Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 16, n̊4, 1991

Sur un pseudo-groupe de Lorentz lié à une topologie dans R_8

R. Dutheil

Université de Poitiers - Faculté de Médecine
Département de Physique - 34, rue du Jardin des Plantes
86034 Poitiers
et
Fondation Louis de Broglie - 23, quai de Conti
75006 Paris

RESUME. On définit dans R_8 par une topologie un sous-espace R_4 complètement euclidien, avec une métrique de signature $++++$ et un pseudo-groupe de Lorentz correspondant dans C_4 au groupe de rotation $SO(4;C)$. Il n'y a plus de discontinuité pour la vitesse c et par rapport à un observateur du genre temps, il existe un deuxième espace observationnel possible où une mesure de la vitesse de phase de l'onde associée à une particule serait en principe réalisable.

ABSTRACT. It is possible, using a topology, to define in R_8 an euclidian subspace R_4, with metric of signature $++++$ and a Lorentz pseudo-group inkeeping with $SO(4;C)$ group in C_4. The continuity of velocities exists between $v < c$ and $v > c$ for time-like observer and in a second observational space, it is possible to measure the phase-velocity.

Introduction.

La vitesse de phase V de l'onde associée à une particule a été introduite par Louis de Broglie en utilisant la Relativité restreinte. Vitesse de phase V et vitesse de groupe v sont reliées par le "Théorème de la vitesse de groupe": $vV = c^2$.

Or, on peut mesurer la vitesse de phase pour la lumière. On peut se poser la question de savoir si une telle mesure est possible pour la vitesse de phase de l'onde associée à une particule. Une conséquence de ce travail est l'existence pour un observateur du genre temps d'un deuxième type d'espace observationnel où une telle mesure serait réalisable.

Nous montrons en effet qu'il est possible de trouver dans R_8 une topologie permettant de définir un sous-espace R_4 complètement euclidien, c'est à dire ayant une métrique de signature $++++$. Dans cet espace on peut trouver une transformation réelle du groupe des rotations, correspondant dans C_4 à une rotation faisant partie de $SO(4;C)$. Cette transformation fait passer sans discontinuité pour la vitesse c d'une ligne d'univers du genre temps à une ligne d'univers du genre espace[1].

I - Les deux groupes de Lorentz et les deux variétés du genre temps et du genre espace.

On sait [1][2][3][4] que les groupes $SO(3,1;C)$ et $SO(1,3;C)$ des 4×4 matrices complexes, isomorphes à $SO(4;C)$ sont isomorphes et conservent dans C_4 respectivement les métriques de signatures $+---$ et $-+++$. Il en résulte qu'il existe deux groupes complets et orthochromes de Lorentz ayant même Algèbre de Lie et isomorphes L_+^t et $\tilde{L}_+^t$ conservant respectivement dans R_4 les métriques réelles de signatures respectives $+---$ et $-+++$. $\tilde{L}_+^t$ est le groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz $\tilde{\wedge}$ des transformations superlumineuses isomorphes au groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz $\wedge$ des transformations souslumineuses.

A ces deux groupes isomorphes de Lorentz correspondent les espaces pseudo-euclidiens définis par les métriques réelles.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

$$\tilde{ds}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{dx}^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

de signatures respectives $+---$ et $-+++$, la métrique (1) étant définie dans le système de coordonnées réelles habituelles ou $ORF(x^\nu)$, la métrique (2) étant définie dans un système de coordonnées réelles inhérentes $(\tilde{x}^\mu)$.

Dans des systèmes orthonormés de coordonnées rectilignes, les métriques (1) et (2) s'écrivent respectivement

$$ds^2 = (dx^o)^2 - \sum (dx^i)^2 \tag{3}$$

[1] Il existerait aussi théoriquement, pour un observateur du genre temps, la possibilité d'observer sans discontinuité pour c une particule de vitesse inférieure à c (bradyon) passant à une vitesse supérieure à c (tachyon).

$$\tilde{ds}^2 = -(\tilde{dx^o})^2 + \sum(\tilde{dx^i})^2 (i = 1, 2, 3); (x^o = ct; \tilde{x}^o = \tilde{ct}) \tag{4}$$

avec les signatures respectives $+---$ et $-+++$.

Dans le référentiel propre d'un observateur associé à la métrique (3) et correspondant à $\beta = o$, la ligne d'univers de cet observateur, ainsi que le référentiel propre sont définis par les relations

$$dx^i = o \quad ; \quad ds^2 = (dx^o)^2 = c^2 d\tau^2 (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

τ étant le temps propre de cet observateur.

Pour un observateur associé à la métrique (4), pour $\beta = \infty$, la ligne d'univers et le référentiel propre de cet observateur (référentiel propre tachyonique) sont définis par les relations

$$\tilde{dx}^o = c\tilde{dt} = 0,$$

$$\text{soit} \quad \tilde{dt} = 0 \quad , \quad \tilde{ds}^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 = \sum(\tilde{dx}^i)^2 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

Ce temps propre τ devient spatial avec un axe spatial dissocié de l'axe de "temps cinématique" $\tilde{t}, \tilde{\tau}$ possédant en fait trois composantes spatiales τ_1, τ_2, τ_3.

En outre il est impossible de trouver un opérateur $[T]$ faisant partie de $SO(4; C)$ et permettant de passer de L^t_+ à $\tilde{L}^t_+$ et réciproquement car l'on a

$$|[T]| = -1 \tag{7}$$

Par contre il existe un opérateur $[O]$ défini par

$$[O] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

avec

$$\|[O]\| = +1 \tag{9}$$

qui fait partie de $SO(2; C)$. Or $SO(2; C)$, groupe des 2×2 matrices complexes λ^* et $\tilde{\lambda}^*$ conserve les métriques de signatures respectives $+-$ et $-+$. Il en résulte qu'il existe deux sous-groupes de Lorentz à deux dimensions

$$\ell^t_+ \quad et \quad \tilde{\ell}^t_+$$

conservant les métriques réelles de signatures $+-$ et $-+$, et que $[O]$ faisant partie du groupe des rotations à deux dimensions $SO(2;C)$ permet de passer de ℓ_+^t à $\tilde{\ell}_+^t$ et réciproquement.

Remarquons que $SO(4;C)$ conserve les métriques dans C_4 de signatures $++--$ et $--++$ et que $SO(8;C)$ conserve dans C_8 les métriques de signatures $++++----$ et $----++++$. A partir de l'opérateur

$$[O] = [O]_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

il est possible de construire les opérateurs $[O]_4$ et $[O]_8$ analogues à $[O]_2$ et faisant partie respectivement de $SO(4;C)$ et $SO(8;C)$.

II - Introduction de R_8 et des sous-espaces de R_8.

Puisqu'il n'existe pas d'opérateur faisant partie de $SO(4;C)$ permettant de passer de L_+^t à $\tilde{L}_+^t$ et réciproquement, c'est à dire de ds^2 à $\tilde{ds}^2$ et réciproquement, une possibilité de représenter d'une manière unique les évènements du genre temps et du genre espace consiste à considérer les métriques

$$\begin{aligned} &ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^o)^2 - \sum (dx^i)^2 \qquad (\mu,\nu = 0,1,2,3), \\ &\quad (g_{00} = 1; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; i = 1,2,3; x^0 = ct) \end{aligned} \tag{10}$$

de signatures $+---$ et

$$\begin{aligned} &\tilde{ds}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{dx}^\mu \tilde{dx}^\nu = -(\tilde{dx}^o)^2 + \sum (\tilde{dx}^i)^2 \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3;) \\ &\quad (\tilde{g}_{00} = -1; \tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = g_{33} = 1; i = 1,2,3; \tilde{x}^0 = \tilde{ct}) \end{aligned} \tag{11}$$

avec pour (10) et (11) $g_{\mu\nu}$ ou $\tilde{g}_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$ et de former une combinaison linéaire de (10) et (11), la plus simple étant

$$\begin{aligned} dS^2 &= ds^2 + \hat{ds}^2 \\ &= (dx^o)^2 - \sum (dx^i)^2 - (\tilde{dx}^o)^2 + \sum (\tilde{dx}^i)^2 \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \tag{12}$$

définissant un espace R_8 de signature $++++----$.

A R_8 correspond C_8 et le groupe $SO(8;C)$ conservant les métriques complexes de signatures $++++----$ et $----++++$. Notons incidemment qu'il existe un opérateur $[O]_8$ formé à partir de $[O]_2 = [O]$.

(12) montre qu'il existe dans R_8 deux sous-espaces R_4, de métriques respectives ds^2 et $\tilde{ds}^2$ et de signatures respectives $+---$ et $-+++$. Remarquons que

$$dS^2 = ds^2 + \tilde{ds}^2 = c^2 d\tau^2 + c^2 \tilde{d\tau}^2 \tag{13}$$

$d\tau$ et $\tilde{d\tau}$ étant respectivement les intervalles des temps propres τ et $\tilde{\tau}$ dans les deux métriques.

Dans le sous-espace R_4 de métrique ds^2 et de signature $+---$, un observateur du genre temps peut définir un groupe complet et orthochrome de Lorentz L_+^T correspondant dans C_4 au groupe $SO(3,1;C)$. Toute ligne d'univers du genre temps sera définie par rapport à son référentiel propre par

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \quad \text{et} \quad dx^i = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{14}$$

(14) définit la ligne d'univers de l'observateur du genre temps idéalement réduit à un point [4] par rapport à son référentiel propre qui se trouve défini *ipso facto.*

Dans le deuxième sous-espace R_4 de métrique $\tilde{ds}^2$ de signature $-+++$, un observateur du genre espace fait définir un deuxième groupe complet et orthochrome de Lorentz $\tilde{L}_+^t$ isomorphe à L_+^t correspondant dans C_4 au groupe $SO(1,3;C)$ isomorphe à $SO(3,1;C)$. La ligne d'univers de l'observateur du genre espace idéalement réduit à un point, et par rapport à son référentiel propre sera définie par

$$\tilde{ds}^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 = \sum (\tilde{dx}^i)^2$$

et

$$\tilde{dx}^o = c\tilde{dt} = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad \text{soit} \quad \tilde{dt} = o \tag{15}$$

Dans ces conditions considérons les relations

$$ds^2 = (dx^o)^2 \quad ; \quad dx^i = 0 \tag{16}$$

$$\tilde{ds}^2 = \sum (\tilde{dx}^i)^2 ; \tilde{dx}^o = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{17}$$

En tenant compte de (16) et (17) la métrique (12) prend la forme

$$d\sigma^2 = ds^2 + \tilde{ds}^2 = (dx^o)^2 + \sum (dx^i)^2 \quad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

définissant un sous-espace R_4 de R_8 complètement euclidien, c'est à dire de signature $++++$, dans le système de coordonnées

$$(x^o, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \tag{19}$$

avec

$$x^o = c\tau = ct \tag{20}$$

Notons que dans C_4 nous avons correspondant à ce sous-espace R_4 une métrique complexe de signature $++++$ conservée par le groupe de rotations $SO(4; C)$. Considérons maintenant dans R_4 de métrique $d\sigma^2$ de signature $++++$, le référentiel d'inertie d'axes d'espace $(\tilde{x}^i)(i = 1, 2, 3)$, le temps étant mesuré sur l'axe (x^o) par $t; (x^o = ct)$ et un deuxième référentiel d'inertie d'axes d'espace $(x'^i)(i = 1, 2, 3)$ les deux référentiels ayant la vitesse relative V. On peut, comme on le fait habituellement en Relativité restreinte supposer les axes parallèles deux à deux, le déplacement s'effectuant, par exemple, parallèlement à l'axe

$$(\tilde{x}^1) = (\tilde{x})$$

parallèle à l'axe

$$(\tilde{x}'^1) = (\tilde{x}')$$

la vitesse V étant parallèle à $(\tilde{x})$.

Tout "évènement" de R_4, de métrique $d\sigma^2(++++)$ noté

$$(x^o, \tilde{x}, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \tag{21}$$

dans le premier référentiel sera noté

$$(x'^0, \tilde{x}', \tilde{x}'^2, \tilde{x}'^3) \tag{22}$$

dans le second. Pour que " l'intervalle d'univers " $d\sigma^2$ soit conservé, c'est à dire que l'on ait

$$d\sigma'^2 = d\sigma^2 \tag{23}$$

il faut et il suffit que la transformation reliant (21) et (22) avec

$$\tilde{x}'^2 = \tilde{x}^2 \tilde{x}'^3 = \tilde{x}^3 \tag{24}$$

soit la rotation réelle à deux dimensions dans le plan $(x^0, \tilde{x})$ En posant

$$B = tg\phi = \frac{V}{c} \tag{25}$$

On trouve immédiatement la "pseudo-transformation de Lorentz"

$$x'^0 = \frac{x^0 + B\tilde{x}}{\sqrt{1+B^2}}; \tilde{x}' = \frac{\tilde{x} - Bx^0}{\sqrt{1+B^2}} \tilde{x}'^2 = \tilde{x}^2; \tilde{x}'^3 = \tilde{x}^3 \tag{26}$$

B pouvant varier de façon continue de 0 à l'∞ en passant par la valeur

$$V = c$$

soit

$$B = 1 \tag{27}$$

$B = 0$ correspond à l'élément neutre ou unité et le remplacement de B par $-B$ donne la transformation inverse. Le produit de deux transformations telles que (26) est bien une transformation du même type que (26). Ces transformations forment donc un groupe : le "pseudo-groupe de Lorentz". Pour $B = 1 \quad (V = c)$, on obtient

$$x'^0 = 1/\sqrt{2}(x^0 + \tilde{x}); \tilde{x}' = 1/\sqrt{2}(\tilde{x} - x^0); \tilde{x}'^2 = \tilde{x}^2; \tilde{x}'^3 = \tilde{x}^3 \tag{28}$$

qui évoque la transformation $IMF - ORF$, mais la métrique reste ici euclidienne $(+ + ++)$ et ce n'est pas la métrique des coordonnées du cône de lumière.

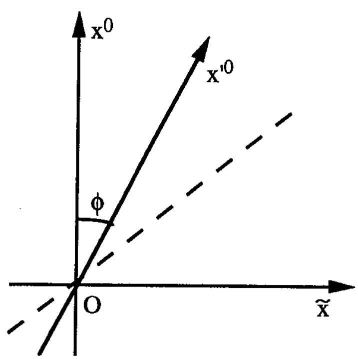

Figure 1.

La vitesse V varie de façon continue de $0(\Phi = 0)$ à l' $\infty(\Phi = \pi/2)$ (Figure 1). Pour

$$B = \infty \quad ; \quad x'^0 = \tilde{x}\tilde{x}' = -x^0 \tag{29}$$

Les "lignes d'univers" sont du type (x'^0) et on ne peut plus faire de distinction entre lignes d'univers du genre temps et lignes d'univers du genre espace.

Dans ces conditions, considérons une particule de masse propre M dans son référentiel propre $(x^0, \tilde{x}, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$. Si maintenant cette particule se déplace avec la vitesse relative $B(B = V/c)$ par rapport à ce référentiel, les composantes P^0 et P de son quadri-vecteur d'énergie-impulsion par rapport à

$$(x^0, \tilde{x}, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$$

seront telles que

$$(P^0)^2 + (P)^2 = M^2c^2 \tag{30}$$

avec

$$P^2 = (P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2 \tag{31}$$

Si le mouvement est parallèle à $(\tilde{x}) = (\tilde{x}')$, on obtient immédiatement, en posant $P = P^1$

$$P^0 = \frac{Mc}{\sqrt{1} + B^2} \quad ; \quad P = \frac{MBc}{\sqrt{1} + B^2} \tag{32}$$

Pour $B = 0, P^0 = Mc, P = 0$ Pour $B = \infty, P^0 = 0, P = Mc$ et il n'y a pas de discontinuité pour $B = 1 \quad (V = c)$.

Quelles sont les conclusions que l'on peut retirer de cet exposé ? Costa de Beauregard [p 27 par 2, 4] définit la ligne d'univers (du genre temps) et en chacun de ses points un repère lorentzien tangent. Il écrit en outre [p 28] que pour un observateur réduit idéalement à un point, la Relativité "postule en outre que l'espace observationnel d'un tel observateur est en chacun de ses instants points la variété plane tridimensionnelle normale à la courbe ...".

Or considérons dans R_8 (Figure 2) le sous-espace R_3 qui est l'espace observationnel habituel, soit (x^1, x^2, x^3) et le deuxième sous-espace $R_3(\tilde{x} = \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$. L'axe (x^0) peut être considéré comme une ligne d'univers (du genre temps) pour l'observateur O, et le sous-espace $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ est également une variété plane tridimensionnelle normale en chaque point à la ligne d'univers (x^0).

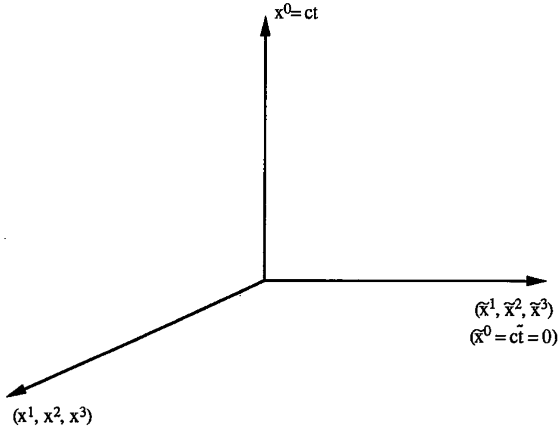

Figure 2.

Pourrait-il exister, dans certaines conditions expérimentales un deuxième espace observationnel où l'onde associée à la particule se propagerait avec la vitesse de phase habituelle c^2/V ? On peut noter d'autre part que la relation

$$(P^0)^2 + (P)^2 = M^2c^2 \tag{33}$$

entrainerait si l'on utilisait les opérateurs quantiques usuels, une équation du deuxième ordre où le premier membre serait non plus

$$\Box\Psi$$

$\Box$ étant le dalembertien, mais

$$\Diamond\Psi$$

où $\Diamond$ serait la généralisation à quatre dimensions du Laplacien $\Box$ correspondant à la métrique de signature $+ + ++$ (pseudo équation de Klein-Gordon) dont on pourrait déduire une équation du premier ordre différente (pseudo équation de Dirac).

Additif.

La référence [6] nous a été communiquée Par J. Steyaert (Institut de physique nucléaire de Louvain-la-Neuve). Les auteurs font état d'une expérience dans un guide d'onde ("La propagation d'énergie avec vitesse de phase dans un guide d'onde") où ils ont mesuré une vitesse de phase supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide (entre 1 et $2c$).

Il faut noter d'autre part que J. Steyaert interprète les "pics de Darmstadt" comme correspondant à des monopôles magnétiques passant sans discontinuité de vitesses inférieures à c à des vitesses supérieures à c.

Nous remercions J. Steyaert de ces précisions et de la discussion au sujet de cet article.

Références

[1] R. Dutheil, *Théorie de la Relativité et Mécanique quantique dans la région du genre espace* Editions Derouaux, 10 Place Saint-Jacques, Liège, 1989.
[2] R.Dutheil, Bull. Soc. Roy Sciences, Liège, **53** (3,4), p. 129-142, (1984).
[3] R.Dutheil, Ann. Fond. L. de Broglie, **15** 4, p. 449-470, (1990).
[4] R.Dutheil and J.Steyaert. *Recent developments in gravitation*, World Scientific 5-9 September 1989. Procedings in the Relativity Meeting of Barcelone, p. 423.
[5] O.Costa de Beauregard, *Précis de Relativité restreinte*, Dunod Editeur Paris (1963).
[6] G. Giakos and K. Ishii, Microwave and Optical Techn. Letters, **4**, n, p. 128-131, (1991).

(Manuscrit reçu le 2 juillet 1991)