

## Sur une interprétation des propriétés de la polarisation des ondes évanescentes

R. DUTHEIL

Fondation Louis de Broglie, 23, quai de Conti, 75006 Paris

**RÉSUMÉ.** On écrit l'équation de Dirac d'un photon évanescent se propageant à l'interface vide diélectrique. Cette équation est exprimée dans le système de coordonnées du cône de lumière par rapport au référentiel IMF lié au diélectrique. Nous en déduisons les résultats ayant trait à la polarisation elliptique très particulière de l'onde évanescente avec les positions spécifiques du champ magnétique de l'onde électrique transverse (T.E.) et le champ électrique de l'onde magnétique transverse (T.M.), en analysant les solutions de l'équation spinorielle précédente. La formule donnant la polarisation elliptique diffère des formules classiques par la présence d'un coefficient  $K$  expliquant la discordance observée entre les formules classiques et les résultats expérimentaux.

**ABSTRACT.** We write Dirac's equation representing formally the propagation of an evanescent photon on the dielectric-vacuum interface, with respect to the IMF referential frame of the dielectric in the system of coordinates of the light cone. We rediscover, starting from that equation the results concerning the very particular elliptical polarization of the evanescent wave with the specific positions of the magnetic field of the transverse electric wave (T.E.) and the electric field of the transverse magnetic wave (T.M.). The formulas defining the elliptical polarization of the evanescent wave are similar to the classical expressions, but they differ from them by the presence of a  $K$  parameter always inferior to one. We show that the presence of this  $K$  coefficient can explain certain discrepancies between the results reached by experimental means and those deduced from classical formulas.

## I. Introduction.

Dans une communication et un article antérieurs [1,2], nous avons établi l'équation de propagation d'une onde évanescence sur l'interface  $(Xz)$  d'un diélectrique, écrite dans le système de coordonnées du cône de lumière. Nous avons obtenu deux expressions de cette équation, l'une par rapport au référentiel IMF associé au vide, soit  $R_{\varepsilon_0}$ , l'autre par rapport au référentiel IMF associé au diélectrique, soit  $R_{\varepsilon}$ . Cette équation peut être considérée comme une généralisation formelle de l'équation du premier ordre ou équation de Dirac d'une particule de référentiel propre IMF que nous avons identifiée à un photon [3].

Pour le domaine de valeurs des vitesses de groupe  $\beta'_g$  tel

$$n^2\alpha > \beta'_g > n \quad (1)$$

la propagation du photon évanescence s'effectue sur la face  $(\varepsilon_0)$  de l'interface  $(Xz)$  du diélectrique et dans le domaine de valeurs (1), la direction de la vitesse de groupe

$$\beta'_g$$

et celle de la vitesse de phase

$$\beta'_\varphi$$

vitesses exprimées par rapport au référentiel du diélectrique  $R_{\varepsilon}(\tau, \zeta)$  qui est le référentiel de mesure lié à l'observateur, soit en coordonnées habituelles  $R_{\varepsilon}(X, T)$ , la direction de la vitesse de groupe

$$\beta'_g$$

et celle de la vitesse de phase coïncident avec la direction de l'axe  $(X)$ [1].

Dans le deuxième domaine de valeurs de  $\beta'_g$  défini par

$$n > \beta'_g > n\alpha \quad (2)$$

il y a dissociation de la direction de la vitesse de groupe et de la direction de la vitesse de phase, la direction de

$$\beta'_\varphi$$

restant celle de l'axe  $(X)$ , alors que la direction de

$$\beta'_g$$

devient  $(X_1)$ ,  $X_1$  étant situé dans le plan

$$(Xz)$$

en faisant avec la direction de l'axe  $(z)$  l'angle  $i$ , tel que

$$\alpha = \sin i \quad (3)$$

En outre pour le domaine des valeurs de  $\beta'_g$  défini par (2) la propagation s'effectue sur la face  $(\varepsilon)$  de l'interface  $(Xz)$  du diélectrique.

Dans les deux domaines de valeurs de  $\beta'_g$  et compte tenu des directions de propagation différentes  $(X)$  ou  $(X_1)$ , par rapport au référentiel du diélectrique

$$R_\varepsilon(\tau, \zeta)$$

l'équation de propagation de l'onde évanescence s'écrit

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = \frac{i\Lambda c'}{\hbar} \tilde{\Psi} \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (4)$$

$$\Gamma_\mu = 2\gamma_\mu \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (5)$$

$$\gamma_0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$c' = \frac{c}{n} \quad (7)$$

$$\Lambda = m \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (8)$$

L'équation (4) doit être considérée comme formelle : en effet il existe une disposition très particulière du cône de lumière du vide et du cône de lumière du diélectrique : il résulte de cette configuration une partie commune aux deux cônes qui peut être analysée soit par rapport au référentiel du diélectrique

$$R_\varepsilon$$

qui est le référentiel lié à l'observateur lors de la mesure de la vitesse de groupe

$$\beta'_g$$

soit par rapport au référentiel du vide

$$R_{\varepsilon_0}$$

où la vitesse du groupe est

$$\beta_g$$

(Figures 1 et 2).  $R_{\varepsilon_0}$  par rapport à qui la vitesse de la lumière est toujours égale à  $c$  est le seul référentiel qui doit être pris en considération pour les vitesses de groupe définitives.

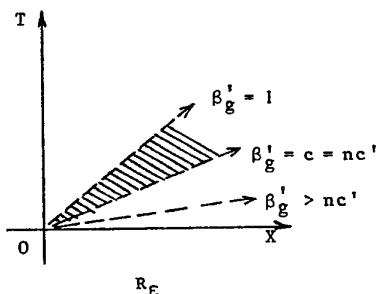


Figure 1.

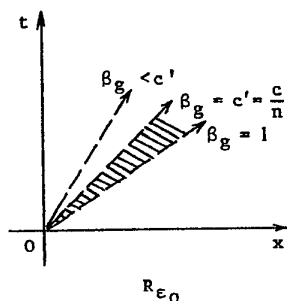


Figure 2.

Par rapport à  $R_\varepsilon$  (Figure 1) dans la partie commune aux deux cônes, les coordonnées  $(X, T)$  sont celles où la "ligne d'univers" du photon évanescent peut se trouver à l'extérieur du cône de la lumière du diélectrique. Dans le domaine de valeurs de  $\beta'_g$  (1), on pourra donc mesurer par rapport à

$$R_\varepsilon$$

des vitesses  $\beta'_g$  telles que

$$\beta'_g > nc' \quad (9)$$

Mais il n'y a aucun paradoxe : le fait que  $R_\varepsilon$  soit le référentiel où s'effectue l'observation est un artifice inhérent au dispositif expérimental de mesure.

En effet par rapport au référentiel du vide

$$R_{\varepsilon_0}$$

(Figure 2) la ligne d'univers du photon évanescent reste toujours à l'intérieur du cône de lumière du vide et la vitesse de groupe

$$\beta_g$$

du photon évanescent par rapport à

$$R_{\varepsilon_0}$$

reste toujours inférieure à  $c$ . Or  $\beta_g$  est du point de vue relativiste la seule vitesse ayant une signification physique.

Remarquons que le paramètre

$$\Lambda$$

figurant dans le second membre de l'équation (4) et dont la valeur est définie par l'expression (8) n'est en aucun cas une masse.  $\Lambda$  est une fonction de  $\beta'_g$  et nous montrerons dans la section III que  $\Lambda$  représente simplement, à un facteur constant près, la fréquence mesurée de l'onde évanescente, qui dépend également de  $\beta'_g$  et de la fréquence du photon incident se propageant à l'intérieur du diélectrique. De même la signification de  $m$  est simple : nous avons obtenu précédemment [2] l'équation du premier ordre du photon dans un référentiel IMF  $(\tau, \zeta)$ , soit

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (10)$$

en recherchant la solution commune à deux équations de Dirac du genre temps et du genre espace d'un fermion de même masse  $m$ . Le résultat est tel que l'impulsion et l'énergie du photon d'équation (10) sont données par les expressions

$$p^0 = \frac{h\nu}{c} = mc \quad , \quad p^1 = \frac{h\nu}{c} = mc \quad (11)$$

Nous avons insisté un peu longuement, dans cette introduction, sur ces problèmes, afin qu'il ne reste aucune équivoque dans l'esprit du lecteur en ce qui concerne la signification physique des équations que nous utilisons.

Dans cet article nous nous proposons de retrouver uniquement à partir de l'équation (4) les résultats classiques concernant la polarisation de l'onde évanescente : on sait en effet qu'il existe une polarisation elliptique très particulière de l'onde évanescente, telle que le champ magnétique de l'onde transverse électrique (T.E.) est situé dans le plan

$$(Xy)$$

et que l'extrémité du vecteur représentant ce champ magnétique décrit une ellipse situé dans ce plan et que de même pour l'onde transverse magnétique (T.M.), l'extrémité du vecteur représentant son champ électrique décrit une ellipse également située dans ce plan, et donc que ce ne sont pas de véritables ondes transverses, puisque ces champs ne sont pas normaux à la direction de propagation.

Dans la section II nous recherchons les solutions de l'équation (4) et nous les exprimons en fonction de la fréquence de l'onde évanescente par rapport à  $R_\varepsilon$ .

Dans la section III, à partir de ces solutions nous retrouvons les formules définissant la polarisation elliptique de l'onde évanescente : les expressions ainsi déduites des solutions de l'équation (4) sont analogues aux expressions classiques. Cependant elles en diffèrent par la présence d'un paramètre

$$K$$

toujours inférieur à un et fonction de la vitesse de groupe  $\beta'_g$ .

Dans la section IV, nous montrons que la présence de ce coefficient  $K$  peut expliquer certaines discordances existant entre les résultants obtenus par voie expérimentales concernant la polarisation de l'onde évanescente et ceux obtenus par un calcul basé sur les formules classiques.

Dans l'interprétation des solutions de l'équation de Dirac d'un photon dans le système des coordonnées du cône de lumière  $(\tau, \zeta)$  par rapport à un référentiel IMF [3]

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (12)$$

nous avons identifié les solutions

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

de cette équation spinorielle aux composantes du tenseur champ électromagnétique. Comme nous utilisons cette identification dans la section III, nous en avons donné en annexe une justification exhaustive sur le plan mathématique : pour obtenir ce résultat nous utilisons l'algèbre des formes extérieures et la généralisation faite par A. Lichnerowicz de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer, c'est-à-dire la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1, basée sur la correspondance existant entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2 [4].

## II. Solutions de l'équation de l'onde évanescence.

L'équation de l'onde évanescence s'écrit

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} = \frac{i\Lambda c'}{\hbar} \tilde{\Psi} \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (14)$$

les expressions de  $\Gamma_\mu$  et  $\Lambda$  étant données respectivement par (5), (6) et (8) et où

$$c' = \frac{c}{n} \quad (15)$$

Une solution

$$\tilde{\Psi}$$

de l'équation spinorielle (14) telle que

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

peut s'écrire

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{c'} e^{\frac{i\Lambda c'}{2\sqrt{2}\hbar}(c'\tau + \zeta)} \quad (17)$$

$$\Psi_1 = e^{\frac{i\Lambda c'}{2\sqrt{2}\hbar}(c'\tau + \zeta)} \quad (18)$$

puisque

$$\Gamma_0 \partial_0 \tilde{\Psi}_0 = \frac{i\Lambda c'}{\hbar} \tilde{\Psi}_0 \quad (19)$$

et

$$\Gamma_1 \partial_1 \tilde{\Psi}_1 = \frac{i\Lambda c'}{\hbar} \tilde{\Psi}_1 \quad (20)$$

ce qui fournit bien

$$[\Gamma_0 \partial_0 + \Gamma_1 \partial_1] \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ \tilde{\Psi}_1 \end{pmatrix} = \frac{i\Lambda c'}{\hbar} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ \tilde{\Psi}_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Remarquons qu'une solution de l'équation du second ordre [1]

$$4\partial_0 \partial_1 \tilde{\Psi} = \frac{\Lambda^2 c'^2}{\hbar^2} \tilde{\Psi} \quad (22)$$

s'écrit

$$\tilde{\Psi} = e^{\frac{i\Lambda c'}{2\hbar}(c'\tau + \zeta)} \quad (23)$$

en posant

$$\partial_0 = \frac{1}{c'} \partial_\tau \quad (24)$$

Revenons à l'équation du premier ordre (14) : elle peut s'écrire

$$[\Gamma_0 \partial_0 + \Gamma_1 \partial_1] \tilde{\Psi} = \frac{i(\frac{\Lambda}{n})}{\hbar} c \tilde{\Psi} \quad (25)$$

Comme dans l'équation (14) nous avons

$$\partial_0 = \partial_\tau \quad ; \quad \partial_1 = \partial_\zeta \quad (26)$$

l'équation (25) admet comme solutions

$$\Psi_0 = \frac{1}{c} e^{\frac{i(\frac{\Lambda c}{n})}{2\sqrt{2}\hbar}(c\tau + \zeta)} \quad (27)$$

$$\Psi_1 = e^{\frac{i(\frac{\Lambda c}{n})}{2\sqrt{2}\hbar}(c\tau + \zeta)} \quad (28)$$

L'équation (14) et l'équation (25) sont identiques, puisque

$$c = c'n \quad (29)$$

Nous utiliserons la forme (25) ayant comme solutions (27) et (28). Cette forme a en effet l'avantage d'exprimer les résultats en faisant apparaître  $c$  au lieu de  $c'$  : classiquement en effet le champ électromagnétique est donné sous forme d'expressions où figure  $c$ .

Dans une communication antérieure [2], nous avons montré que l'on pouvait écrire

$$c\tau = \sqrt{2}[X - cT] \quad (30)$$

$$\zeta = \sqrt{2}[X - cT] \quad (31)$$

$(X, T)$  étant les coordonnées habituelles correspondant aux coordonnées du cône de lumière

$$(\tau, \zeta)$$



dans le référentiel du diélectrique

$$R_\varepsilon$$

Dans ces conditions, en tenant compte de (30) et (31), nous pouvons écrire (27) et (28) sous la forme

$$\Psi_0 = \frac{1}{c} e^{\frac{i(\frac{\Lambda c}{n})}{\hbar} [X - cT]} \quad (32)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = e^{\frac{i(\frac{\Lambda c}{n})}{\hbar} [X - cT]} \quad (33)$$

Il est maintenant possible de donner la signification physique du paramètre

$$\Lambda$$

ainsi que nous l'avons annoncé dans la section I. Nous avons en effet

$$\Lambda = m \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (34)$$

L'expression

$$\left( \frac{\Lambda}{n} \right) c \quad (35)$$

qui figure dans (32) et (33) peut alors s'écrire

$$\left( \frac{\Lambda}{n} \right) c = K m c \quad (36)$$

en posant

$$K = \frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (37)$$

Or ainsi que nous l'avons précisé dans la section I, quand nous avons recherché la solution commune à l'équation du genre temps et à l'équation du genre espace, c'est-à-dire deux équations de Dirac, pour un fermion de masse propre  $m$ , nous avons trouvé que cette solution commune vérifiait l'équation du premier ordre

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (38)$$

et que (38) était l'équation du premier ordre d'un photon [3].

Le résultat est tel, en vertu de la loi d'équivalence que l'énergie et l'impulsion de ce photon quand il se propage dans le vide ou à l'intérieur d'un diélectrique sont données par les expressions

$$p^0 = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c'} = mc \quad (39)$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c'} = mc \quad (40)$$

$$c' = \frac{c}{n} \quad , \quad \nu' = \frac{\nu}{n} \quad (41)$$

En utilisant cette remarque et les relations (36) et (37), les solutions (32) et (33) peuvent s'écrire

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{c} e^{\frac{2\pi i \tilde{\nu}}{c} [X - cT]} = \frac{1}{c} e^{\frac{i\tilde{\omega}}{c} [X - cT]} \quad (42)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = e^{\frac{2\pi i \tilde{\nu}}{c} [X - cT]} = e^{\frac{i\tilde{\omega}}{c} [X - cT]} \quad (43)$$

en posant

$$\tilde{\nu} = K\nu \quad (44)$$

$$\tilde{\omega} = K\omega \quad (45)$$

Comme nous allons le voir dans la section III,  $\tilde{\nu}$  et  $\tilde{\omega}$  représentent respectivement, à un facteur constant près, la fréquence et la pulsation de l'onde évanescence mesurées par l'expérimentateur par rapport au référentiel du diélectrique

$$R_\varepsilon$$

fréquence et pulsation qui vont diminuer de façon continue quand  $\beta'_g$  diminue, comme le montre l'expression (37) donnant la valeur de

$$K$$

en fonction de  $\beta'_g$ .

Ainsi que nous l'avons dit, nous avons tenu à faire figurer la constante  $c$  dans les expressions (42) et (43) des solutions, pour conserver les habitudes d'expression du champ électromagnétique et faciliter la

comparaison avec les formules classiques, mais il est clair que l'on peut exprimer (42) et (43) en y faisant figurer  $c'$ , puisque

$$\frac{\tilde{\nu}}{c} = \frac{\tilde{\nu}'}{c'} \quad (46)$$

Il ne faut pas perdre de vue en effet que toutes les mesures sont effectuées par rapport au référentiel du diélectrique  $R_\varepsilon$  par rapport auquel la vitesse de la lumière est  $c'$ .

### III. Sur la polarisation elliptique déduite des solutions de l'équation de l'onde évanescence.

Précédemment nous avons montré [1,2,3,5] que dans le cas de la propagation d'un photon dans le vide où à l'intérieur d'un diélectrique, on obtenait comme équation de premier ordre pour ce photon

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (47)$$

les valeurs de  $\Gamma_\mu$  étant données par les expressions (5) et (6) de la section I et nous avons identifié les solutions  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  dans

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

de l'équation spinorielle (47) aux composantes du tenseur champ-électromagnétique, c'est-à-dire à

$$\begin{pmatrix} E_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} E_z \\ H_y \end{pmatrix}$$

donc aux composantes de l'onde transverse électrique ou transverse magnétique dans une onde plane et homogène.

Ainsi que nous l'avons signalé on trouvera une justification rigoureuse sur le plan mathématique de cette identification (annexe) ; utilisant l'algèbre des formes extérieures et basée sur le travail de A. Lichnerowicz généralisant la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1 [4].

En tenant compte des remarques faites dans la section I sur le caractère formel de l'équation

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} = \frac{i(\frac{\Lambda}{n})c}{\hbar} \tilde{\Psi} \quad (49)$$

nous admettons que l'équation (49) généralise l'équation (47) et que formellement les solutions

$$\tilde{\Psi}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_1$$

composantes du spineur

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ \tilde{\Psi}_1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

solution de (49) et exprimées dans le référentiel du diélectrique

$$R_\varepsilon$$

peuvent être identifiées aux composantes du champ électromagnétique associé à l'onde évanescente. Mais la propagation de l'onde ayant effectivement lieu dans la seule direction

$$(X)$$

les solutions (42) et (43), soit

$$\Psi_0 = \frac{1}{c} e^{\frac{2\pi i \tilde{\nu}}{c} [X - cT]} = \frac{1}{c} e^{\frac{i\tilde{\omega}}{c} [X - cT]} \quad (51)$$

$$\Psi_1 = e^{\frac{2\pi i \tilde{\nu}}{c} [X - cT]} = e^{\frac{i\tilde{\omega}}{c} [X - cT]} \quad (52)$$

de l'équation (49) ne peuvent être identifiées de manière simple à  $Hx$  et  $Ey$  (ou à  $Hy$  et  $Ez$ ) : en effet l'onde évanescente serait alors une onde plane dont la fréquence

$$\tilde{\nu}$$

aurait une valeur bien déterminée pour chaque valeur de  $X$ . Cette fréquence décroissant constamment et continuellement quand  $X$  augmente.

Cette onde plane serait associée à un photon de vitesse  $c$  dont l'énergie ou l'impulsion

$$\frac{h\tilde{\nu}}{c} \quad (53)$$

diminuerait constamment quand  $X$  augmente : l'équation de propagation d'un tel photon serait alors

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (54)$$

et non l'équation (49) représentant formellement le photon évanescent.

Si d'autre part on identifie les solutions (51) et (52) à

$$Hz \quad \text{ou à} \quad Ez$$

et à une composante dirigée suivant  $X$ , soit

$$Hx \quad \text{ou} \quad Ex$$

on définirait comme précédemment une onde plane associée à un photon de vitesse  $c$  et d'équation (54), mais dont la direction de propagation serait

$$y$$

alors que la direction de propagation effective est  $X$ .

Dans ces conditions, la seule possibilité est la suivante : en remarquant que  $(z)$  est un axe d'invariance du phénomène évanescent pour toute translation parallèle à  $z$ , l'onde transverse électrique évanescente (onde T.E. évanescente) aura une composante

$$Ez$$

telle que

$$Ez = \tilde{\Psi}_1 \quad (55)$$

et le champ magnétique  $H$  de cette onde T.E. ne peut se trouver que dans le plan  $(Xy)$  avec une direction différente de  $X$  ou  $y$ . On pourra alors écrire

$$H = \tilde{\Psi}_0 \quad (56)$$

$H$  aura donc deux composantes

$$Hy \quad \text{et} \quad Hx$$

respectivement sur  $y$  et sur  $X$ .

De même pour l'onde transverse magnétique évanescence (onde T.M. évanescence) on écrira

$$Hz = \tilde{\Psi}_0 \quad (57)$$

le champ électrique  $E$  de l'onde T.M. évanescence ne pouvant se trouver que dans le plan  $(Xy)$  telle que

$$E = \tilde{\Psi}_1 \quad (58)$$

avec deux composantes

$$Ey \quad \text{et} \quad Ex$$

respectivement sur  $y$  et sur  $X$ .

En définitive nous aurons

$$\text{Onde T.E.} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = \tilde{\Psi}_1 \\ H = \tilde{\Psi}_0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H_y \\ H_x \end{array} \right\}, \quad \text{Onde T.M.} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_z = \tilde{\Psi}_0 \\ E = \tilde{\Psi}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} E_y \\ E_x \end{array} \right\} \quad (59)$$

avec toujours d'après la forme des solutions (51) et (52)

$$Hz = \frac{1}{c} Ez \quad , \quad H = \frac{1}{c} E \quad (60)$$

La détermination des composantes

$$\begin{array}{l} H_y \quad \text{et} \quad H_x \quad \text{de} \quad H \\ E_y \quad \text{et} \quad E_x \quad \text{de} \quad E \end{array}$$

est immédiate : en effet le photon incident se propage dans le diélectrique dans le plan d'incidence

$$(Xy)$$

l'angle d'incidence étant tel que

$$\sin i = n\alpha \quad (61)$$

$$n\alpha > 1 \quad (62)$$

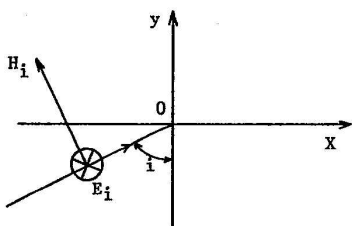


Figure 3.

L'onde T.E. incidente (Figure 3) est telle que le champ électrique incident

$$E_i$$

est dirigé dans la direction  $(z)$  alors que le champ magnétique incident

$$H_i$$

est dans le plan d'incidence

$$(Xy)$$

faisant l'angle  $i$  avec la direction  $(X)$ .

Réciproquement l'onde T.M. incidente est telle que le champ magnétique incident

$$H_i$$

est parallèle à  $(z)$  alors que le champ électrique incident

$$E_i$$

est dans le plan d'incidence

$$(Xy)$$

faisant l'angle  $i$  avec la direction  $(X)$  (Figure 4).

En  $O$  le photon incident est transmis sous la forme du photon évanescent dont la direction de propagation effective est

$$(X)$$

Du fait de la propriété d'invariance de l'axe  $(z)$ , le champ électrique  $E_i$  de l'onde incidente T.E. est transmis sous la forme du champ électrique évanescent  $Ez$  dirigé dans la direction  $(z)$  et tel que

$$Ez = \tilde{\Psi}_1 \quad (63)$$

et de même le champ magnétique  $H_i$  de l'onde T.M. incidente sera transmis sous la forme du champ magnétique évanescent  $H_z$  dirigé suivant ( $z$ ) et tel que

$$H_z = \tilde{\Psi}_0 \quad (64)$$

Par contre le champ magnétique

$$H_i$$

de l'onde T.E. incidente sera transmis sous la forme du champ magnétique évanescent  $H$  (Figure 3) situé dans le plan ( $Xy$ ) en faisant avec ( $X$ ) l'angle imaginaire  $i'$  tel que

$$\sin i' = n\alpha > 1 \quad (65)$$

De même le champ électrique

$$E_i$$

de l'onde T.M. incidente sera transmis (Figure 4) sous la forme du champ électrique évanescent  $E$  situé dans le plan ( $Xy$ ) (Figure 4) en faisant avec ( $X$ ) l'angle imaginaire  $i'$ .

Pour éviter toute confusion nous désignerons désormais par  $j$  l'unité imaginaire

$$j = \sqrt{-1} \quad (66)$$

Nous nous placerons d'abord dans les conditions du premier domaine de valeurs de

$$\beta'_g$$

défini par (1), soit  $\beta'_g$  tel que

$$n^2\alpha > \beta'_g > n \quad (67)$$

la propagation de l'onde évanescente s'effectuera dans la direction ( $X$ ) suivant un processus résumé dans la section I et étudié en détails dans des articles antérieurs [1], [2], [5].

Dans ces conditions, en tenant compte de (65), nous pouvons écrire pour l'onde transverse électrique évanescente (onde T.E. évanescente)

$$\begin{aligned} E_z &= \tilde{\Psi}_1 \\ H_x &= j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}H = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}\frac{1}{c}E \\ &= j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}\frac{1}{c}E_z \\ H_y &= -n\alpha\frac{1}{c}E = -n\alpha\frac{1}{c}E_z \end{aligned} \quad (68)$$



et pour l'onde transverse magnétique évanescence (onde T.M. évanescence)

$$\begin{aligned} H &= H_z = \tilde{\Psi}_0 \\ E_x &= -j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}cH = -j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}cH_z \\ E_y &= n\alpha cH = n\alpha cH_z \end{aligned} \quad (69)$$

Pour mettre les relations (68) et (69) sous leur forme définitive, considérons maintenant le vecteur d'onde de l'onde évanescence. Ce vecteur est situé dans le plan

$$(Xy)$$

en faisant avec  $X$  l'angle imaginaire

$$\frac{\pi}{2} - i' \quad (70)$$

et a pour module

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{\omega}}{c} = K \frac{\omega}{c} = Kk_0 \quad (71)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega'}{c'} \quad (72)$$

$k_0$  étant le module du vecteur d'onde du photon incident de fréquence  $\nu'$  et de pulsation  $\omega'$ , la valeur de  $K$  étant donnée par l'expression (37) soit

$$K = \frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (73)$$

$\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\nu}$  étant tels que

$$\tilde{\omega} = K\omega \quad ; \quad \tilde{\nu} = K\nu \quad (74)$$

Or ce secteur d'onde n'est accessible à la mesure que par ses projections sur

$$X \quad \text{et} \quad y$$

c'est-à-dire

$$\tilde{K}_x = n\alpha\tilde{K} \quad (75)$$

$$\tilde{K}_y = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}\tilde{K} = j\Sigma \quad (76)$$

en posant

$$\Sigma = [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}\tilde{K} \quad (77)$$

On vérifie facilement qu'il existe entre  $\tilde{K}_x$ ,  $\tilde{K}$  et  $\Sigma$  la relation

$$\tilde{K}_x^2 = \tilde{K}^2 + \Sigma^2 \quad (78)$$

La direction effective de propagation de l'onde évanesccente étant  $X$ , la fréquence ou la pulsation mesurées ne seront donc pas

$$\tilde{\nu} \quad \text{ou} \quad \tilde{\omega}$$

mais

$$n\alpha\tilde{\nu} \quad \text{ou} \quad n\alpha\tilde{\omega} \quad (79)$$

Il en résulte que dans les solutions obtenues précédemment (42) et (43) soit

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{c}e^{\frac{2\pi j\tilde{\nu}}{c}[X - cT]} = \frac{1}{c}e^{\frac{j\tilde{\omega}}{c}[X - cT]} \quad (80)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = e^{\frac{2\pi j\tilde{\nu}}{c}[X - cT]} = e^{\frac{j\tilde{\omega}}{c}[X - cT]} \quad (81)$$

pour avoir les valeurs effectivement mesurées, nous devons remplacer

$$\frac{\tilde{\omega}}{c}X = \tilde{K}X \quad (82)$$

par

$$n\alpha\tilde{K}X + j\Sigma y \quad (83)$$

ce qui donne, en ne tenant pas compte de la partie temporelle

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{c}e^{-\Sigma y}e^{jn\alpha\tilde{K}X} = \overline{H} = \overline{H}_z \quad (84)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = e^{-\Sigma y}e^{jn\alpha\tilde{K}X} = \overline{E} = \overline{E}_z \quad (85)$$

(84) et (85) sont les valeurs qui seront effectivement mesurées.

Dans ces conditions (68) et (69) vont devenir, en ne tenant pas compte de la partie temporelle

$$\text{Onde T.E.} \quad \begin{cases} E_z = \Psi_1 = e^{-\Sigma y}e^{jn\alpha\tilde{K}X} \\ H_x = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}\frac{1}{c}\overline{E}_z \\ H_y = -n\alpha\frac{1}{c}\overline{E}_z \end{cases} \quad (86)$$

$$\text{Onde T.M.} \quad \begin{cases} \overline{H}_z = \frac{1}{c} e^{-\Sigma y} e^{jn\alpha \tilde{K} X} \\ \overline{E}_x = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} c \overline{H}_z \\ \overline{E}_y = n\alpha c \overline{H}_z \end{cases} \quad (87)$$

soit, en tenant compte de la relation (75)

$$\text{Onde T.E.} \quad \begin{cases} \overline{E}_z = e^{-\Sigma y} e^{j\tilde{K}_x X} \\ \overline{H}_x = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} \frac{1}{c} \overline{E}_z \\ \overline{H}_y = -n\alpha \frac{1}{c} \overline{E}_z \end{cases} \quad (88)$$

$$\text{Onde T.M.} \quad \begin{cases} \overline{H}_z = \frac{1}{c} e^{-\Sigma y} e^{j\tilde{K}_x X} \\ \overline{E}_x = -j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} c \overline{H}_z \\ \overline{E}_y = n\alpha c \overline{H}_z \end{cases} \quad (89)$$

Dans les expressions (88) et (89) on peut faire apparaître la permittivité  $\varepsilon_0$  et la perméabilité  $\mu_0$  du vide. Dans (88) on peut introduire les rapports

$$\frac{\Sigma}{\tilde{\omega}} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{K}_x}{\tilde{\omega}} \quad (90)$$

en remarquant que

$$\frac{\Sigma}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{c} [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} \quad (91)$$

$$\frac{\tilde{K}_x}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{c} n\alpha \quad (92)$$

et dans (89) les rapports

$$\frac{\Sigma}{\varepsilon_0 \mu_0 \tilde{\omega}} \quad (93)$$

et

$$\frac{\tilde{K}_x}{\varepsilon_0 \mu_0 \tilde{\omega}} \quad (94)$$

Les expressions (88) et (89) sont donc analogues à celles obtenues par voie classique ([6], p. 10 ; [7], p. 5). Les résultats qualitatifs sont donc les mêmes ; en un point quelconque d'ordonnée positive

$$y \quad (y > o)$$

situé dans le plan d'incidence

$$(Xy)$$

le vecteur  $\vec{H}$  de l'onde T.E. évanescence décrit une ellipse située dans le plan  $(Xy)$  ; cette ellipse est toujours décrite dans le sens rétrograde par rapport à  $(z)$ . Il en est de même pour le vecteur  $\vec{E}$  de l'onde évanescence T.M. Il existe donc bien deux états de polarisation de l'onde évanescence. Le grand axe de l'ellipse est dirigé suivant  $(y)$  et le petit axe suivant  $(X)$ , car on a

$$\tilde{K}_x > \Sigma \quad (95)$$

soit

$$n\alpha > [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} \quad (96)$$

Enfin, comme classiquement, il existe un facteur de décroissance exponentielle de l'intensité des champs égal à

$$e^{-\Sigma y} \quad (97)$$

quand  $y$  augmente, avec

$$\Sigma = [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} \tilde{K} \quad (98)$$

Mais il existe une différence quantitative essentielle entre ces résultats et les formules classiques : en effet dans les formules ([6], p. 10 ; [7], p. 5),  $E_z$  et  $H_z$  sont donnés, au facteur  $1/c$  près par une expression de la forme

$$e^{-\sigma y} e^{jk_x x} \quad (99)$$

avec

$$\sigma = [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} k_0 = [n^2\alpha^2 - 1]^{1/2} \frac{\omega}{c} \quad (100)$$

où

$$k_x = n\alpha k_0 \quad (101)$$

On voit intervenir dans les relations (88) et (89) les facteurs

$$\Sigma \quad \text{et} \quad \tilde{K}_x$$

qui d'après les relations obtenues de (71) à (78) sont tels que

$$\Sigma = K o \quad (102)$$

$$\tilde{K}_x = K k_x \quad (103)$$

avec

$$K = \frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (104)$$

$K$  étant toujours inférieur à un ( $K < 1$ ), on aura toujours

$$\Sigma < o \quad (105)$$

$$\tilde{K}_x < k_x \quad (106)$$

Il en résulte cette conséquence fondamentale : l'intensité des champs doit toujours être inférieure à celle prévue par les expressions classiques. En outre la valeur de  $K$ , comme le montre l'expression (104) est une fonction de  $\beta'_g$  qui diminue constamment et continument quand  $\beta'_g$  diminue dans le premier domaine de valeurs envisagé pour  $\beta'_g$  [1,6]. Il doit en résulter une diminution continue de l'intensité des champs évanescents, à mesure que le photon évanescent se propage sur  $X$ .

Nous analyserons dans la section IV les conséquences de ces résultats sur le plan expérimental, mais traitons auparavant le cas du deuxième domaine de valeurs de  $\beta'_g$  défini par (2), c'est-à-dire telles que

$$n > \beta'_g > n\alpha \quad (107)$$

A partir de la valeur [1,4]

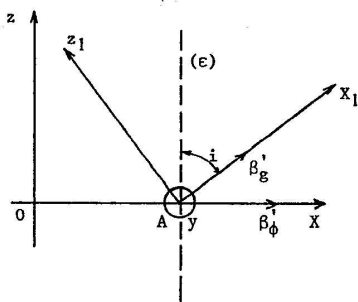
$$\beta'_g = n \quad (108)$$

et dans le domaine de valeurs défini par (107) la direction de la vitesse de groupe

$$\beta'_g$$

est dissociée de celle de la vitesse de phase

$$\beta'_\phi$$

**Figure 5.**

La direction de la vitesse de groupe (Figure 5) devient  $(X_1)$  telle que

$$(X_1, z) = i \quad , \quad \alpha = \sin i \quad (109)$$

alors que la direction de la vitesse de phase

$$\beta'_\phi$$

reste celle de l'axe  $(X)$ . La propagation du photon évanescent s'effectue suivant  $(X_1)$  et sur la face  $(\varepsilon)$  de l'interface  $(X_z)$  [1,5].

A partir de la valeur de  $\beta'_g$

$$\beta'_g = n \quad (110)$$

on peut considérer que tout se passe comme s'il y avait une rotation des axes  $X$  et  $z$  dans le plan  $(X, z)$  telle que

$$(X, X_1) = (z, z_1) = \frac{\pi}{2} - i \quad (111)$$

l'axe  $y$  restant normal au plan  $(X_1 z_1)$  ou  $(Xz)$ .

On peut donc reprendre point par point le raisonnement précédent, mais il est clair que le phénomène de la polarisation elliptique de l'onde évanescent aura lieu dans le plan

$$(X_1 y)$$

tout se passant comme si le plan de polarisation qui était  $(Xy)$  pour les valeurs de  $\beta'_g$  du premier domaine de valeurs avait tourné de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - i$$

autour de l'axe  $(y)$  pour devenir  $(X_1y)$ .

Il en résulte que le champ

$$\vec{H}$$

de l'onde T.E. évanescence se trouvera désormais dans le plan

$$(X_1y)$$

ainsi que le champ

$$\vec{E}$$

de l'onde T.M. évanescence.

Donc, à partir de la valeur

$$\beta'_g = n$$

$(z)$  ne sera plus axe d'invariance pour les translations parallèles à  $(z)$ .  
L'axe d'invariance sera alors

$$(z_1)$$

toute translation parallèle à  $(z_1)$  conservant le phénomène évanescence.  
Le lieu des extrémités des champs  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$  sera une ellipse respectivement pour  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ , mais ces ellipses seront situées dans le plan

$$(X_1y)$$

#### IV. Sur les conséquences expérimentales.

Le remplacement dans les formules classiques de  $\sigma$  et de  $k_x$  respectivement par les valeurs

$$\Sigma = k\sigma \quad (112)$$

$$\tilde{K}_x = Kk_x \quad (113)$$

où le paramètre  $K$  a la valeur

$$K = \frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \frac{n\alpha}{\beta'_g} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (114)$$

avec toujours

$$K < 1 \quad (115)$$

$K$  diminuant constamment et continument quand  $\beta'_g$  diminue à mesure que  $X$  augmente doit entraîner d'importantes conséquences quantitatives sur les résultats expérimentaux concernant la polarisation des ondes évanescentes. Il nous semble donc qu'il serait intéressant de reprendre un certain nombre d'expériences classiques et de mettre au point de nouveaux montages destinés à vérifier ces prévisions. Cependant dès maintenant les résultats obtenus lors d'une expérience fondamentale semblent en accord avec les prévisions. Etant donné son importance, nous décrirons le principe de la méthode de cette expérience en empruntant cette description aux réalisateurs du montage [6,7,8].

Nous analyserons rapidement les résultats obtenus qui, quantitativement, ne sont pas en accord avec les formules classiques.

Il s'agit d'une méthode d'absorption atomique reposant sur les bases suivantes : l'existence d'une composante longitudinale du champ électromagnétique de l'onde évanescence entraîne des propriétés particulières de la probabilité de transition d'un atome excité par une telle onde. Dans le cas d'onde T.E. (resp. T.M.) le vecteur  $\vec{H}$  (resp  $\vec{E}$ ) décrit une ellipse dans un plan perpendiculaire à  $\vec{E}$  (resp  $\vec{H}$ ). Cette vibration elliptique peut formellement se décomposer en deux vibrations circulaires gauche et droite d'amplitudes différentes. Ainsi, pour un atome effectuant sous l'effet de cette onde des transitions

$$\Delta M = \pm 1$$

les intensités des raies d'absorption seront différentes, pour les deux cas, dans un champ statique  $\vec{H}_s$  (ou  $\vec{B}_s$ ) perpendiculaire au plan de polarisation, alors que pour une onde plane homogène T.E. (resp T.M.) les intensités des raies

$$\Delta M = +1 \quad ; \quad \Delta M = -1$$

seraient égales.

On sait que classiquement on a

$$k_x = m\alpha k_0 \tag{116}$$

$$k_y = j[n^2\alpha^2 - 1]^{1/2}k_0 \tag{117}$$

$$k_z = 0 \tag{118}$$



avec

$$k_x^2 = k_0^2 + \sigma^2 \quad (119)$$

$$\sigma = [n^2 \alpha^2 - 1]^{1/2} k_0 \quad (120)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (121)$$

Formellement donc la polarisation de l'onde évanescente peut être décomposée en les deux polarisations circulaires

$$\sigma_+ \quad \text{et} \quad \sigma_-$$

d'amplitudes inégales et respectivement proportionnelles à

$$k_x - \sigma \quad (122)$$

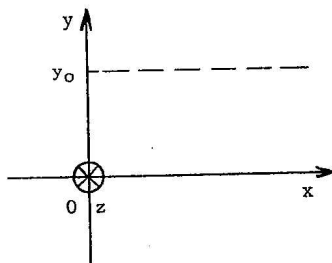
et

$$k_x + \sigma \quad (123)$$

Les auteurs utilisent un atome alcalin de

$$^{87}\text{Rb}$$

placé en un point  $M_0$  d'ordonnée positive  $y_0$  ( $y_0 > 0$ ) dans un champ magnétique uniforme  $H_s$  (ou  $B_s$ ) parallèle et de même sens que  $Oz$  (Figure 6).



**Figure 6.**

Son état fondamental

$$5S_{1/2}$$

est dédoublé par l'interaction hyperfine I.J en deux niveaux hyperfins

$$F = 1 \quad \text{et} \quad F = 2$$

dont l'écart est

$$h\nu_0$$

Le champ  $\vec{H}_s$  (les auteurs utilisant le champ terrestre) achève de lever la dégénérescence Zeeman dont l'écart est

$$h\nu_H$$

proportionnel à  $|\vec{H}_s|$  en champ faible.

Les auteurs considèrent les raies

$$M = -1 \longleftrightarrow M = -2$$

distantes de

$$h(\nu_0 - 3\nu_H)$$

et les raies

$$M = 1 \longleftrightarrow M = 2$$

distantes de

$$h(\nu_0 + 3\nu_H)$$

Ces transitions peuvent être excitées par une onde évanescence T.E. et classiquement leurs intensités seront proportionnelles à

$$(k_x + \sigma)^2 \exp(2\sigma y_0) \quad \text{pour la transition} \quad -1 \longleftrightarrow -2 \quad (124)$$

$$(k_x - \sigma)^2 \exp(-2\sigma y_0) \quad \text{pour la transition} \quad 1 \longleftrightarrow 2 \quad (125)$$

La détection et la mesure des intensités des deux raies respectives permettent de mettre en évidence la polarisation particulière de l'onde évanescence.

Mais d'après notre théorie de la polarisation exposée dans la section III et d'après les formules (112), (113), (114), les expressions (124) et (125) doivent être remplacées par les expressions

$$(\tilde{K}_x + \Sigma)^2 \exp(2\Sigma y_0) \quad \text{pour la transition} \quad -1 \longleftrightarrow -2 \quad (126)$$

$$(\tilde{K}_x - \Sigma)^2 \exp(-2\Sigma y_0) \quad \text{pour la transition} \quad 1 \longleftrightarrow 2 \quad (127)$$

avec

$$\tilde{K}_x = K k_x \quad (128)$$

$$\Sigma = k\sigma \quad (129)$$

et

$$K = K(\beta'_g) < 1 \quad (130)$$

$K$  diminuant continument quand  $X$  augmente ( $\beta'_g$  diminuant).

D'après les expressions (126) et (127) il est clair que les intensités des deux raies doivent être inférieures à celles calculées à partir des expressions (124) et (125).

Il ne saurait être question de décrire ici le montage expérimental utilisé par les auteurs [6,7], [8].

Nous dirons seulement que leur source de fréquence est un klystron asservi en phase sur un quartz de  $5MHz$  et délivrant une fréquence voisine de  $6840MHz$  variable et modulée, et que l'onde évanescence T.E. est créé sur un guide diélectrique d'épaisseur  $d$  et d'indice  $n$ . Les atomes de  $^{87}Rb$  placés dans une cellule résonante plongée dans l'onde évanescence T.E. On mesure ainsi le transfert d'impulsion de l'onde évanescence à des atomes en mouvement rectiligne uniforme.

Les auteurs obtiennent la dérivée de la courbe d'absorption des raies

$$\Delta M = \pm 1$$

Ils mesurent les transitions  $\Delta M = \pm 1$  d'une part dans l'onde homogène T.E. et d'autre part dans l'onde évanescence T.E.

Les résultats sont les suivants : Pour l'onde homogène T.E. la différence des fréquences des deux raies est de  $1,7MHz$  environ et les raies ont la même largeur ( $16kHz$ ) et sont égales en intensité.

Pour l'onde évanescence T.E., la différence des fréquences est encore de  $1,7MHz$ , mais les raies n'ont ni la même largeur ni la même intensité. D'autre part, et ce résultat est essentiel, bien que la raie  $\Delta M = -1$  reste la plus intense, les intensités sont inférieures à celles calculées à l'aide des formules classiques (124) et (125).

Or les formules (126) et (127) que nous proposons donnent effectivement des valeurs des intensités inférieures à celles calculées à l'aide des formules classiques (124) et (125), ceci étant dû au fait que

$$K < 1$$

Pour expliquer la discordance de leurs résultats avec les formules classiques, les auteurs invoquent un faible taux d'ondes stationnaires sur le

guide ou encore la dépolarisation de l'onde par la cellule, ces hypothèses n'étant basées sur aucune évaluation expérimentale.

Il est possible que de tels facteurs contingents existent, mais ils nous semblent insuffisants pour rendre compte des discordances.

Aussi serait-il essentiel de reprendre de telles expériences ou d'autres similaires pour montrer que les formules (126) et (127) que nous proposons peuvent rendre compte quantitativement des résultats obtenus concernant la diminution d'intensité des raies, compte tenu d'une évaluation rigoureuse des facteurs contingents.

Il est à prévoir d'autre part une diminution d'intensité des raies augmentant à mesure que la cellule est placée plus loin de l'origine, puisque  $\beta'_g$  diminue et donc  $K$ , de telles mesures devant être faites en liaison avec des mesures concernant les phénomènes de surface où nous voyons la cause de la diminution de  $\beta'_g$  [4].

Nous avons présenté au congrès international de Relativité de Barcelone de septembre 1989 une possibilité d'utiliser un système de coordonnées curvilignes à quatre dimensions par le cône de lumière et d'obtenir ainsi une équation de Dirac dans ce système. Nous avons également déterminé les valeurs des matrices  $\tilde{\gamma}^\mu$  à quatre dimensions [9].

L'utilisation d'un tel système de coordonnées doit permettre de préciser certains points concernant la polarisation des ondes évanescences: c'est un problème que nous aborderons prochainement.

### **Annexe. Sur une application de la théorie du champ de spin maximum 1 au modèle de particule de référentiel propre IMF.**

Dans des articles antérieurs [1,2,3] nous avons présenté la théorie d'un modèle de particule, dont le référentiel propre est du type IMF. Nous avons écrit par rapport à un référentiel IMF et dans le système de coordonnées du cône de lumière  $(\tau, \zeta)$  les équations du premier ordre ou équations de Dirac respectivement du genre temps et du genre espace soit

$$[\gamma^\mu \partial_\mu - \chi] \Psi = 0 \quad (1)$$

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \chi] \tilde{\Psi} = 0 \quad (2)$$

$$\gamma^0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Psi = \Psi(\tau, \zeta) \quad , \quad \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\tau, \zeta) \quad (4)$$

$$\chi = \frac{mc}{\hbar} = \frac{m}{\hbar}(c = 1) \quad (5)$$

Les équations (1) et (2) sont conjuguées dans  $SO(2; c)$  par l'opérateur

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Cherchant la solution commune à (1) et (2) nous avons trouvé l'équation du premier ordre

$$\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0, 1) \quad (7)$$

$$\Gamma^\mu = 2\gamma^\mu \quad (8)$$

L'équation (7) est l'équation d'une particule de référentiel propre IMF et d'hélicité  $|\vec{p}\lambda| >$  telle que  $\lambda = \pm 1$ . Nous identifions cette particule au photon, en montrant que les composantes spinorielles des solutions de l'équation (7) peuvent être identifiées aux composantes du tenseur champ-électromagnétique. En effet (7) peut s'écrire en simplifiant par  $2\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

et a comme solutions  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  : (9) s'écrit en effet [2, p. 140]

$$\partial_0 \Psi_1 = 0 \partial_1 \Psi_0 = 0 \quad (10)$$

ou

$$\partial_0 \Psi_1 + \partial_1 \Psi_0 = 0 \quad (11)$$

$-\Psi_1$  et  $-\Psi_0$  sont également solutions de (10) et (11). Soit

$$t^{\lambda\mu} \quad (\text{ou} \quad t_{\lambda\mu}) \quad , \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3) \quad (12)$$

un tenseur antisymétrique du deuxième ordre ayant six composantes indépendantes, quatre de ces composantes étant nulles. Nous faisons l'identification pour les composantes non nulles [2, p. 141]

$$t^{20} = -\Psi_1 \quad , \quad t^{02} = \Psi_1 t^{21} = -\Psi_0 \quad , \quad t^{12} = \Psi_0 \quad (13)$$

Nous nous proposons dans cette annexe de justifier rigoureusement cette identification en utilisant l'algèbre des formes extérieures : en effet la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer [9] généralisée par A. Lichnerowicz [4] est la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1,

utilisant la correspondance existant entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2. Dans cette théorie, on fait correspondre à l'opérateur de Dirac l'opérateur

$$(d + \delta)$$

sur les formes, le carré de cet opérateur étant le laplacien de Georges DE RAHM.

Considérons donc avec A. Lichnerowicz [4, p. 75] un espace  $V_4$  muni d'une métrique hyperbolique arbitraire. On généralise dans  $V_4$  la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer pour un champ de spin maximum 1 : un tel champ est représenté par un 2-spineur

$$\Psi$$

de type  $(1, 1)$ .

Dans  $V_4$  l'équation du premier ordre s'écrit

$$P\Psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi \quad (14)$$

où  $P$  désigne l'opérateur covariant de Dirac

$$P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \quad (15)$$

Or nous pouvons écrire l'équation (7)

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \quad (16)$$

Pour l'équation (16) l'opérateur de Dirac peut s'écrire

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \quad (17)$$

De toute manière nous pouvons écrire (16)

$$P\Psi = 0 \quad (18)$$

avec

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \quad (19)$$

ou

$$P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \quad (20)$$

car (16) généralisée dans  $V_4$  a la forme

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0 \quad (21)$$

A. Lichnerowicz développe la correspondance entre l'algèbre extérieure des formes et les 2-spineurs dans  $V_4$  [4, p. 77, par 31] :

L'Algèbre extérieure des formes de  $V_4$ , et le module des 2-spineurs admettent, en tant que modules, un isomorphisme  $S$  défini de la manière suivante. A toute  $p$ -forme

$$\alpha^{(p)}$$

faisons correspondre le 2-spineur

$$S\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!} \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}^{(p)} \quad (22)$$

Si  $\alpha$  est une forme non homogène de  $V_4$

$$\alpha = \sum_{p=0} \alpha^{(p)} \quad (23)$$

et  $S\alpha$  se définit par linéarité.

Inversement, en le rapportant à la base définie par les produits antisymétrismes de matrices  $\gamma$  distinctes, tout 2-spineur

$$\Psi$$

de type  $(1, 1)$  peut s'écrire d'une manière et d'une seule

$$\Psi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}^{(p)} = \sum_{p=0}^4 S\alpha^{(p)} \quad (24)$$

où les  $\alpha^{(p)}$  sont des  $p$ -formes. Ainsi il existe une forme  $\alpha$  et une seule telle que

$$\Psi = S\alpha \quad (25)$$

Appliquons ces résultats à l'équation (16) ou (21). Dans le cas considéré, le 2-spineur

$$\Psi$$

solution de cette équation est tel que

$$p = 2$$

soit maintenant

$$F_{\alpha\beta} \quad (26)$$

le tenseur champ-électromagnétique : c'est une 2-forme et en appliquant les résultats précédents, en particulier les relations (22) et (24) avec

$$p = 2$$

on voit qu'à la 2-forme  $F_{\alpha\beta}$  correspond le 2-spineur

$$\Psi = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \quad (27)$$

Dans les relations utilisées (22) et (24), pour

$$p = 2$$

nous avons

$$\rho_1 = \alpha \quad ; \quad \rho_2 = \beta \quad (28)$$

Les relations (22) et (24) montrent que dans le cas envisagé l'isomorphisme  $S$  est tel que

$$S = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (29)$$

Or A. Lichnerowicz établit ensuite [4, p. 78, 79 ; par 32] une relation entre l'opérateur de Dirac

$$P$$

et les opérateurs

$$d \quad \text{et} \quad \delta$$

sur les formes

$$\alpha^{(p)}$$

"Evaluons pour la p-forme  $\alpha^{(p)}$

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!} \gamma^\alpha \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} \nabla_\alpha \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}^{(p)} \quad (30)$$

Les indices  $\rho_1 \dots \rho_p$  sont tous différents. Distinguons les termes où l'indice  $\alpha$  ne prend aucune des valeurs de la permutation

$$(\rho_1 \dots, \rho_p)$$



et ceux où il prend l'une de ces valeurs

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!} \Sigma_{\alpha \neq \rho_1 \dots \rho_p} \gamma^\alpha \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} \nabla_\alpha \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}^{(p)} - \frac{1}{(p-1)!} \gamma^{\rho_2} \dots \gamma^{\rho_p} \nabla_\alpha \alpha_{\rho_2 \dots \rho_p}^{(p)\alpha} \quad (31)$$

les indices  $\alpha, \rho_1 \dots \rho_p$  étant supposés distincts, on a, en introduisant le tenseur d'antisymétrisation de Kronecker

$$\gamma^\alpha \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} = \frac{1}{(p+1)!} \varepsilon_{\lambda_0 \dots \lambda_p}^{\alpha \rho_1 \dots \rho_p} \gamma^{\lambda_0} \dots \gamma^{\lambda_p} \quad (32)$$

En substituant cette expression dans le premier terme du second membre de (31) il vient

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{(p+1)!} \gamma^{\lambda_0} \dots \gamma^{\lambda_p} (d\alpha^{(p)})_{\lambda_0 \dots \lambda_p} - \frac{1}{(p-1)!} \gamma^{\rho_2} \dots \gamma^{\rho_p} \nabla_\alpha \alpha_{\rho_2 \dots \rho_p}^{(p)\alpha} \quad (33)$$

soit

$$PS\alpha^{(p)} = Sd\alpha^{(p)} + S\delta\alpha^{(p)} \quad (34)$$

Par linéarité on obtient ainsi la formule

$$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \quad (35)$$

Considérons donc les relations ainsi établies entre  $P$  et  $d$  et  $\delta$  soit

$$PS\alpha^{(p)} = Sd\alpha^{(p)} + S\delta\alpha^{(p)} \quad (36)$$

ou

$$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \quad (37)$$

Dans le cas du 2-spineur que nous avons envisagé, solution de l'équation (16) ou (21), la forme  $\alpha$  est une 2-forme qui s'écrit

$$F_{\alpha\beta} \quad (38)$$

Nous pouvons donc écrire en tenant compte de (29)

$$S\alpha = SF_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \quad (39)$$

Or d'après (27)

$$\Psi = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \quad (40)$$

Donc

$$S\alpha = SF_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \quad (41)$$

soit

$$S\alpha = \Psi \quad (42)$$

Dans le cas considéré, l'opérateur de Dirac s'écrit

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \quad (43)$$

(On peut du reste prendre la forme généralisée  $P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha$ ).

D'autre part l'équation (16) s'écrit

$$P\Psi = \gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \quad (44)$$

Or d'après (42) nous avons

$$P\Psi = PS\alpha = PSF_{\alpha\beta} \quad (45)$$

(44) peut alors s'écrire

$$PSF_{\alpha\beta} = 0 \quad (46)$$

En tenant compte de la relation fondamentale (37), nous pouvons maintenant écrire

$$PSF_{\alpha\beta} = S(dF_{\alpha\beta} + \delta F_{\alpha\beta}) = 0 \quad (47)$$

Nous en déduisons d'après (47)

$$dF_{\alpha\beta} + \delta F_{\alpha\beta} = 0 \quad (48)$$

ce qui implique nécessairement

$$dF_{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \delta F_{\alpha\beta} = 0 \quad (49)$$

Nous avons ainsi justifié rigoureusement l'identification faite précédemment [2].

## Remerciements

Nous exprimons notre reconnaissance à Messieurs les Professeurs A. Lichnerowicz et J.C. Pecker, Membres de l'Institut, Professeurs au Collège de France, qui nous ont prodigué leurs conseils précieux. Le Professeur A. Lichnerowicz nous a aidé pour la théorie relativiste et l'application de la théorie du champ de spin maximum 1 en formalisme spinoriel.

## Références

- [1] Dutheil R., Ann. Fond. L. de Broglie, **17**, n°2, p.135, (1992).
- [2] Dutheil R., Bull. Soc. r. Sc. Liège, **53** (5), pp. 293-316 (1984).
- [3] Dutheil R., Bull. Soc. r. Sc. Liège, **53** (3-4), pp. 129-142 (1984).
- [4] Lichnerowicz A., Bull. Soc. math. France, **92**, p. 11 à 100 (1964).
- [5] Dutheil R., Bull. Soc. r. Sc. Liège, **53** (6), pp. 363-375 (1985).
- [6] Huard S., *Interaction ondo évanescente-atomes ; mesure du quantum d'impulsion et mise en évidence de la polarisation de l'onde*. Thèse Doctorat Etat. Université Paris XI (30 septembre 1977).
- [7] Huard S. et Vigoureux J.M., Optics communication, **25** (1), pp. 5-8 (1978).
- [8] Vigoureux J.M. et Payen R., J. de Physique, **36**, 681 (1975).
- [9] Petiau G., Académie r. Belge, Cl. Sc. math, Mémoires, 2e série, t. 16, n° 2, 118 pages (Thèse Sc. math. Paris, 1936).
- [10] R. Dutheil and J. Steayert, *Recent developments in gravitation*, World Scientific, Proceedings in the Relativity Meeting of Barcelona, septembre 1989, p.423.

*Cet article est la refonte d'une communication présentée par A. Lichnerowicz et J.C. Pecker à la Société Royale des Sciences de Liège.*  
(R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **54**, 236, (1985).