l'on superposait à l'onde plane physique l'onde plane fantôme de jauge, on ajouterait à la densité de spin un terme identiquement nul $\vec{A}_j \times \vec{E} - V_j \vec{H}$.

Un argument antérieur, bien connu, énoncé par L. de Broglie [2], L. Brillouin [3], et plusieurs autres, est qu'en électrostatique la loi d'équivalence masse-énergie d'Einstein sélectionne univoquement la jauge de Coulomb, en fixant le zéro de l'énergie potentielle. Le même

argument vaut en magnétostatique, la jauge d'Ampère étant alors sélectionnée dans l'expression $I \oint \vec{A} \cdot \vec{D}l$ de l'énergie d'un courant fermé ; de plus on remarque qu'un changement de jauge entraînerait alors un déplacement du barycentre du courant.

L'expression pré-relativiste des trois composantes spatiales de la densité de spin est [1], on l'a rappelé, $\vec{A} \times \vec{E} - V\vec{H}$; on a vu que le terme $\vec{A} \times \vec{E}$ est mis en évidence dans l'onde plane ; donnons un exemple où apparaît le terme $V\vec{H}$.

Soit un mini-circuit ampérien de moment magnétique M placé au centre d'une sphère portant uniformément une charge électrique Q . Si l'on inverse \vec{M} , le champ électrique induit imprime à la sphère chargée un moment angulaire \vec{C} colinéaire à $\pm\vec{M}$; comme Feynman [4] l'a expliqué qualitativement, et qu'on [5] le montre quantitativement, la réaction apparaît sous la forme du moment angulaire orbital du vecteur de Poynting dans l'espace extérieur à la sphère. Mais une explication alternative est possible.

Le moment angulaire potentiel de la sphère chargée de rayon R "sentant" le champ \vec{H} du mini-circuit ampérien est $q \int \int \vec{A} \times \vec{R} ds$, avec $q = Q/4\pi R^2$, soit encore $(Q/4\pi R) \int \int \vec{A} \times \vec{d}s$; on a tenu compte de la colinéarité de \vec{R} et de $\vec{d}s$.

A l'intérieur de la sphère le potentiel constant $V = Q/4\pi R$ et le champ magnétique $\vec{H} = \vec{\partial} \times \vec{A}$ engendrent la densité de spin $V\vec{H}$; transformant son intégrale volumique en l'intégrale de surface $V \int \int \vec{A} \times \vec{d}s$ redonne exactement la précédente expression.

Le moment angulaire potentiel de la sphère peut donc être conçu soit comme concentré sur sa surface, soit comme réparti dans l'espace extérieur, une alternative bien connue en électromagnétisme.

Conclusion : Dans beaucoup de problèmes d'électromagnétisme le choix d'une jauge appropriée simplifie les calculs ; des arguments concordants montrent que cette simplification est en fait "l'image virtuelle" d'une "réalité physique".

Références

- [1] L. de Broglie, *Mécanique Ondulatoire du Photon et Théorie Quantique des Champs*, Gauthier Villars, 1949, p.43-44.
- [2] L. de Broglie, *C.R.A.S.***225**, 163, 1947.
- [3] L. Brillouin, *Proc. Nat. Acad. Sci.***53**, 475 et 1280, 1965.
- [4] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, New York, 17-5, 17-6, 27-11, 1963.
- [5] O. Costa de Beauregard, *Nuovo Cim.***63 B**, 611-624, 1969.

(Manuscrit reçu le 25 juin 1991)