Une nouvelle théorie de l'émission spontanée

J. Salmon

Conservatoire National des Arts et Métiers
Laboratoire de physique générale
292 rue Saint-Martin F-75003 Paris

RESUME. L'auteur reprend la théorie semi-classique de Crisp et Jaynes et ajoute un terme complémentaire. Il obtient ainsi la description dans le temps d'une transition radiative par émission spontanée.

ABSTRACT. The author studies again Crisp's and Jaynes' semi classical theory and adds a supplementary term. By so doing, he obtains the description in the time of a radiative transition by spontaneous emission.

1. Introduction

Cet article propose une description temporelle de la transition radiative entre deux niveaux d'un atome à un électron.

On sait qu'une telle description est interdite dans l'interprétation de l'école de Copenhague. Il est donc nécessaire de proposer une théorie inspirée par un modèle semi-classique.

Nous utiliserons celui de Crisp et Jaynes [1] mais, par suite d'une difficulté liée à la condition initiale, nous introduirons un terme complémentaire qui se révèlera efficace.

Toutefois, ce terme contient un opérateur d'échange entre états que seul le résultat final justifie. Cet opérateur disparaît si on fait intervenir un milieu sub-quantique doué d'une propriété originale lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Il en résulte un terme complémentaire satisfaisant [2][3].

2. Notations

Considérons un atome à un électron. Désignons par m sa masse et par $-e$ sa charge, t représentera le temps, ϵ_0 la permittivité du vide et $\hbar$ la constante de Planck divisée par 2π. A l'origine O se trouve un noyau de charge Ze produisant une énergie potentielle V. $\overrightarrow{x}$ désignant le vecteur position de l'électron, on a

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x} \tag{1}$$

On pose

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \tag{2}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit en désignant par ψ la fonction d'onde

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_0\psi \tag{3}$$

On considère deux niveaux d'énergie E_1 et E_2. Les fonctions propres de H_0 associées sont ψ_1 et ψ_2 avec

$$H_0\psi_1 = E_1\psi_1 \tag{4}$$

$$H_0\psi_2 = E_2\psi_2 \tag{5}$$

Désignons par ω_1 et ω_2 les pulsations telles que

$$E_1 = -\hbar\omega_1 \tag{6}$$

$$E_2 = -\hbar\omega_2 \tag{7}$$

L'électron effectue une transition du niveau E_2 au niveau E_1 par émission spontanée. La pulsation du photon résultant est ω avec

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{8}$$

L'expression de la fonction d'onde ψ est en désignant par $c_1(t)$ et $c_2(t)$ deux fonctions du temps t

$$\psi = c_1(t)e^{i\omega_1 t}\psi_1 + c_2(t)e^{i\omega_2 t}\psi_2 \tag{9}$$

c_2 doit évoluer de l'unité à zéro et simultanément c_1 de zéro à l'unité.

Or en reportant l'expression (9) dans l'équation de Schrödinger (3) on montre aisément qu'on a soit $c_2 = 1$, $c_1 = 0$ soit $c_2 = 0$, $c_1 = 1$. Il en résulte que la transition ne peut être décrite.

Aussi Crisp et Jaynes proposent de modifier l'équation de Schrödinger (3) en introduisant le potentiel magnétique vecteur $\overrightarrow{A}$ produit par le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ associé à la fonction d'onde ψ.

$$\overrightarrow{j} = \frac{ie\hbar}{2m}[\psi^+ \overrightarrow{\nabla}\psi - \psi\overrightarrow{\nabla}\psi^+] \tag{10}$$

L'équation de Schrödinger devient

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}[-i\hbar\overrightarrow{\nabla} + e\overrightarrow{A}]^2\psi + V\psi \tag{11}$$

et en reportant (9) dans (11) on aboutit à des expressions explicites des probabilités de présence p_1 et p_2.

$$p_1 = c_1 c_1^+ \quad \text{et} \quad p_2 = c_2 c_2^+ \tag{12}$$

3. Développement de la méthode de Crisp et Jaynes

Crisp et Jaynes supposent ψ_1 et ψ_2 réels et normés ; le calcul correspondant est décrit en détail dans [1] et [7]. Nous en donnons les principales étapes. Ils établissent d'abord un important résultat préliminaire. Considérons deux états propres de H_0 caractérisés par deux fonctions propres ψ_a et ψ_b auxquelles correspondent les pulsations ω_a et ω_b soit

$$H_0\psi_a = -\hbar\omega_a\psi_a \tag{13}$$

$$H_0\psi_b = -\hbar\omega_b\psi_b \tag{14}$$

Multiplions (13) par ψ_b et (14) par ψ_a, soustrayons et intégrons sur l'espace des positions. Désignons enfin par $\overrightarrow{j_{ab}}$ le vecteur

$$\overrightarrow{j_{ab}} = \frac{ie\hbar}{2m}[\psi_b\overrightarrow{\nabla}\psi_a - \psi_a\overrightarrow{\nabla}\psi_b] \tag{15}$$

Il vient la relation

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j_{ab}} = ie(\omega_a - \omega_b)\psi_a\psi_b \tag{16}$$

Désignons par $\overrightarrow{d_{ab}}$ le vecteur moment dipolaire mixte

$$\overrightarrow{d_{ab}} = \int -e\overrightarrow{x}\psi_a\psi_b d^3x \tag{17}$$

on montre que

$$\int \overrightarrow{j_{ab}} d^3x = i(\omega_a - \omega_b)\overrightarrow{d_{ab}} \tag{18}$$

Dans le cas des états 1 et 2 on a

$$\overrightarrow{j_{11}} = \overrightarrow{j_{22}} = 0 \tag{19}$$

$$\overrightarrow{j_{12}} = -\overrightarrow{j_{21}} = \frac{ie\hbar}{2m}[\psi_2\overrightarrow{\nabla}\psi_1 - \psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2] \tag{20}$$

$$\overrightarrow{d_{12}} = \overrightarrow{d} = -\int \overrightarrow{x}\psi_1\psi_2 d^3x \tag{21}$$

d'où la relation

$$\int \overrightarrow{j_{12}} d^3x = i\omega\overrightarrow{d} \tag{22}$$

Reportons l'expression de ψ donnée par (19) dans (20). Il vient

$$\overrightarrow{j} = [c_1c_2^+e^{i\omega t} - c_2c_1^+e^{-i\omega t}]\overrightarrow{j_{12}} \tag{23}$$

Utilisons (22). Il vient :

$$\int \overrightarrow{j} d^3x = [c_1c_2^+e^{i\omega t} - c_2c_1^+e^{-i\omega t}]i\omega\overrightarrow{d} \tag{24}$$

La densité de courant $\overrightarrow{j}$ génère le potentiel magnétique vecteur $\overrightarrow{A}$. Adoptons la jauge de Coulomb et désignons par $\overrightarrow{j_t}$ la densité de courant transerve.

On a

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|^{-1}\overrightarrow{j}_t(t - \frac{|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|}{c}, \overrightarrow{x}')d^3x' \tag{25}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0 \tag{26}$$

L'influence de $\overrightarrow{j}$ n'est importante qu'au voisinage de l'atome soit dans le domaine tel que $|\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x}| \ll cT$, T désignant la période $2\pi(\omega)^{-1}$. On peut donc développer (25) autour de t d'où

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int |\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x}|^{-1} \overrightarrow{j}_t(t, \overrightarrow{x}') d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int \overrightarrow{j}_t(t, \overrightarrow{x}') d^3x' \quad (27)$$

Or

$$\overrightarrow{j}_t = \frac{2}{3} \overrightarrow{j} = \frac{2}{3} [c_1 c_2^+ e^{i\omega t} - c_2 c_1^+ e^{-i\omega t}] \overrightarrow{j_{12}} \quad (28)$$

Le dernier terme de (27) va mettre en compétition dc_1/dt et ωc_1. Or θ désignant la vie moyenne de l'électron dc_1/dt est voisin de $(\theta^{-1} c_1)$ qui est une quantité très inférieure à ωc_1. On ne conserve donc que les termes du genre ωc_1 et l'expression de $\overrightarrow{A}$ devient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} =& \frac{\mu_0}{4\pi} [c_1 c_2^+ e^{i\omega t} - c_2 c_1^+ e^{-i\omega t}] \int |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|^{-1} \overrightarrow{j_{12t}}(\overrightarrow{x}') d^3x' \\ &+ \frac{\mu_0 \omega^2}{6\pi c} [c_1 c_2^+ e^{i\omega t} + c_1^+ c_2 e^{-i\omega t}] \overrightarrow{d} \end{aligned} \quad (29)$$

Le potentiel vecteur est introduit dans l'équation de Schrödinger (11). En négligeant les termes en A^2 qui sont petits et en tenant compte de la jauge

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0 \quad (26)$$

On a

$$\frac{dc_1}{dt} e^{i\omega_1 t} \psi_1 + \frac{dc_2}{dt} e^{i\omega_2 t} \psi_2 = -\frac{e}{m} \overrightarrow{A} \cdot [c_1 e^{i\omega_1 t} \overrightarrow{\nabla} \psi_1 + c_2 e^{i\omega_2 t} \overrightarrow{\nabla} \psi_2] \quad (30)$$

Multiplions cette équation par $c_1^+ e^{-i\omega t} \psi_1 d^3x$ et intégrons. Prenons ensuite la valeur moyenne des termes exponentiels sur une période T. Il vient :

$$\begin{aligned} c_1^+ \frac{dc_1}{dt} =& \frac{\mu_0}{4\pi} c_1 c_1^+ c_2 c_2^+ [\int |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|^{-1} \overrightarrow{j_{12t}} d^3x'] \cdot [-\frac{e}{m} \int \psi_1 \overrightarrow{\nabla} \psi_1 d^3x] \\ &- \frac{\mu_0 \omega^2 e}{6\pi cm} c_1 c_1^+ c_2 c_2^+ \overrightarrow{d} \cdot \int \psi_1 \overrightarrow{\nabla} \psi_2 d^3x \end{aligned} \quad (31)$$

Prenons l'expression conjuguée et additionnons. Puisque

$$\overrightarrow{j_{12}} + \overrightarrow{j_{21}} = 0 \quad (32)$$

il subsiste

$$\frac{d}{dt}(c_1c_1^+) = -\frac{\mu_0\omega^2 e}{6\pi cm}c_1c_1^+c_2c_2^+\overrightarrow{d}\cdot\int[\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2+\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2]d^3x \tag{33}$$

Puisque

$$\int\psi_1\psi_2 d^3x = 0 \tag{34}$$

il vient

$$\int[\psi_2\overrightarrow{\nabla}\psi_1+\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2]d^3x = 0 \tag{35}$$

d'où

$$2\int\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2 d^3x = \int[\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2-\psi_2\overrightarrow{\nabla}\psi_1]d^3x \tag{36}$$

Or

$$\overrightarrow{j_{12}} = \frac{ie\hbar}{2m}[\psi_2\overrightarrow{\nabla}\psi_1-\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2] \tag{37}$$

Par suite

$$\int[\psi_1\overrightarrow{\nabla}\psi_2-\psi_2\overrightarrow{\nabla}\psi_1]d^3x = \frac{2mi}{e\hbar}\int\overrightarrow{j_{12}}d^3x = -\frac{2m\omega}{i\hbar}\overrightarrow{d} \tag{38}$$

L'équation (33) devient :

$$\frac{d}{dt}(c_1c_1^+) = \frac{\mu_0\omega^3 d^2}{3\pi\hbar c}[c_1c_1^+c_2c_2^+] \tag{39}$$

Posons

$$\alpha = \frac{\mu_0\omega^3 d^2}{3\pi\hbar c} \tag{40}$$

$$p_1 = c_1c_1^+ \tag{41}$$

$$p_2 = c_2c_2^+ \tag{42}$$

Il vient

$$\frac{dp_1}{dt} = \alpha p_1 p_2 \quad , \quad \frac{dp_2}{dt} = -\alpha p_1 p_2 \tag{43}$$

d'où K désignant une constante

$$p_1 = \frac{Ke^{\alpha t}}{1+Ke^{\alpha t}} \quad , \quad p_2 = \frac{1}{1+Ke^{\alpha t}} \quad , \quad p_1+p_2 = 1 \tag{44}$$

Malheureusement dans cette théorie l'état initial étant

$$p_2 = 1 \quad , \quad p_1 = 0 \tag{45}$$

Il vient la solution non acceptable $K = 0$. En revanche pour t grand p_1 tend vers un et p_2 vers zéro.

Nous allons maintenant reprendre une autre méthode (J. Salmon [8]).

La difficulté rencontrée dans la méthode de Crisp et Jaynes à propos de la constante K pose le problème de l'aptitude d'une théorie semi-classique à rendre compte de l'émission spontanée dans le cadre du système Schrödinger-Maxwell.

On peut reprocher à la méthode de Crisp et Jaynes d'utiliser une formule de superposition dans un problème non linéaire [4]. On peut aussi remettre en cause le développement (27) et par suite le calcul du champ [5][6][7].

Aussi nous avons fait une tentative basée sur l'introduction d'un terme extérieur au système. Nous avons obtenu un résultat satisfaisant au prix de l'introduction d'un opérateur d'échange entre états. Nous proposerons plus loin une méthode qui élimine cet opérateur au prix de l'introduction d'un milieu sub-quantique.

4. Méthode du terme extérieur

Ce terme doit permettre une description complète de la transition, ne doit pas modifier sensiblement les niveaux d'énergie E_1 et E_2 et doit faire apparaître la différence $E_2 - E_1$.

Nous l'introduisons dans le second membre de l'équation de Schrödinger sous la forme $H_R\psi$ avec

$$H_R\psi = a(E_2 - E_1)\psi = a\hbar\omega\psi \tag{46}$$

a désignant une constante de couplage que nous montrerons être très petite devant l'unité.

L'équation en ψ devient :

$$[ih\frac{\partial}{\partial t} - H_0 + a\hbar\omega)][c_1 e^{i\omega_1 t}\psi_1 + c_2 e^{i\omega_2 t}\psi_2] = 0 \tag{47}$$

Il vient :

$$\frac{dc_1}{dt} = -ia\omega c_1 \tag{48}$$

$$\frac{dc_2}{dt} = -ia\omega c_2 \tag{49}$$

d'où b désignant une constante les solutions

$$c_1 = be^{-ia\omega t} \tag{50}$$

$$p_1 = b^2 \tag{51}$$

Le résultat n'est pas acceptable puisque p_1 ne varie pas avec le temps. Mais introduisons de manière heuristique un opérateur d'échange entre les quantités c_1 et c_2, soit H_c avec

$$H_c c_1 = c_2 \tag{52}$$

$$H_c c_2 = c_1 \tag{53}$$

Substituons à H_R l'opérateur H'_R

$$H'_R = a\hbar\omega H_c \tag{54}$$

Les équations en c_1 et c_2 deviennent

$$\frac{dc_1}{dt} = -ia\omega c_2 \quad , \quad \frac{dc_1^+}{dt} = ia\omega c_2^+ \tag{55}$$

$$\frac{dc_2}{dt} = -ia\omega c_1 \quad , \quad \frac{dc_2^+}{dt} = ia\omega c_1^+ \tag{56}$$

d'où

$$c_1^+ \frac{dc_1}{dt} + c_1 \frac{dc_1^+}{dt} = \frac{dp_1}{dt} = ia\omega(c_1 c_2^+ - c_1^+ c_2) \tag{57}$$

$$c_2^+ \frac{dc_2}{dt} + c_2 \frac{dc_2^+}{dt} = \frac{dp_2}{dt} = -ia\omega(c_1 c_2^+ - c_1^+ c_2) \tag{58}$$

On a bien

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{59}$$

D'autre part nous sommes libres de choisir c_1 réel et c_2 imaginaire pur.

$$c_1 = c_1^+ \quad , \quad p_1 = c_1^2 \quad , \quad c_2 = ic'_2 = -c_2^+ \quad , \quad p_2 = (c'_2)^2 \tag{60}$$

Il vient ainsi :

$$\frac{dp_1}{dt} = 2a\omega[p_1(1-p_1)]^{1/2} \tag{61}$$

Les solutions s'écrivent :

$$p_1 = \sin^2 a\omega t \tag{62}$$

$$p_2 = \cos^2 a\omega t \tag{63}$$

L'électron évolue de l'état E_2 vers l'état E_1 en un temps t_1 tel que :

$$t_1 = \frac{\pi}{2a\omega} \tag{64}$$

La vie moyenne θ est donnée par la formule

$$\theta = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} t\sin^2 a\omega t dt = \frac{7}{8a\omega} \tag{65}$$

Puisque le produit $\omega\theta$ est très supérieur à l'unité la constante de couplage a est très petite.

5. Méthode de superposition

Nous allons maintenant ajouter le terme extérieur à celui de Crisp et Jaynes. La difficulté concernant la constante K disparaît et l'évolution est décrite de $p_1 = 0$ à $p_1 = 1$.

Le système d'équation en ψ et $\overrightarrow{A}$ s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}[-i\hbar\overrightarrow{\nabla} + e\overrightarrow{A}]^2\psi + [V + ah\omega H_c]\psi \tag{66}$$

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|^{-1}\overrightarrow{j_t}(t - \frac{|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|}{c}, \overrightarrow{x}')d^3x' \tag{67}$$

Les calculs sont conduits de manière analogue et il vient :

$$\frac{dp_1}{dt} = \alpha p_1 p_2 + 2a\omega(p_1p_2)^{1/2} \tag{68}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -[\alpha p_1 p_2 + 2a\omega(p_1p_2)^{1/2}]$$

d'où

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{69}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \alpha p_1(1-p_1) + 2a\omega p_1^{1/2}(1-p_1)^{1/2} \tag{70}$$

La relation entre t et p_1 est

$$t = \int_0^{p_1} [\alpha p'_1(1-p'_1) + 2a\omega {p'_1}^{1/2}(1-p'_1)^{1/2}]^{-1} dp'_1 \tag{71}$$

Or la théorie usuelle du rayonnement si elle ne détermine pas c_1 et c_2 introduit en revanche une durée de vie moyenne θ_0 telle que :

$$\theta_0 = \frac{12\pi^2\epsilon_0 c^3\hbar}{\omega^3 d^2} \tag{72}$$

Puisque

$$\alpha = \frac{\omega^3 d^2}{3\pi\epsilon_0 c^3\hbar} \tag{73}$$

on a

$$\alpha = \frac{4\pi}{\theta_0} \tag{74}$$

Posons

$$a\omega = \lambda\frac{\pi}{\theta_0} \quad , \quad p'_1 = \sin^2\varphi \quad , \quad p_1 = \sin^2\varphi_1 \tag{76}$$

Il vient :

$$t = \frac{\theta_0}{\pi}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\lambda + \sin 2\varphi} \tag{77}$$

d'où

$$\lambda > 1 \quad , \quad t = \frac{\theta_0}{\pi}(\lambda^2-1)^{-1/2}[\operatorname{arctg}\frac{1+\lambda\frac{p_1}{1-p_1}^{1/2}}{(\lambda^2-1)^{1/2}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{(\lambda^2-1)^{1/2}}] \tag{78}$$

$$\lambda < 1 \quad , \quad t = \frac{\theta_0}{2\pi}(1-\lambda^2)^{-1/2} \log\frac{[1+\lambda\frac{p_1}{1-p_1}^{1/2} - (1-\lambda^2)^{1/2}][1+(1-\lambda^2)^{1/2}]}{[1+\lambda\frac{p_1}{1-p_1}^{1/2} + (1-\lambda^2)^{1/2}][1-(1-\lambda^2)^{1/2}]} \tag{79}$$

On a bien

$$p_1 = 0 \quad , \quad t = 0 \tag{80}$$

La transition se termine à l'instant t_1 avec

$$p_1 = 1 \quad , \quad t = t_1$$

$$\lambda > 1 \quad , \quad t_1 = \frac{\theta_0}{\pi}[\frac{\mathrm{arctg}(\lambda^2 - 1)^{1/2}}{(\lambda^2 - 1)^{1/2}}] \tag{81}$$

$$\lambda < 1 \quad , \quad t_1 = \frac{\theta_0}{2\pi(1 - \lambda^2)^{1/2}} \log[\frac{1 + (1 - \lambda^2)^{1/2}}{1 - (1 - \lambda^2)^{1/2}}] \tag{82}$$

Le cas $\lambda = 1$ conduit à un résultat simple

$$\lambda = 1 \quad , \quad t_1 = \frac{\theta_0}{\pi} \tag{83}$$

$$a = \pi(\omega\theta_0)^{-1} \tag{84}$$

Le terme extérieur en $a\hbar\omega H_c\psi$ permet une description concrète de la transition. On ne sait pas bien sûr son origine. Aussi nous allons risquer une hypothèse étrange.

6. Origine du terme extérieur

Le système Schrödinger-Maxwell ne met en jeu que la force électromagnétique et l'origine du terme extérieur reste à découvrir. Puisque les forces usuelles ne peuvent être mises en jeu nous osons évoquer l'hypothèse de l'existence d'un milieu sub-quantique (Bohm, de Broglie). Bien que cette hypothèse soit très controversée nous allons tenter d'attribuer au milieu sub-quantique des propriétés qui permettent d'obtenir l'expression du terme extérieur.

Nous allons supposer que le moment dipolaire d'amplitude d et de pulsation ω agit sur le milieu sub-quantique en créant un champ électrique non pas réel mais imaginaire pur donc non mesurable. Nous le désignons par ϵ_s et nous supposons qu'il est de la forme :

$$\overrightarrow{\epsilon_s} = i \int \overrightarrow{\epsilon_F}(\omega') \sin \omega' t \rho(\omega') d\omega' \tag{85}$$

$\rho(\omega')$ désignant une densité de pulsation normée à l'unité. Ce champ agit sur l'électron et il en résulte un terme imaginaire pur dans l'équation de Schrödinger. Nous le désignons par iV_s avec

$$V_s = -ie\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\epsilon_s} \tag{86}$$

Le terme introduit dans l'équation de Schrödinger l'irréversibilité caractéristique d'une transition radiative.

Désignons par H_A l'opérateur

$$H_A = \frac{1}{2m}[-i\hbar\overrightarrow{\nabla} + e\overrightarrow{A}]^2 \tag{87}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [H_A + iV_s]\psi \tag{88}$$

Multiplions les deux membres par $-i/\hbar c_1^+\psi_1 e^{-i\omega_1 t}d^3x$ et intégrons. Nous avons déjà déterminé les expressions provenant du terme de gauche et du premier terme de droite de (88). Il reste à déterminer l'expression relative au dernier terme. Nous la désignons par W avec

$$W = \frac{ic_1^+}{2\hbar}\int\int[e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}][-e\overrightarrow{x}\cdot\epsilon_F(\omega')][c_1\psi_1 + c_2e^{-i\omega t}\psi_2]\psi_1\rho d\omega' d^3x \tag{89}$$

Puisque

$$\int\overrightarrow{x}\psi_1^2 d^3x = \int\overrightarrow{x}\psi_2^2 d^3x = 0 \quad , \quad \int -e\overrightarrow{x}\psi_1\psi_2 d^3x = \overrightarrow{d} \tag{90}$$

Il vient

$$W = \frac{ic_1^+c_2}{2\hbar}\overrightarrow{d}\cdot[\int\overrightarrow{\epsilon_F}(\omega')(e^{i(\omega'-\omega)t} - e^{-i(\omega'+\omega)t})]\rho d\omega' \tag{91}$$

Nous supposons que la densité de pulsation $\rho(\omega')$ présente un maximum aigu en ω. Nous l'assimilons à une distribution de Dirac $\delta(\omega' - \omega)$ d'où

$$W = \frac{ic_1^+}{2\hbar}[1 - e^{-2i\omega t}]\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{\epsilon_F}(\omega) \tag{92}$$

Prenons la moyenne sur une période du terme entre crochet. Il vient :

$$W = \frac{ic_1^+c_2}{2\hbar}\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{\epsilon_F}(\omega)$$

Pour évaluer $\overrightarrow{\epsilon_F}(\omega)$ nous admettons que le champ électrique usuel produit par le dipôle oscillant est le champ $\overrightarrow{\epsilon_F}$ réel. C'est le milieu sub-quantique qui le transforme en champ imaginaire pur $\overrightarrow{\epsilon_s}$.

Dans le plan des vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{x}$ désignons par $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{x}$. On a, si θ est l'angle de $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{x}$

$$\overrightarrow{\epsilon_F}(\omega) = \frac{d\omega^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 ls}\overrightarrow{u} \tag{93}$$

ls désignant une longueur caractéristique du milieu sub-quantique dont nous ne connaissons que peu de chose. Puisque nous avons admis qu'il propage le champ électromagnétique nous prendrons pour ls la longueur d'onde $2\pi c/\omega$.

On a

$$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{\epsilon_F}(\omega) = \frac{d^2\omega^3 \sin^2\theta}{8\pi^2 c^3 \epsilon_0} \tag{94}$$

d'où en prenant la valeur moyenne sur θ

$$W = ic_1^+ c_2 \frac{d^2\omega^3}{24\pi^2 c^3 \epsilon_0 \hbar} \tag{95}$$

puisque

$$\alpha = \frac{\omega^3 d}{3\pi\epsilon_0 c^3 \hbar} = \frac{4\pi}{\theta_0} \tag{96}$$

il vient en désignant par W_A l'expression issue de H_A.

$$c_1^+ \frac{dc_1}{dt} = W_A + \frac{ic_1^+ c_2}{2\theta_0} \tag{97}$$

Prenons la quantité conjuguée et additionnons. Il vient :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{4\pi}{\theta_0} p_1(1-p_1) + \frac{i}{2\theta_0}(c_1^+ c_2 - c_1 c_2^+) \tag{98}$$

Il est loisible de choisir c_1 réel et c_2 imaginaire pur :

$$c_1 = c_1^+ = p_1^{1/2} \tag{99}$$

$$c_2 - ic_2' \quad , \quad c_2' = {c_2'}^+ = (p_2)^{1/2} \tag{99}$$

d'où l'équation

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{1}{\theta_0}[4\pi p_1(1-p_1) + p_1^{1/2}(1-p_1)^{1/2}] \tag{100}$$

On retrouve l'équation (70) en posant

$$\alpha = \frac{4\pi}{\theta_0} \quad , \quad 2a\omega = \frac{1}{\theta_0} \tag{101}$$

La quantité sans dimensions λ est

$$\lambda = \frac{a\omega\theta_0}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \tag{102}$$

L'évolution de p_1 se fait selon la loi

$$\begin{aligned} t =& \frac{\theta_0}{2\pi}(1 - \frac{1}{4\pi^2})^{-1/2} \\ & \log \frac{[1 + \frac{1}{2\pi}(\frac{p_1}{1-p_1})^{1/2} - (1 - \frac{1}{4\pi^2})^{1/2}][1 + (1 - \frac{1}{4\pi^2}{}^{1/2}]}{[1 + \frac{1}{2\pi}(\frac{p_1}{1-p_1})^{1/2} + (1 - \frac{1}{4\pi^2})^{1/2}][1 - (1 - \frac{1}{4\pi^2}{}^{1/2}]} \end{aligned} \tag{103}$$

La transition se termine à l'instant t_1 avec

$$t_1 = \theta_0(4\pi^2 - 1)^{-1/2} \log[\frac{2\pi + (4\pi^2 - 1)^{1/2}}{2\pi - (4\pi^2 - 1)^{1/2}}] = 0,814\theta_0 \tag{104}$$

7. Conclusion

La superposition d'un terme extérieur à celui de Crisp et Jaynes permet la description de la transition quantique.

On explique ce terme extérieur en attribuant à un milieu subquantique les bonnes propriétés mais une hypothèse heuristique semble étrange.

Annexe 1

Si on accepte l'hypothèse d'un champ imaginaire pur $i\overrightarrow{\epsilon_F}\sin\omega t$ et si on suppose que le milieu subquantique est fait de particules de masse au repos m_s et de charge q_s uniquement sensibles à un champ imaginaire pur l'équation du mouvement est :

$$\frac{d}{dt}[m_s(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}\overrightarrow{v}] = iq_s\overrightarrow{\epsilon_F}\sin\omega t$$

la vitesse v est tenue d'être supérieure à c d'où l'interrogation. Le milieu subquantique ne peut-il propager que des signaux supra-lumineux ?

Références

[1] M. Crisp, E. Jaynes, Phys. Rev. 179-1253 (1969).
[2] A. Barut, J. Kraus, Found. Phys. 13-189 (1983).
[3] A. Barut, J. Van Huele, Phys. Rev. A 32-3187 (1985).
[4] A.O. Barut, J.R. Dowling, Phys. Rev. 41-5 (1990).
[5] R. Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 14 n°2-119 (1989).
[6] R. Blaive, R. Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 14 n°2-147 (1989).
[7] R. Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 16 n° 2-257 (1991).
[8] J. Salmon, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 15 n°3-359 (1990).

(Manuscrit reçu le 16 décembre 1991, révisé le 24 décembre 1992)