L'électron de Klein-Gordon "étendu" et les relations d'"incertitude"

P. Paillère

Centre d'Etudes de Limeil-Valenton
94195 Villeneuve-Saint-Georges cedex

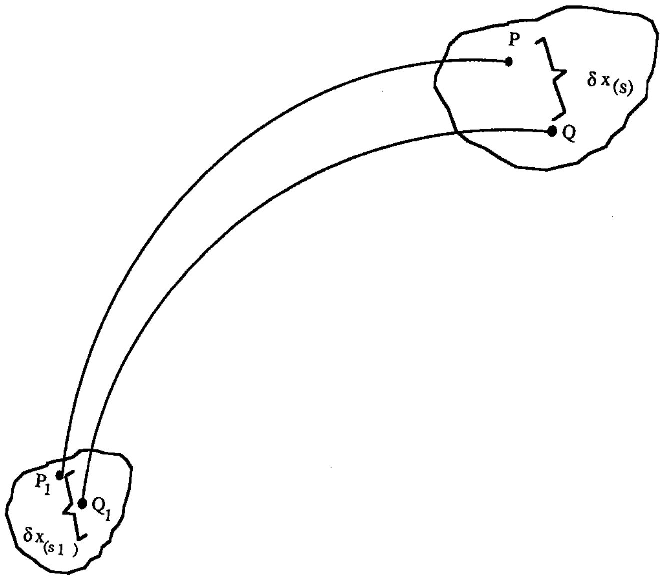
RESUME. Partant du principe variationnel attaché au fluide chargé homogène et faisant en outre l'hypothèse que l'électron de Klein-Gordon est une particule étendue en chaque point de laquelle le temps propre est le même, pour les vitesses faibles, en métrique de Minkowski, on aboutit à une inégalité où interviennent les écarts entre deux points distincts de cette particule. Cette inégalité peut éventuellement prendre la forme des relations d'incertitude de Heisenberg, mais avec une signification tout autre.

This study, based on a variational principle for a homogeneously charged matter, was undertaken with the aim of examining the uncertainty relations for the electron. Moreover it was assumed that the Klein-Gordon electron is an extended particle inside which the proper time is the same everywhere. In the case of low velocities, in Minkowskian metric, it is possible to arrive at an inequality condition for Δp *and* Δx *at two differents points inside the particle. This inequality may be related to Heisenberg's incertainty relations, but with a different significance.*

Introduction.

Dans l'étude citée en référence [2] *Aspects hydrodynamiques de la mécanique quantique*, nous avions montré de quelle façon, à partir de l'équation de Klein-Gordon (considérée en espace courbe), il était possible de développer une hydrodynamique associée où toutes les quantités thermodynamiques en particulier étaient fonction de l'amplitude de l'onde de Klein-Gordon.

Ainsi, partant d'une onde, nous avions abouti à un fluide et la tentation était grande d'effectuer la transgression consistant à imaginer une particule "étendue", en l'occurence l'électron de Klein-Gordon "étendu", constituée par un fluide chargé homogène (cf.[1]). Cette notion de particule étendue constitue peut-être un moyen de donner une signification différente aux relations d'incertitude de Heisenberg.



Temps propre s_1	Temps propre s
Ensemble des conditions initiales de la particule	Ensemble des conditions finales de la particule

$$P_1 \qquad x^\alpha(s_1), p_\alpha(s_1)$$

$$Q_1 \begin{cases} x^\alpha(s_1) + \delta x^\alpha(s_1) = x^{\alpha'}(s_1) \\ p_\alpha(s_1) + \delta p_\alpha(s_1) = p^{\alpha'}(s_1) \end{cases}$$

$$P \qquad x^\alpha(s), p_\alpha(s)$$

$$Q \begin{cases} x^\alpha(s) + \delta x^\alpha(x) = x^{\alpha'}(s) \\ p_\alpha(s) + \delta p_\alpha(x) = p_{\alpha'}(s) \end{cases}$$

Figure 1. Trajectoire d'une particule étendue

$$\delta x^\alpha(s)\delta(\frac{p_\alpha(s)}{\varpi F}) = \delta x^\alpha(s_1)\delta(\frac{p_\alpha(s_1)}{\varpi F}) = 0$$

Celles-ci sont habituellement interprétées de la façon suivante : le produit des erreurs de mesure sur la position et l'impulsion est supérieur à h constante de Planck.

Cette interprétation est fondée sur le concept de particule *strictement ponctuelle*, et il est bien évident dans ce cas que si la particule est en P elle ne peut être en Q (cf.figure 1).

Mais si l'on envisage une particule "étendue", elle peut être à la fois en P *et* en Q. On aboutit alors au concept d'écart entre deux points de la même particule, et dès lors les quantités notées habituellement Δp_i ne sont plus des erreurs sur la mesure de p_i mais des écarts entre les composantes des impulsions associées aux mouvements des deux points P et Q.

C'est cette conception que nous avons essayé de développer dans la présente étude : de façon schématique, la procédure utilisée s'articule de la façon suivante :

1) On écrit la variation de l'action entre les trajectoires issues de deux points distincts de la particule étendue (supposée équi-s).
2) Cette variation est supposée nulle.
3) Conformément à [1] et [2], on admet que le mouvement de chaque point est régi par les équations de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) = 0$$

Avec :

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = \Pi_\alpha = F u_\alpha + \frac{e}{m_0 c^2} A_\alpha$$

Π_α : Sans dimension; F : Indice du fluide selon Lichnerowicz, équivalent de la masse variable de de Broglie.

4) A l'écart δx^α entre les deux points P et Q de la particule étendue correspond l'écart $\delta\Pi_\alpha$. On montre que :

$$\delta x^\alpha \delta\Pi_\alpha = 0 :$$

le produit contracté de l'écart $\epsilon^\alpha = \delta x^\alpha$ par la variation substantielle de Π_α est nul. Cette relation constitue le point de départ de notre investigation. En métrique de Minkowski elle conduit à :

$$\delta x^\alpha \delta u_\alpha = 0$$

et

$$\sum_i \delta x^i \delta P^i = \delta t \delta E$$

soit

$$\sum_i |\delta x^i||\delta P^i| \geq |\delta t||\delta E|$$

1. Rappel relatif à la théorie des fluides chargés de A. Lichnerowicz.

M. A. Lichnerowicz a montré dans son ouvrage intitulé *Théories Relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* ([1]) que le mouvement d'un fluide chargé holonôme pouvait être déduit du principe d'action extrêmale :

$$\delta \int L ds = 0 \tag{1.1}$$

avec

$$L = F(g_{\mu\rho} u^\mu u^\rho)^{1/2} + K A_\mu u^\mu \tag{1.2}$$

où F désigne l'indice du fluide, u^μ la vitesse, et s la longueur d'univers (ou temps propre). Ce principe se traduit par les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

qui s'expriment sous la forme suivante :

$$F\frac{Du^\alpha}{ds} - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)F_{,\beta} = KF^{\alpha\beta}u_\beta \tag{1.4}$$

avec:

$$\begin{array}{l} K = F\mu/rc^2 = e/(m_0c^2) \quad , \quad (K \quad \text{constant} \quad) \\ rc^2 = \rho c^2 + \check{e} + p \\ \rho : \quad \text{masse spécifique} \\ \check{e} : \quad \text{énergie interne,} \quad e \quad \text{charge de l'électron} \\ p : \quad \text{pression interne} \\ \mu : \quad \text{densité volumique de charge} \\ F^{\alpha\beta} : \nabla^\alpha A^\beta - \nabla^\beta H^\alpha \quad , \quad A^\alpha \quad \text{4-potentiel-vecteur} \end{array} \tag{1.5}$$

Dans l'étude intitulée *Aspects hydrodynamiques de la mécanique quantique* (cf.[2]) nous avons associé à l'équation de Klein-Gordon un fluide quantique chargé pour lequel l'indice F a pour expression :

$$F_{KG} = \Big(1 + (\frac{\hbar}{m_0 c})^2 \frac{\Box R}{R}\Big)^{1/2} \tag{1.6}$$

R désignant l'amplitude de l'onde de Klein-Gordon. Cet indice F qui permet d'expliciter la "masse variable" de l'électron dans la théorie de de Broglie (cf.[3]) par la relation :

$$m = m_0 F_{KG}, \tag{1.7}$$

constitue le lien entre les développements de Lichnerowicz relatifs au fluide chargé et ceux de de Broglie relatifs à la théorie de la double solution.

Dans la suite de cette étude, nous allons considérer une particule étendue, sans spin, constituée par un fluide chargé de façon homogène, et de ce fait justiciable du formalisme précédemment esquissé.

2. Expression de la variation de l'intégrale d'action.

Nous nous proposons maintenant de montrer de quelle façon, à partir d'un principe d'action extrémale, on peut retrouver simultanément les équations de Lagrange –qui correspondent à une particule ponctuelle d'habitude–, et des relations qui "ressemblent" aux relations d'incertitude de Heisenberg, mais avec une signification tout autre, puisque nous allons considérer une particule étendue constituée par le fluide de Klein-Gordon précédemment décrit.

On considère la fonction d'action sous la forme :

$$S = \int_{s_1}^{s} L(x^\alpha, u^\alpha) ds \tag{2.1}$$

avec L de la forme (1.2), et F donné par (1.6) : $x^\alpha(s)$ représente la trajectoire d'un point du fluide en fonction du temps propre s qui évolue le long de la trajectoire à partir de la valeur initiale s_1. La position initiale est notée $x^\alpha(s_1)$.

On fait maintenant l'hypothèse que *tous les points du domaine fluide qui constitue la particule sont "equi-s"*. Autrement dit, le temps propre à l'intérieur d'une particule est partout le même. En outre, le mouvement de chaque point est régi par le même Lagrangien L. On désigne par x^α la position du point P et par $x^{\alpha'}$ celle du point Q (cf.figure 1). La variation d'action correspondant au changement de trajectoire a pour expression :

$$\delta S = S(x^{\alpha'}) - S(x^\alpha) = \int_{s_1}^{s} [L(x'^\alpha, u'^\alpha) - L(x^\alpha, u^\alpha)] ds \tag{2.2}$$

On pose :

$$x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha \tag{2.3}$$

$$\delta S = \int_{s_1}^{s} [L(x^\alpha + \delta x^\alpha, u^\alpha + \delta u^\alpha) - L(x^\alpha, u^\alpha)] ds$$

soit :

$$\delta S = \int_{s_1}^{s} (\delta x^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \delta u^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) ds + O^2 \tag{2.4}$$

On a :

$$\delta u^\alpha = u'^\alpha(x'^\alpha) - u^\alpha(x^\alpha) \tag{2.5}$$

δu^α constitue la variation substantielle de u^α dans la transformation infinitésimale (2.3) (cf. Annexe et [4]).

On pose :

$$\epsilon^\alpha = \delta x^\alpha \tag{2.6}$$

On sait, d'après [4][1], que :

$$\delta u^\alpha = -e^\lambda u^\alpha_{;\lambda} + u^\lambda \epsilon^\alpha_{;\lambda} + \epsilon^\lambda \partial_\lambda u^\alpha$$

c'est-à-dire :

$$\delta u^\alpha = \epsilon^\alpha_{;\lambda} u^\lambda - \epsilon^\lambda (u^\alpha_{;\lambda} - u^\alpha_{,\lambda})$$

or :

$$\epsilon^\alpha_{;\lambda} u^\lambda = \frac{D\epsilon^\alpha}{ds}$$

$$u^\alpha_{;\lambda} - u^\alpha_{,\lambda} = \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho$$

et

$$\delta u^\alpha = \frac{D\epsilon^\alpha}{ds} - \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho \tag{2.7}$$

[1] p. 1-23 formules (1.54) et suivantes.

de sorte que (2.4) s'écrit :

$$\delta S = \int_{s_1}^{s} [\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + (\frac{D\epsilon^\alpha}{ds} - \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho) \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}] ds$$

soit :

$$\delta S = \int_{s_1}^{s} ds [\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \frac{D}{ds}(\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) - \epsilon^\alpha \frac{D}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) - \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}]$$

D'après (1.2) la quantité Π_α définie par :

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = F u_\alpha + K A_\alpha \tag{2.8}$$

est un vecteur, de sorte que :

$$\frac{D}{ds}\Pi_\alpha = \frac{d\Pi_\alpha}{ds} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} u^\rho \Pi_\lambda$$

Il en résulte que la quantité entre crochets qui figure dans l'expression de δS s'écrit :

$$\epsilon^\alpha [\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha})] + \frac{D}{ds}(\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) + \epsilon^\alpha \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} u^\rho \Pi_\lambda - \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho \Pi_\alpha$$

On a :

$$\epsilon^\alpha \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} u^\rho \Pi_\lambda = \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} u^\rho \Pi_\alpha$$

et de ce fait, la variation de l'intégrale d'action s'écrit :

$$\delta S = \Big(\int_{s_1}^{s} ds \epsilon^\alpha [\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha})]\Big) + \Big([\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}]_s - [\epsilon^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}]_{s_1}\Big) \tag{2.9}$$

3. Conséquences du principe d'action extrêmale.

3.1 - Formulation générale.

Le principe d'action extrêmale se traduit par :

$$\delta S = 0 \tag{3.1}$$

Si l'on admet, conformément au paragraphe 1, que le mouvement doit être régi par les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) = 0. \tag{3.2}$$

Il en résulte, d'après (2.9), que compte tenu de (2.8) :

$$[\epsilon^\alpha \Pi_\alpha]_s = [\epsilon^\alpha \Pi_\alpha]_{s_1} \tag{3.3}$$

La quantité $\epsilon^\alpha \Pi_\alpha$ demeure invariante au cours du mouvement.

L'impulsion canonique sans dimension Π_α a pour expression d'après (2.8) :

$$\Pi_\alpha = F u_\alpha + K A_\alpha$$

D'après [2], la densité volumique d'impulsion a pour expression :

$$\begin{aligned} p_\alpha &= (m_0 c^2 \varpi F)\Pi_\alpha \\ \varpi &= R^2 \sim l^{-3} \end{aligned} \tag{3.4}$$

soit :

$$\begin{aligned} p_\alpha &= r c^2 u_\alpha + \mu A_\alpha \\ r c^2 &= \rho c^2 + \breve{e} + p \\ \mu &= e \varpi F \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho &= R^2/F \\ \mu &= R^2 e/m_0 F \\ \breve{e} + p &= m_0 c^2 R^2 F(F-1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si l'on désire rendre "plus physique" l'expression (3.3), il suffit d'écrire d'après (3.4) :

$$\Pi_\alpha = p_\alpha/(m_0 c^2 \varpi F) \tag{3.7}$$

et (3.3) s'écrit, compte tenu de (2.6) :

$$[\frac{\delta x^\alpha p_\alpha}{\varpi F}]_s = [\frac{\delta x^\alpha p_\alpha}{\varpi F}]_{s_1} \tag{3.8}$$

traduction de (3.3) :

$$[\delta x^\alpha \Pi_\alpha]_s = [\delta x^\alpha \Pi_\alpha]_{s_1} \tag{3.9}$$

On pose :

$$\delta x^\alpha \Pi_\alpha = \delta A \quad \text{invariant} \tag{3.10}$$

Soit P et Q les extrêmités en s des deux trajectoires issues de P_1 et Q_1 en s_1. D'après (3.10) :

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(P)[x^\alpha(Q) - x^\alpha(P)] = \delta_{PQ}A \\ \Pi_\alpha(Q)[x^\alpha(P) - x^\alpha(Q)] = \delta_{QP}A \end{aligned}$$

par addition on obtient :

$$[\Pi_\alpha(Q) - \Pi_\alpha(P)][x^\alpha(Q) - x^\alpha(P)] = -(\delta_{PQ}A + \delta_{QP}A) \tag{3.11}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(Q) - \Pi_\alpha(P) = \delta_{PQ}\Pi_\alpha \\ x^\alpha(Q) - x^\alpha(P) = \delta_{PQ}x^\alpha \end{aligned} \tag{3.12}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} -(\delta_{PQ}A + \delta_{QP}A) = \delta^2_{PQ}A = \delta^2_{QP}A \\ \delta^2_{PP}A = \delta^2_{QQ}A = 0 \end{aligned} \tag{3.12'}$$

La relation (3.11) s'écrit :

$$\delta_{PQ}\Pi_\alpha \delta_{PQ}x^\alpha = \delta^2_{PQ}A$$

ou encore, en supprimant le label PQ, mais en se rappelant que δ est toujours relatif à l'écart entre deux points de la particule dans un état "équi-s" donné :

$$\delta\Pi_\alpha \delta x^\alpha = \delta^2 A$$

Maintenant, si l'on admet que la variation de l'action dans le sens PQ est égale et opposée à la variation dans le sens QP, on a :

$$\delta_{PQ}A + \delta_{QP}A = 0 \quad \text{soit} \quad \delta^2 A = 0 \tag{3.13}$$

et (d'après (3.11))

$$\delta\Pi_\alpha \delta x^\alpha = 0 \tag{3.14}$$

Soit encore, compte tenu de (3.7) :

$$\delta(\frac{p_\alpha}{\varpi F})\delta x^\alpha = 0 \tag{3.15}$$

Cette relation peut être écrite :

$$\delta p_\alpha \delta x^\alpha = \frac{\delta(\varpi F)}{\varpi F} p_\alpha \delta x^\alpha = \delta(\varpi F)\delta A \tag{3.16}$$

Etant donné que (ϖF) est un scalaire, sa variation substantielle $\delta(\varpi F)$ est nulle. Il en résulte que

$$\delta p_\alpha \delta x^\alpha = 0 \tag{3.17}$$

La relation (3.17) est équivalente à la relation (3.14):

$$\delta \Pi_\alpha \delta x^\alpha = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} &\epsilon^\alpha \delta(F u_\alpha + K A_\alpha) = 0 \\ &\epsilon^\alpha \delta F u_\alpha + \epsilon^\alpha F \delta u_\alpha + K \epsilon^\alpha \delta A_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\delta u_\alpha = g_{\alpha\beta}\delta u^\beta = g_{\alpha\beta}(\dot\epsilon^\beta - \epsilon^\lambda \Gamma^\beta_{\lambda\rho} u^\rho) \\ &\delta u_\alpha = \dot\epsilon_\alpha - g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\rho}\epsilon^\lambda u^\rho \\ &\epsilon^a \delta u_\alpha = \epsilon^\alpha \dot\epsilon_\alpha - \Gamma^\beta_{\lambda\rho}\epsilon^\lambda \epsilon_\beta u^\rho = \frac{D}{ds}(\frac{\epsilon^\alpha \epsilon_\alpha}{2}) - (\epsilon^\lambda \epsilon_\beta)\Gamma^\beta_{\lambda\rho} u^\rho \end{aligned}$$

La particule étant "équi-s", on a :

$$\delta x^\alpha \delta x_\alpha = 0 \tag{3.19}$$

c'est-à-dire que $\epsilon^\alpha = \delta x^\alpha$ est un vecteur isotrope :

$$\epsilon^\alpha \epsilon_\alpha = 0 \quad , \quad \frac{D}{ds}(\epsilon^\alpha \epsilon_\alpha) = 0 \tag{3.19'}$$

et de ce fait :

$$\epsilon^\alpha \delta u_\alpha = -\epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho} u^\rho \tag{3.20}$$

i.e.[2] :

$$\delta x^\alpha \delta u_\alpha = -\epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho} u^\rho \tag{3.20'}$$

[2] La variation "substantielle" d'un vecteur n'est pas un vecteur à la différence de sa "variation locale" ou "variation de forme" cf.[4] Annexe 1 (sauf en ce qui concerne $\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha$)

Par ailleurs, la variation substantielle du potentiel vecteur A^α s'écrit (toujours d'après [4]) :

$$\delta A^\alpha = -\epsilon^\lambda A^\alpha_{;\lambda} + A^\lambda \epsilon^\alpha_{;\lambda} + \epsilon^\lambda \partial_\lambda A^\alpha$$

soit :

$$\delta A^\alpha = A^\lambda \epsilon^\alpha_{;\lambda} - \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} A^\rho$$

d'où :

$$\begin{aligned}\delta x_\alpha \delta A^\alpha &= A^\lambda(\epsilon_\alpha \epsilon^\alpha_{;\lambda}) - \epsilon_\alpha \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} A^\rho \\ &= A^\lambda \nabla_\lambda (\frac{\epsilon_\alpha \epsilon^\alpha}{2}) - \epsilon_\alpha \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} A^\rho\end{aligned}$$

$$\delta x_\alpha \delta A^\alpha = -\epsilon_\alpha \epsilon^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} A^\rho \quad [2] \tag{3.21}$$

Compte tenu de (3.20) et (3.21), (3.18) s'écrit :

$$(\epsilon^\alpha u_\alpha)\delta F = \epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho}(F u^\rho + K A^\rho) \tag{3.22}$$

ou encore, puisque $\delta F = 0$:

$$\epsilon_b \Gamma^\beta_{\alpha\rho} \epsilon^\alpha \Pi^\rho = 0 \tag{3.23}$$

Cette relation s'écrit encore:

$$F(\epsilon_b \Gamma^\beta_{\alpha\rho} \epsilon^\alpha u^\rho) + K(\epsilon_b \Gamma^\beta_{\alpha\rho} \epsilon^\alpha A^\rho) = 0$$

soit, compte tenu de (3.20) et (3.21)

$$F(\delta x^\alpha \delta u_\alpha) + K(\delta x^\alpha \delta A_\alpha) = 0 \tag{3.24}$$

3.2 - Métrique de Minkowski et faibles vitesses.

La relation (3.20) présente une signification physique. Elle s'écrit, rappelons le:

$$\delta x^\alpha \delta u_\alpha = -\epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho} u^\rho$$

Le 4-produit scalaire de la variation de position par la variation de vitesse d'univers est égal à un terme faisant intervenir la variation de position à l'ordre 2 et les symboles de Christoffel.

A supposer –ce qui est loin d'être évident– que les symboles de Christoffel soient nuls à l'intérieur de l'électron, on a :

$$\begin{aligned}
&\delta x^\alpha \delta u_\alpha = 0\\
&\delta x^0 \delta u_0 = -\delta x^i \delta u_i\\
&\delta x^0 \delta u^0 = \sum_i \delta x^i \delta u^i \quad \text{(Minkowski)}\\
&u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \delta u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{\beta\delta\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\delta(\frac{v^\alpha}{c})
\end{aligned} \tag{3.25}$$

d'où en posant :

$$\beta^\alpha = \frac{v^\alpha}{c} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\sum_i (\beta^i)^2} \tag{3.26}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta v^i = (c\delta x^0 - \sum_i v^i \delta x^i)\frac{\beta\delta\beta}{(1-\beta^2)}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta \beta^i = (\delta x^0 - \sum_i \beta^i \delta x^i)\frac{\beta\delta\beta}{(1-\beta^2)}$$

Compte tenu de (3.19) on a :

$$(\delta x^0)^2 = \sum_{i=1}^{3} (\delta x^i)^2$$

d'où par exemple :

$$\begin{aligned}
&\delta x^1 = \delta x^0 \cos\varphi \sin\theta\\
&\delta x^2 = \delta x^0 \sin\varphi \sin\theta\\
&\delta x^3 = \delta x^0 \cos\theta \quad \text{et}\\
&\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta\beta^i = \delta x^0[1 - (\beta^1 \cos\varphi\sin\theta + \beta^2 \sin\varphi\sin\theta + \beta^3\cos\theta)]\frac{\beta\delta\beta}{(1-\beta^2)}
\end{aligned}$$

lorsque :

$$\beta \ll 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta\beta^i \simeq \delta x^0 \beta\delta\beta$$

La multiplication par m_0c donne :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta(m_0 v^i) \simeq \delta t \delta(\frac{m_0 v^2}{2}) \tag{3.27}$$

Ceci dit on effectue un retour en arrière.

L'impulsion d'une particule chargée relativiste sans spin en Relativité Restreinte s'écrit :

$$p^\alpha = m_0 c u^\alpha + \frac{e}{c} A^\alpha$$

et son énergie a pour expression :

$$cP^0 = m_0 c^2 u^0 + eA^0$$

$$cP^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + eA^0$$

tandis que la tri-impulsion s'exprime par :

$$P^i = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta^i + eA^i$$

Dans le cas des *faibles vitesses*,

$$E = cP^0 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + eA^0,$$

d'où :

$$\delta(\frac{m_0 v^2}{2}) = \delta E - \delta(eA^0),$$

tandis que :

$$P^i = m_0 c \beta^i + \frac{e}{c} A^i$$

et

$$\delta(m_0 v^i) = \delta P^i - \delta(\frac{e}{c} A^i).$$

Ces deux variations substantielles $\delta(m_0 v^2/2)$ et $\delta(m_0 v^i)$ sont portées dans (3.27) : [3]

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta P^i - e \sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta A^i = \delta t \delta E - e \delta t \delta A^0$$

[3] En toute rigueur il aurait fallu considérer les intégrales volumiques des densités volumiques d'impulsion (3.5).

Soit :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta P^i - \delta t \delta E = e[\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \frac{\delta A^i}{c} - \delta t \delta A^0]$$

mais, compte tenu de (3.21), en métrique de Minkwoski :

$$\delta x_\alpha \delta A^\alpha = 0,$$

soit :

$$\sum_i \delta x^i \delta A^i - \delta x^0 \delta A^0 = 0$$

de sorte que, en définitive :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta P^i = \delta t \delta E \tag{3.28}$$

On a :

$$|\delta t \delta E| = |(\frac{c \delta t \delta \lambda}{\lambda^2})| h \qquad (E = \frac{hc}{\lambda})$$

et donc si

$$|c \delta t \delta \lambda| > \lambda^2 \quad , \quad |\delta t \delta E| > h$$

Si l'on écrit :

$$|\delta t||\delta E| = \alpha h \quad , \quad \alpha \quad \text{constante} \quad (\alpha > 1)$$

alors

$$|\delta x^i||\delta P^i| = \alpha_i h \quad , \quad \alpha_i \quad \text{constante}$$

De (3.28) on déduit :

$$\sum_i |\delta x^i||\delta P^i| \geq |\delta t||\delta E| \tag{3.29}$$

Nous obtenons ainsi des relations qui évoquent les relations d'incertitude de Heisenberg mais il ne s'agit plus ici d'incertitude. Les écarts $\delta x^i \delta t$ sont des écarts donnés entre deux points du même domaine fluide qui constitue la particule étendue. Les quantités δP^i et δE ne sont plus des erreurs sur P^i et E mais les écarts sur ces valeurs entre les points donnés du fluide. Nous nous trouvons confrontés à deux interprétations : dans le cadre Heisenberg où la particule est ponctuelle, on dira qu'elle est *soit* *en P, soit en Q* ; dans le cadre de la particule étendue, on dira qu'elle est *en P et en Q*. Si l'on résume: particule ponctuelle : interprétation "ou" (Heisenberg incertitude) particule étendue : interprétation "et" ("certitude") (cf.figure 2).

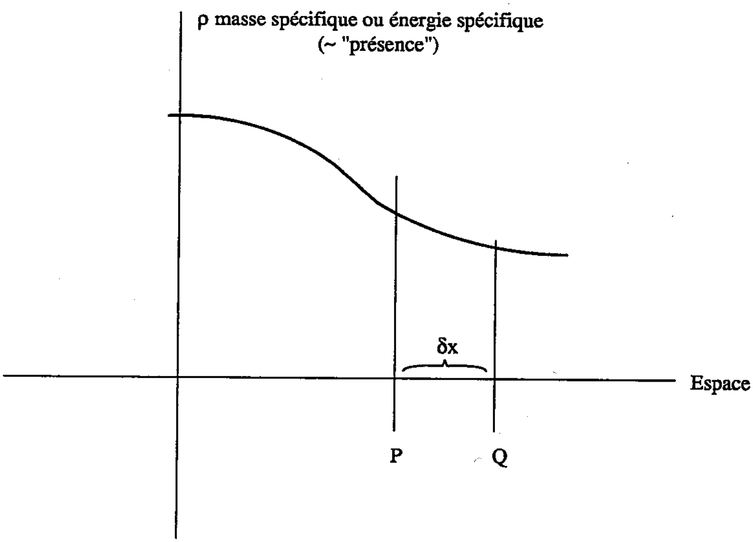


Figure 2. Interprétation "OU" (P ou Q). Interprétation "ET" (P et Q).

Notons que la relation entre les variations (3.28) est obtenue à partir de (3.20) :

$$\delta x^\alpha \delta u_\alpha = -\epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho} u^\rho.$$

qui semble le relation de base à retenir.

4. Durée d'interaction de l'électron equi-s de Klein-Gordon et des photons.

Nous avons vu que l'électron de Klein-Gordon "équi-s" est régi par les deux relations :

$$\begin{aligned} &\delta x^\alpha \delta x_\alpha = 0 \quad \text{particule "equi-s"} \\ &\delta x^\alpha \delta \Pi_\alpha = 0 \quad \text{principe d'action extrémale lagrangienne} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La relation

$$\delta x^\alpha \delta x_\alpha = 0$$

s'écrit :

$$g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha \delta x^\beta = 0$$

c'est-à-dire :

$$(\sqrt{g_{00}}\delta x^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\delta x^i)^2 + (g_{ij} - \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}})\delta x^i \delta x^j = 0$$

On pose :

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} \\ \gamma_{ij} &= -g_{ij} + \gamma_i \gamma_j \end{aligned} \tag{4.2}$$

On pose aussi :

$$\tilde{\beta}^i = \frac{\delta x^i}{\delta x^0} \tag{4.3}$$

d'où :

$$(\sqrt{g_{00}} + \gamma_i \tilde{\beta}^i)^2 - \gamma_{ij}\tilde{\beta}^i \tilde{\beta}^j = 0 \tag{4.4}$$

On pose encore (cf.[5]) :

$$\begin{aligned} &\tilde{\beta}^i = \tilde{\beta}\Omega^i \quad \text{avec} \\ &\gamma_{ij}\Omega^i\Omega^j = 1 \quad , \quad (\tilde{\beta} > 0) \end{aligned} \tag{4.5}$$

et la relation (4.4) s'écrit :

$$|\sqrt{g_{00}} + (\gamma_i \Omega^i)\tilde{\beta}]^2 - (\gamma_{ij}\Omega^i\Omega^j)\tilde{\beta}^2 = 0$$

On pose :

$$a = \gamma_i \Omega^i \qquad (< 1) \tag{4.6}$$

et en définitive, compte tenu de (4.5) :

$$(\sqrt{g_{00}} + a\tilde{\beta})^2 - \tilde{\beta}^2 = 0$$

Cette équation admet pour solution :

$$\tilde{\beta} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{(1-a)} \tag{4.7}$$

$\tilde{\beta}$ est le module de la vitesse de la lumière dans la métrique $g_{\alpha\beta}$, à l'intérieur de l'électron.

Par conséquent, la durée de l'interaction entre un photon et l'électron de Klein-Gordon considéré comme "equi-s", a pour valeur maximum compte tenu de (4.3) et (4.7) :

$$\delta t_{max} = \frac{2r_0(1-a)}{c\sqrt{g_{00}}} \tag{4.8}$$

$2r_0$ désignant le "diamètre de l'électron", et g_{00} la valeur du potentiel gravitationnel principal à "l'intérieur de l'électron".

Dans l'hypothèse simplificatrice :

$$g_{00} = 1 \quad , \quad a = 0.$$

avec $r_0 = 2,8178.10^{-13}$ cm et $c = 2,99793.10^{10}$ cm/s, δt_{max} a pour valeur :

$$\delta t_{max} = 1,88.10^{-23}s$$

Ce résultat est sans aucun doute très inférieur aux estimations habituelles ($10^{-16}s$) qui sont totalement opposées aux considérations exposées en [6] p. 95. Mais il s'agit d'un point du photon "étendu".

Il est logique de penser que le photon "étendu" mettra plus de temps à "traverser" l'électron "étendu", surtout si la "vitesse de la lumière" à l'intérieur de l'électron est plus faible que celle de la lumière dans le vide, conséquence d'un potentiel gravitationnel principal inférieur à l'unité.

Conclusion.

Partant du principe variationnel attaché au fluide chargé homogène (cf.[1]), et faisant en outre l'hypothèse que l'électron est un domaine étendu "equi-s", on aboutit à l'aide de la notion de variation substantielle à la relation :

$$\delta x^\alpha \delta u_\alpha = -\epsilon^\alpha \epsilon_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\rho} u^\rho$$

qui, pour les vitesses faibles, en métrique de Minkowski, se traduit par l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{3} \delta x^i \delta P^i = \delta t \delta E$$

à laquelle correspond l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{3} |\delta x^i||\delta P^i| \geq |\delta t||\delta E|.$$

Cette inégalité où interviennent les écarts entre deux points distincts de la particule étendue peut éventuellement prendre la forme des relations d'incertitude de Heisenberg. Si l'on suppose que :

$$|\delta t||\delta E| > h$$

alors, en moyenne

$$|\delta x^i||\delta P^i| > h/3$$

Il serait souhaitable d'effectuer une étude similaire à partir de l'électron de Dirac étendu, mais les difficultés semblent à première vue beaucoup plus importantes.

Annexe (Rappel de [4]).

Variations substantielles et locales.

1. Transformations infinitésimales.

On considère la transformation infinitésimale :

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^\mu + \epsilon^\mu(x^\alpha) \\ \mu' &= \mu (= 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1}$$

On a :

$$A^{\mu'}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_{,\nu} \quad , \quad \det|\epsilon^\mu_{,\nu}| \ll 1 \tag{2}$$

La variation substantielle de T est définie par :

$$\delta T = T'(x') - T(x) \tag{3}$$

et la variation locale par :

$$\bar{\delta} T = T'(x) - T(x) \tag{4}$$

d'où :

$$\delta T = \bar{\delta} T + \epsilon^\mu \partial_\mu T \tag{5}$$

δ et $\bar{\delta}$ obéissent à la règle de Leibnitz. On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} &\partial\bar{\delta} - \bar{\delta}\partial = 0 \\ &(\partial_\beta \delta - \delta \partial_\beta) T = \epsilon^\alpha_{,\beta} \partial_\alpha T \end{aligned} \tag{6}$$

2. Exemples d'applications.

$$\text{Coordonnées} \quad : \delta x^\mu = \epsilon^\mu \quad , \quad \bar{\delta} x^\mu = 0 \tag{7}$$

$$\text{Scalaire} \quad : \delta S = 0 \quad , \quad \bar{\delta} S = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha S \tag{8}$$

Densité scalaire $\mathcal{D}$ de poids W : [4]

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{D} + W\epsilon^\alpha_{,\alpha}\mathcal{D} = 0 \\ &\bar{\delta}\mathcal{D} + (\epsilon^\alpha\mathcal{D})_{,\alpha} + (W-1)\epsilon^\alpha_{,\alpha}\mathcal{D} = 0 \\ &\bar{\delta}\mathcal{D} + w(\epsilon^\alpha\mathcal{D})_{,\alpha} + (1-W)\epsilon^\alpha\mathcal{D}_{,\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Pour $W = 1$:

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{D} + \epsilon^\alpha_{,\alpha}\mathcal{D} = 0 \\ &\bar{\delta}\mathcal{D} + (\epsilon^\alpha\mathcal{D})_{,\alpha} = 0 \\ &(\bar{\delta}\mathcal{D} + (\epsilon^\alpha\mathcal{D})_{,\alpha} = 0) \end{aligned} \tag{10}$$

3. Densités tensorielles et tenseurs.

On pose :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)} = \sum_{p=1}^{n} \delta^\mu_{\alpha p}(\delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots \delta^{\beta p-1}_{\alpha p-1})\delta^{\beta p}_\lambda(\delta^{\beta p+1}_{\alpha p+1} \ldots \delta^{\beta m}_{\alpha m}) \\ &\partial\mathcal{F} = 0 \quad , \quad \nabla\mathcal{F} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Pour la densité tensorielle $\mathcal{D}(\alpha)$: [5] (indices tous covariants)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{D}_{(\alpha)} &= -W\epsilon^\lambda_{,\lambda}\mathcal{D}_{(\alpha)} - \epsilon^\lambda_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)}\mathcal{D}(\beta) \\ \bar{\delta}\mathcal{D}_{(\alpha)} &= -W\epsilon^\lambda_{,\lambda}\mathcal{D}_{(\alpha)} - \epsilon^\lambda\mathcal{D}_{(\alpha),\lambda} - \epsilon^\lambda_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)}\mathcal{D}(\beta) \end{aligned} \tag{12}$$

Pour les tenseurs $T_{(\alpha)}$ et $T^{(\alpha)}$ $(W = 0)$

$$\begin{aligned} T_{(\alpha);\rho} &= T_{(\alpha),\rho} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\sigma(\beta)}_{\mu(\alpha)}T_{(\beta)} \\ T^{(\alpha)}_{;\rho} &= T^{(\alpha)}_{,\rho} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\sigma(\alpha)}_{\mu(\beta)}T^{(\beta)} \end{aligned} \tag{13}$$

---

[4] avec $B = \det[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}]$, $\mathcal{D}'(x') = B^W\mathcal{D}(x)$

[5] $\mathcal{D}'_{(\alpha')} = B^W A^{(\beta)}_{(\alpha')}\mathcal{D}_{(\beta)}$, $A^{(\beta)}_{(\alpha')} = A^{\beta_1}_{\alpha'_1}A^{\beta_2}_{\alpha'_2}, \ldots A^{\beta n}_{\alpha' n}$

$$
\begin{aligned}
\delta T_{(\alpha)} &= -\epsilon^{\lambda}_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)}\mathcal{D}_{(\beta)} \\
\bar{\delta} T_{(\alpha)} &= -\epsilon^{\lambda} T_{(\alpha),\lambda} - \epsilon^{\lambda}_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)} T_{(\beta)} \\
\bar{\delta} T_{(\alpha)} &= -\epsilon^{\lambda} T_{(\alpha);\lambda} - \epsilon^{\lambda}_{;\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)} T_{(\beta)}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

et de même :

$$
\begin{aligned}
\delta T^{(\alpha)} &= \epsilon^{\lambda}_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\alpha)}_{\lambda(\beta)} T^{(\beta)} \\
\bar{\delta} T^{(\alpha)} &= -\epsilon^{\lambda} T^{(\alpha)}_{,\lambda} + \epsilon^{\lambda}_{,\mu}\mathcal{F}^{\mu(\alpha)}_{\lambda(\beta)} T^{(\beta)} \\
\bar{\delta} T^{(\alpha)} &= -\epsilon^{\lambda} T^{(\alpha)}_{;\lambda} + \epsilon^{\lambda}_{;\mu}\mathcal{F}^{\mu(\alpha)}_{\lambda(\beta)} T^{(\beta)}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Les variations substantielles *covariantes* sont telles que :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta} T_{(\alpha)} &= \bar{\delta} T_{(\alpha)} + \epsilon^{\lambda} T_{(\alpha);\lambda} = -\epsilon^{\lambda}_{;\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)} T_{(\beta)} \\
\tilde{\delta} T^{(\alpha)} &= \bar{\delta} T^{(\alpha)} + \epsilon^{\lambda} T_{(\alpha);\lambda} = \epsilon^{\lambda}_{;\mu}\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\lambda(\alpha)} T^{(\beta)}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Le commutateur $(\bar{\delta}\nabla_{\rho} - \nabla_{r}\bar{\delta})T_{(\alpha)}$ a pour expression :

$$
(\bar{\delta}\nabla_{\rho} - \nabla_{\rho}\bar{\delta})T_{(\alpha)} = (\epsilon^{\lambda} R^{\nu}_{\mu\lambda\rho} + \epsilon^{\nu}_{;\mu;\rho})\mathcal{F}^{\mu(\beta)}_{\nu(\alpha)} T_{(\beta)}
\tag{17}
$$

4. Application au tenseur métrique

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta} g_{\alpha\beta} &= -(\epsilon_{\alpha;\beta} + \epsilon_{\beta;\alpha}) \\
\bar{\delta} g^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\alpha;\beta} + \epsilon^{\beta;\alpha}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Si ϵ^{α} est un vecteur de Killing :

$$
\epsilon_{\alpha;\beta} + \epsilon_{\beta;\alpha} = 0
\tag{19}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
&\bar{\delta} g_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \bar{\delta} g^{\alpha\beta} = 0 \\
&\epsilon^{\lambda} R^{\nu}_{\mu\lambda\rho} + \epsilon^{\nu}_{;\mu;\rho} = 0 \\
&(\bar{\delta}\nabla_{\rho} - \nabla_{\rho}\bar{\delta})T_{(\alpha)} = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Références

[1] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson.

[2] P. Paillère, *Aspects hydrodynamiques de la mécanique quantique*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 16 n°3, 1991.
[3] L. de Broglie et J.L. Andrade e Silva, *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars.
[4] P. Paillère, *Aperçus sur la symétrisation du tenseur canonique d'impulsion énergie...*, Note CEA.N 2641 du 12/3/1990.
[5] P. Paillère, *Influence du potentiel gravitationnel principal sur la longueur d'onde en collision Compton*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 60e année 2-3, 1991, pp. 133-144.
[6] Régis Dutheil, *Théorie de la relativité et mécanique quantique dans la région du genre espace*, Editions Derouaux, 10 place Saint-Jacques, Liège, 1989.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1992)