Sur le principe d'équivalence et le problème de l'énergie

N. Stavroulakis

Dodecanissou 50
152 35 Vrilissia, Grèce

RESUME. L'équivalence présumée des référentiels locaux qui se déduisent d'un ouvert donné de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ au moyen de difféomorphismes, et le principe d'équivalence suivant lequel, si cet ouvert est suffisamment petit, on peut lui associer un référentiel équivalent dans lequel la gravitation est éliminée, font penser que l'énergie gravitationnelle est insaisissable dans le cadre de la Relativité Générale. Le présent article se propose de montrer que l'équivalence postulée n'est pas une équivalence physique et que l'élimination locale de la gravitation est invérifiable dans cette théorie. Il en résulte que les problèmes relatifs à l'énergie gravitationnelle en général et à l'énergie des particules test en particulier sont susceptibles d'être abordés dans le cadre de la Relativité Générale.

ABSTRACT. The postulated equivalence of the reference frames resulting from an open set of $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ by means of diffeomorphisms, and the equivalence principle which states that, if this open set is sufficiently small, we can find an equivalent to it reference frame in which there is no gravitational field, give rise to the idea that gravitational energy is indefinable in General Relativity. The present paper aims at showing that the equivalence in question is not a physical one and that the local elimination of gravitation is not verifiable in this theory. It follows that the problems related to the gravitational energy in general and the gravitational energy of test particles in particular are likely to be treated in the frame of General Relativity.

1. INTRODUCTION

La Relativité Restreinte a révolutionné nos idées sur l'énergie et l'impulsion d'un point matériel en y faisant intervenir la vitesse de la lumière. En effet, dans l'espace-temps de Minkowski en présence de champ électromagnétique défini par le potentiel (A_0, A_1, A_2, A_3), l'énergie et l'impulsion d'une particule de masse m_1 et de charge e_1 sont données respectivement par les formules :

$$p_0 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e_1 A_0$$

et

$$\vec{p} = \frac{m_1 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e_1}{c}\vec{A},$$

$\vec{A}$ étant le vecteur (A_1, A_2, A_3). Compte tenu de la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

on peut écrire :

$$p_0 = m_1 c \sum_{i=0}^{3} g_{oi} \frac{dx^i}{ds} + e_1 A_0$$

et expliciter aussi $\vec{p}$ par ses composantes sous la forme :

$$p_j = -m_1 c \sum_{i=0}^{3} g_{ji} \frac{dx^i}{ds} + \frac{e_1}{c} A_j \quad , \quad (j = 1, 2, 3),$$

ce qui définit le quadrivecteur d'impulsion-énergie (p_0, p_1, p_2, p_3). Ces écritures sont valables par rapport à la métrique spatio-temporelle générale :

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

pourvu que celle-ci permette de distinguer la coordonnée temporelle x^0 des coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3, c'est-à-dire pourvu que $g_{oo} > 0$ et $g_{jj} \leq 0$, $(j = 1, 2, 3)$. Cela nous fait passer dans le domaine de la Relativité Générale. Cette théorie n'est pas compatible avec la notion de point matériel, mais dans certaines conditions on admet qu'une particule étendue en mouvement peut être caractérisée avec une approximation suffisante par sa masse et sa charge, ce qui conduit à accepter *la notion* *de particule test.* Alors on retrouve les expressions précédentes en introduisant l'action pour la particule test :

$$S = \int_{\widehat{ab}} -m_1 c ds + \frac{e_1}{c} \sum_{i=0}^{3} B_i dx^i$$

$$(B_0 = -cA_0 \quad , \quad B_j = A_j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3)$$

et en prenant ensuite la variation de S sur une trajectoire réelle avec a fixe et $x = b$ variable, ce qui donne :

$$\delta S = -m_1 c \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j + \frac{e_1}{c} \sum_{j=0}^{3} B_j \delta x^j |_a^x$$

d'où les composantes du quadrivecteur d'impulsion-énergie :

$$p_0 = -\frac{\delta S}{\delta x^0} = m_1 c \sum_{i=0}^{3} g_{oi} \frac{dx^i}{ds} + e_1 A_0$$

$$p_j = \frac{\delta S}{\delta x^j} = -m_1 c \sum_{i=0}^{3} g_{ji} \frac{dx^i}{ds} + \frac{e_1}{c} A_j \quad , \quad (j = 1, 2, 3)$$

L. Landau et E. Lifchitz [4] introduisent ce quadrivecteur dans le cas de gravitation pure sans chercher à en tirer des conséquences, se contentant uniquement de remarquer que l'énergie p_0 d'une particule test reste constante dans un champ stationnaire avec un choix fixe du “temps universel”. Les autres auteurs évitent systématiquement de parler de l'énergie des particules. Ainsi en prenant le contre-pied de la Mécanique Quantique qui attribue aux particules des niveaux d'énergie déterminés mais non pas des trajectoires, les relativistes présentent les particules test sans énergie tout en leur attribuant des trajectoires déterminées. Mais il y a plus. Le formalisme actuel de la Relativité Générale se trouve en rupture avec les autres parties de la Physique sur tout qui concerne le concept d'énergie. D'après une opinion très répandue, l'énergie gravitationnelle en général et celle de particule test en particulier est insaisissable dans le cadre de cette théorie à cause du principe d'équivalence qui entraîne la disparition de la gravitation dans les référentiels locaux en chute libre (ou référentiels localement inertiels) dans un champ gravitationnel. L'idée que l'on peut se baser sur l'élimination locale de la gravitation remonte à l'approche heuristique d'Einstein [2] : "In the immediate neighbourhood of an observer, falling freely in a gravitational field, there exists no gravitational field. We can therefore always regard an infinitesimally small region of the space-time continuum as Galilean ... Space-time regions of finite extent are, in general, not Galilean, so that a gravitational field cannot be done away with by any choice of co-ordinates in finite region".

D'après l'interprétation standard de la Relativité Générale, un référentiel local est l'image d'un ouvert quelconque de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ par un difféomorphisme local, de sorte qu'un changement de référentiel local est un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Les relativistes pensent que tous les référentiels locaux qui se déduisent ainsi d'un ouvert donné de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ sont équivalents physiquement en vertu de l'invariance des équations d'Einstein. Ce point de vue est contestable. Comme l'a fait ressortir L. Brillouin [1], les référentiels locaux formés par des lignes coordonnées mathématiques sans aucun support matériel sont inconcevables en tant que systèmes physiques. En ce qui concerne l'invariance de la forme des équations d'Einstein par les difféomorphismes locaux, il s'agit d'une propriété purement algébrique qui n'entraîne pas l'équivalence physique de leurs solutions dans les divers systèmes de coordonnées. Cependant en se basant sur cette propriété formelle on s'est livré dans des extrapolations plus ou moins arbitraires en confondant les coordonnées avec les fonctions inconnues à déterminer et en acceptant des transformations locales irréalisables. Or chaque problème concret en Relativité Générale est assujetti à des conditions initiales et à des conditions aux limites formulées par rapport à un référentiel étendu associé aux distributions de masses entrant en considération. L'introduction a posteriori de difféomorphismes locaux n'est pas autorisée, car elle transgresse en général les données de départ.

D'après ce qui vient d'être dit, on ne saurait se fonder sur une prétendue équivalence de tous les référentiels locaux pour introduire les référentiels localement inertiels. D'autre part, suivant l'approche heuristique d'Einstein, même si l'on accepte tout référentiel local et tout changement local de coordonnées, on n'est pas en mesure de vérifier le principe d'équivalence. En effet, celui-ci est conçu par rapport à "une région infiniment petite", ce qui se traduit mathématiquement par le passage à l'espace tangent à un point de la variété considérée. La notion de région en tant qu'ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, donc en tant que référentiel local disparaît complètement. Cependant le principe d'équivalence a joué et continue de jouer un rôle essentiel dans la formulation de la Relativité Générale. En outre on pense toujours, comme nous l'avons déjà souligné, qu'il est la cause principale des difficultés relatives au concept d'énergie. C'est pourquoi nous allons aborder les problèmes soulevés par le principe d'équivalence.

2. CRITIQUE DU PRINCIPE D'EQUIVALENCE

Suivant le point de vue d'Einstein, la gravitation et l'inertie sont équivalentes localement, mais si on cherche à préciser le contenu de cette équivalence, on se heurte à de sérieuses difficultés. La première question qui se pose à ce propos est de savoir quelle est la théorie concernée par le principe d'équivalence. Il s'agit d'une question tout à fait pertinente, car celui-ci se rattache tantôt à la Mécanique Classique, tantôt à la Relativité Générale, tantôt à ces deux théories à la fois. Pour sortir de la confusion qui en résulte, il est indispensable d'éviter le mélange de conceptions fondamentalement différentes, à savoir celles de la Mécanique Classique et de la Relativité Générale, et de regarder de plus près la situation dans chacune de ces deux théories séparément.

Le principe d'équivalence est fondé sur l'égalité entre masse inerte et masse gravitationnelle, c'est-à-dire sur une propriété conçue entièrement dans le cadre de la Mécanique Classique, et vérifiée ensuite expérimentalement avec une approximation de l'ordre de 10^{-11}. Cela entraîne, toujours d'après la Mécanique Classique, que les forces d'inertie neutralisent les forces de gravitation dans un référentiel local effectuant une chute libre dans un champ gravitationnel *uniforme*. Cette remarque est le point de départ de l'approche heuristique d'Einstein, mais on ne saurait trop insister sur son contenu physique. Déjà, même avec cette hypothèse extrêmement simplificatrice d'un champ uniforme, on ne peut pas envisager l'élimination complète des effets gravitationnels. Comme le remarque V. Fock [3], le référentiel s'identifie à un objet matériel qui subit des déformations à cause de l'accélération gravitationnelle et c'est pourquoi les effets gravitationnels ne disparaissent qu'approximativement dans la mesure où ces déformations sont négligeables pour les observateurs concernés. D'autre part un champ gravitationnel, bien que faible, existe toujours dans le référentiel. C'est le champ engendré par l'objet matériel en question. Mais ce qui est surtout significatif c'est que les champs uniformes ne représentent pas la réalité objective, de sorte que le caractère approximatif de l'équivalence entre inertie et gravitation devient encore plus frappant dans les situations réalistes : On doit prendre en considération des référentiels locaux de dimensions spatio-temporelles de plus en plus réduites sans pour autant pouvoir aboutir à la réalisation d'un système localement inertiel au sens strict. En fait quand on parle de "chute libre", on se rapporte essentiellement au mouvement d'un point matériel. Un objet étendu est susceptible d'effectuer une infinité de rotations autour de son centre de masse dans le référentiel global considéré, ce qui rend la notion de chute libre très imprécise.

Cela dit, la Mécanique Classique ne nous autorise pas à ériger en principe une équivalence qui n'est qu'approximative et très localisée. Mais il y a plus. Bien que les référentiels locaux en chute libre, supposés presque inertiels, soient conçus dans le cadre de la gravitation newtonienne, celle-ci les ignore complètement. En fait cette théorie étudie les interactions gravitationnelles et les mouvements par rapport à des référentiels étendus choisis de façon appropriée suivant le problème abordé. D'ailleurs il n'y en a pas d'autre approche possible à cause du caractère universel de la gravitation. L'introduction de référentiels locaux présuppose déjà la donnée d'un référentiel global. D'autre part les observateurs dans un référentiel local en chute libre ne nous apprennent rien de significatif concernant le champ gravitationnel, à moins qu'ils n'élargissent le domaine de leur investigation, c'est-à-dire à moins qu'ils ne prolongent leur référentiel local en un référentiel étendu. Leur constatation standard, à savoir que le champ est presque nul dans leur voisinage immédiat, est une pure trivialité.

En restant toujours dans le cadre de la gravitation newtonienne, examinons de plus près l'affirmation suivant laquelle, étant donné un point matériel P en mouvement libre dans un champ gravitationnel, défini par rapport à un référentiel étendu R, on peut introduire un référentiel local en chute libre, noté V, tel que P soit au repos dans V, donc tel que, en particulier, l'énergie gravitationnelle (potentielle) de P soit nulle dans V. Bien entendu, à part les cas rares où l'on peut envisager une telle réalisation moyennant des engins spatiaux, il s'agit d'une expérience de pensée qui ne modifie donc en rien la situation réelle, à savoir les phénomènes tels qu'on les observe dans R, et qui n'a en conséquence aucune valeur physique. Or supposons que, exceptionnellement, V soit réalisé par un vaisseau spatial mis sur orbite de façon appropriée. Alors la situation se trouve modifiée radicalement par l'introduction de nouvelles données : Au départ nous avions à considérer le mouvement de P

dans R. Maintenant nous avons à considérer le mouvement de V dans R et la localisation de P dans V. Dans ce contexte celle-ci devient un épiphénomène, le phénomène principal étant le mouvement de V dans R. En particulier le fait que l'énergie gravitationnelle de P est nulle (ou presque) par rapport à V est tout à fait secondaire devant le fait que V acquiert de l'énergie gravitationnelle en se déplaçant dans R. Le principe d'équivalence établit une fausse analogie entre le mouvement de P par rapport à R et le mouvement de P par rapport à V. On ne saurait substituer le référentiel local au référentiel global.

En conclusion, tant que l'on reste dans le domaine de la gravitation newtonienne, le principe d'équivalence (que l'on pourrait alors identifier au soi-disant principe faible d'équivalence) ne peut pas être considéré comme un vrai principe. Il n'est vérifié qu'approximativement et de plus sa vérification approximative ne se réalise pas dans le cadre d'un problème bien posé : Elle nécessite d'abord la prise en considération de points matériels en mouvement dans un champ gravitationnel conçu par rapport à un référentiel étendu, et ensuite l'introduction de référentiels locaux matériels qui modifient les conditions de départ.

Cela dit, considérant maintenant la situation en Relativité Générale, on voit que les divers énoncés proposés du principe d'équivalence ne sont ni concordants ni clairs. D'après N. Rosen [5] : "In general relativity theory, the equivalence principle asserts that a uniform gravitational field and a suitable constant acceleration of the frame of reference are indistinguishable". Cet énoncé reproduit l'exemple d'Einstein qui est du ressort exclusif de la Mécanique Classique. Dans la plupart des autres exposés consacrés au principe d'équivalence, on commence aussi par des faits constatés en Mécanique newtonienne, puis "on oublie" les notions classiques qui n'ont pas de sens en Relativité Générale, comme la notion de force, pour retenir uniquement l'idée qu'il existe des référentiels localement inertiels. Ensuite on transforme cette idée en postulat sans pour autant pouvoir lui associer une forme mathématique adéquate. Considérons, par exemple, la formulation de Weinberg [6] : "Although inertial forces do not exactly cancel gravitational forces for freely falling systems in an inhomogeneous or time-dependent gravitational field, we can still expect an approximate cancellation if we restrict our attention to such a small region of space and time that the field changes very little over the region. Therefore we formulate the equivalence principle as the statement that at every space-time point in an arbitrary gravitational field it is possible to choose a "locally inertial coordinate system" such that, within a sufficiently small region of the point in question, the laws of nature take the same form as in unaccelerated Cartesian coordinate systems in the absence of gravitation... By this we mean the form given to the laws of nature by special relativity... When we erect a locally inertial coordinate system $\xi^\alpha(x)$, we do so at a specific point X, and the coordinates that are locally inertial at X should be so labeled, as $\xi^\alpha_X(x)$... We shall interpret the Principle of Equivalence as meaning that the locally inertial coordinates ξ^α_X that we construct at a given point X can be chosen so that the first derivatives of the metric tensor vanish at X".

Il est plus clair de définir directement les coordonnées localement inertielles (locally inertial coordinates) par la propriété indiquée. Il s'agit en fait des soi-disant coordonnées localement géodésiques de la Géométrie différentielle dans le cas particulier d'une métrique spatio-temporelle. Soient :

$$ds^2 = \sum h_{ij}(y)dy^i dy^j \tag{2.1}$$

une métrique spatio-temporelle définie sur un ouvert $W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, $b \in W$ et $a \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. Alors il existe un difféomorphisme local φ, entre un voisinage ouvert $U \subset W$ de b et un voisinage ouvert de a, tel que $\varphi(b) = a$ et que la transformée de (2.1) par φ,

$$ds^2 = \sum g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{2.2}$$

satisfasse aux conditions :

$$\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}|_{x=a} = 0$$

ou, ce qui revient au même :

$$\Gamma^i_{jk}(a) = 0 \tag{2.3}$$

Le système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) ainsi introduit s'appelle localement géodésique au point a par rapport à la métrique (2.2).

Est-ce qu'il y a un rapport entre les coordonnées localement géodésiques et le principe d'équivalence ? Oui, répondent les relativistes en se basant sur les équations de mouvement d'une particule test.

A toute particule en mouvement on associe son quadrivecteur-vitesse et son quadrivecteur-accélération, celui-ci étant la dérivée covariante de celui-là :

$$\frac{D}{ds}(\frac{dx^i}{ds}) = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \sum \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

et lorsqu'il s'agit d'une particule test dans un champ gravitationnel en absence de champ électromagnétique, ses équations de mouvement s'obtiennent en annulant son quadrivecteur-accélération.

Cela dit, voici maintenant, d'après L. Landau et E. Lifchitz [4], la signification physique attribuée aux conditions (2.3).

"Les dérivées d^2x^i/ds^2 définissent la 4-accélération de la particule. Il en résulte que les quantités $-m\sum\Gamma^i_{kl}(dx^k/ds)(dx^l/ds)$ définissent ce qu'on peut appeler la "4-force" agissant sur la particule dans le champ de gravitation... On peut toujours annuler tous les Γ^i_{kl} en tout point donné de l'espace-temps. Nous voyons maintenant que le choix d'un tel système de référence localement inertiel signifie l'exclusion du champ de gravitation dans un volume infiniment petit de l'espace-temps donné, et la possibilité d'un tel choix est l'expression mathématique du principe d'équivalence dans la théorie relativiste de la gravitation".

Ces assertions appellent quelques remarques :

a) Acceptons provisoirement la définition de la "4-force" et supposons que la ligne d'univers d'une particule test contienne le point a. Alors la 4-force exercée sur celle-ci s'annule uniquement au point a. Dire que le champ de gravitation est éliminé dans un volume infiniment petit est donc une affirmation gratuite. Or, déjà en gravitation newtonienne, personne ne pourrait penser que l'annulation de la force gravitationnelle en un point isolé, ce qui est d'ailleurs possible dans certains cas, signifie l'élimination du champ gravitationnel.

b) Les dérivées d^2x^i/ds^2 ne définissent pas un vecteur, et c'est pourquoi la définition proposée de la 4-accélération est dépourvue de sens. Par conséquent la définition de la 4-force est aussi sans fondement. Qu'est-ce qu'on entend alors par élimination de la gravitation au point a ?

c) L'introduction de la notion de particule test dans ce genre de raisonnements est contestable. La particule test représente une particule étendue dont le champ propre et les dimensions sont négligeables à l'échelle des phénomènes étudiés. Or quand il s'agit du principe d'équivalence, qui concerne un référentiel très localisé sur un voisinage de la particule, il ne semble pas possible d'accepter de telles simplifications.

d) Nous avons vu tout à l'heure que, en Mécanique newtonienne, étant donné un point matériel P en mouvement libre dans un champ gravitationnel, la réalisation approximative d'un référentiel local en chute libre dans lequel P est au repos, nécessite l'introduction d'un système matériel suffisamment rigide. On devrait s'attendre à une situation analogue dans le cas actuel. Or personne n'a jamais réussi à définir les référentiels matériels en chute libre dans le cadre de la Relativité Générale. D'ailleurs, même si leur réalisation s'avérait possible, leur introduction dans chaque situation étudiée donnerait lieu à un problème différent de celui de départ.

En définitive le principe d'équivalence, sous sa forme appelée parfois faible, c'est-à-dire en tant qu'expression d'une élimination locale du champ gravitationnel, est vide de sens dans le formalisme actuel de la Relativité Générale. Il en est de même du principe fort d'équivalence, car celui-ci contient comme cas particulier le principe faible.

La confusion occasionnée par le principe d'équivalence en Relativité Générale va de pair avec l'embrouillement provoqué par les interminables changements de coordonnées locales qui se font toujours au nom d'une prétendue équivalence de tous les référentiels locaux. Or, comme nous l'avons déjà souligné, dans chaque situation concrète, on a affaire à un champ gravitationnel conçu par rapport à un référentiel étendu moyennant des conditions initiales et des conditions aux limites données. Dans ce contexte on pourra en principe aborder tous les problèmes relatifs à l'énergie gravitationnelle. Toutefois la définition de la densité d'énergie gravitationnelle se heurte à des difficultés dont la nature n'est pas encore bien précisée. Par contre le mouvement et l'impulsion-énergie d'une particule test, dans les limites où celle-ci est acceptée, acquièrent une signification claire et sont susceptibles de nous faire progresser dans le sens des idées issues de la Relativité Restreinte.

Références

[1] L. Brillouin, *Relativity Reexamined*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1970.

[2] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Methuen and Co. LTD London, Fifth Edition, revised, 1951.

[3] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, London, 1959.

[4] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Editions Mir, Moscou, 1970.

[5] N. Rosen, *General Relativity with a Background Metric*, Foundations of physics, vol. 10, Nos 9/10, 1989, pp. 673-704.

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York, 1972.

(Manuscrit reçu le 3 juin 1992)