Passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargman-Michel-Telegdi pour un électron "étendu"

Pierre Paillère

Centre d'Etudes de Limeil-Valenton
94195 Villeneuve -Saint-Georges cedex

RÉSUMÉ. Le Lagrangien associé à l'équation de Dirac en espace courbe permet de formuler les tenseurs d'impulsion-énergie canonique et symétrisé, ainsi que le tenseur de moment angulaire intrinsèque d'ordre trois auquel est adjoint le vecteur spin.

Par analogie entre les formalismes quantique et classique, il est alors possible de faire correspondre au tenseur d'impulsion-énergie symétrisé un tenseur hydrodynamique d'où sont déduites les équations d'évolution de la vitesse et du spin en tout point de l'électron considéré comme particule "étendue".

Un choix particulier du terme correctif qui rend compte du spin dans l'expression du 4-vecteur densité volumique d'impulsion de l'électron permet de ramener ces équations à celles de Bargmann - Michel - Telegdi qui de ce fait fournissent une "vérification expérimentale" de la démarche suivie.

ABSTRACT. The canonical stress-energy tensor, the symmetrized stress-energy tensor, and also the third order intrinsic angular momentum tensor and its dual vector, the spin vector, have been deduced from the Lagrangian function which is associated with the Dirac equation in a curved space-time.

It then becomes possible, using an analogy between the quantum and classical formalisms, to associate the symmetrized stress-energy tensor with a hydrodynamical symmetrical tensor from which the evolution equations of velocity and spin are deduced for each point of the "extended" electron.

A particular choice of the corrective term due to the spin in the expression of the volume density of four momentum allows these equations to be reduced to those of Bargmann - Michel - Telegdi. This result constitutes an experimental proof of our theory.

Introduction.

Le comportement de l'électron peut être décrit soit du point de vue ondulatoire au moyen de l'équation d'onde de Dirac, soit du point de vue corpusculaire au moyen d'un système d'équations différentielles qui régissent l'évolution de la vitesse et du spin.

Cette voie de recherche a donné lieu à de nombreuses tentatives depuis Frenkel en 1926 [1] jusqu'à Bargmann - Michel - Telegdi (BMT) en 1959 [2]. Ces deux formulations, établies à trente trois ans d'intervalle sont d'ailleurs équivalentes selon Rohrlich [3].

Ce qu'il faut souligner, c'est que ces tentatives "classiques" sont totalement déconnectées des équations d'onde. Elles sont élaborées à partir de la relation d'évolution du spin d'Uhlenbeck-Goudsmit dans le référentiel propre de l'électron :

$$\frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = \frac{g}{2}\frac{q}{m_0 c}\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{B} \quad , \tag{1}$$

qui a été généralisée de plusieurs façons de manière à devenir covariante au sens de Lorentz (Frenkel, Kramers, Bhabha - Corben, B.M.T.) (cf. [3]).

C'est pourquoi, en vue d'unifier les deux voies d'exploration -onde et corpuscule- dans le même principe, nous sommes nous attachés à déduire la théorie corpusculaire de l'électron considéré comme particule électromagnétique tournante, de la théorie fondée sur l'équation d'onde de Dirac qui, elle, fait fonction de principe (cf. [4], [5]).

Le formalisme lagrangien qui peut lui être attaché permet de faire apparaître un tenseur d'impulsion-énergie, ce qui nous a suggéré de considérer l'électron non plus comme ponctuel, mais plutôt comme un petit domaine fluide, c'est-à-dire comme une "particule étendue".

Cette conception conduit à envisager une analogie hydrodynamique, conformément à la démarche suivante :

Le tenseur d'impulsion-énergie canonique du champ de Dirac, asymétrique par nature, est symétrisé au moyen de l'analogue quantique du tenseur de Belinfante - Rosenfeld, de façon à être compatible avec la théorie de la Relativité Générale (cf. [4], [6]).

Il serait naturellement souhaitable d'inclure l'effet de spin dans la métrique d'Univers comme l'a préconisé O. Costa de Beauregard, (cf. [7] p. 131), mais pour cela, il faudrait effectuer les développements requis en métrique de Riemann - Cartan, ce qui en compliquerait notablement le formalisme [8]. Pour cette raison, ils ont été effectués en métrique de Riemann seulement.

Le tenseur symétrique obtenu, $T^{\lambda\mu}$, est identifié au tenseur d'impulsion-énergie symétrique de l'hydrodynamique relativiste [9]. Ce dernier peut être exprimé à l'aide de deux quantités, ϖ et $\cos Y$, obtenues à partir des invariants de Dirac, Ω et $\hat{\Omega}$. Ceux-ci constituent le lien entre les formalismes ondulatoires et corpusculaires.

La fonction densité ϖ, homogène à l^{-3}, est définie par :

$$\varpi = \sqrt{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \tag{2}$$

Y est l'angle d'Yvon - Takabayasi :

$$tg\ Y = \hat{\Omega}/\Omega \tag{3}$$

En écrivant que la divergence de $T^{\lambda\mu}$ est égale à la densité volumique de force de Lorentz on fait apparaître l'équation d'évolution de la vitesse et par voie de conséquence, puisque les quadrivecteurs vitesse et spin sont orthogonaux, celle du spin.

Les équations de B.M.T. constituent un cas particulier de ces équations. Elles résultent d'hypothèses simplificatrices qui seront ultérieurement précisées.

Dans une métrique riemannienne de signature $(+---)$, en unités C.G.S. Gauss, les équations de B.M.T. s'écrivent, avec

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \ , \ x^o = ct \quad , \qquad \alpha, \beta \ = 0,1,2,3$$

$$m_0 c^2 \dot{u}^\alpha = q F^{\alpha\beta} u_\beta \quad , \quad \dot{u}^\alpha = D u^\alpha / ds \tag{4}$$

$$m_0 c^2 \dot{w}^\mu = \frac{g_0}{2} q \ F^{\mu\varrho} w_\rho + \left(\frac{g_0}{2} - 1\right) u^\mu \left(q \ w_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta\right), \dot{w}^\mu = D w^\mu / ds \tag{5}$$

m_0, q et g_0 désignent respectivement la masse propre, la charge et le rapport gyromagnétique. Ce dernier a pour expression :

$$g_0 = 2\left(1 + q^2/hc\right) \quad , \quad \frac{q^2}{hc} = 1,159\ 10^{-3} \tag{6}$$

$u^{\alpha} et w^{\mu}$ désignent respectivement la vitesse d'univers et le vecteur de Pauli - Lubanski. Définis à partir de l'onde et des matrices de Dirac, (cf. [4]), ils sont tels que :

$$u^{\alpha} u_{\alpha} = 1 \quad , \quad w^{\mu} w_{\mu} = -1 \quad , \quad u^{\lambda} w_{\lambda} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla_{\alpha} \left(\varpi \ u^{\alpha} \right) = 0 \quad \text{(équation de continuité)} \tag{8}$$

$$\nabla_{\alpha} \left(\varpi \ w^{\alpha} \right) = 2 \frac{m_0 c}{\hbar} \varpi \ sin \ Y \tag{9}$$

$F^{\alpha\beta}$ représente le champ électromagnétique extérieur à l'électron.

Les équations (4) et (5) sont spécifiques de la particule ponctuelle appellée électron.

Les équations d'évolution qui vont être établies concernent le petit domaine fluide que constitue l'électron. Nous verrons que ces nouvelles équations pourront être ramenées à celles de B.M.T., soit par identification directe, soit par intégration sur le volume de "l'électron étendu".

Équation d'évolution du fluide que constitue l'électron.

Il a été montré en [4] que le tenseur d'impulsion-énergie symétrisé $T^{\lambda\mu}$ du champ de Dirac pouvait être écrit : (voir aussi l'Annexe)

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e \left[\psi^+ \left(\hat{u}^{\mu} \hat{p}^{\lambda} + \hat{u}^{\lambda} \hat{p}^{\mu} \right) \psi \right] - \frac{q\varpi}{2} \left(u^{\mu} A^{\lambda} + u^{\lambda} A^{\mu} \right) \tag{10}$$

$\hat{u}^{\mu}$ et $\hat{p}^{\mu}$ désignent respectivement l'opérateur vitesse d'univers et l'opérateur d'impulsion-énergie. A^{λ} est le quadrivecteur potentiel électromagnétique. La recherche d'un analogue hydrodynamique incite à poser :

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left(u^{\mu} p^{\lambda} + u^{\lambda} p^{\mu} \right) - \frac{q\varpi}{2} \left(u^{\mu} A^{\lambda} + u^{\lambda} A^{\mu} \right) - p g^{\lambda\mu} + \Pi^{\lambda\mu} \tag{11}$$

p et $\Pi^{\lambda\mu}$ correspondent respectivement à la pression scalaire et au tenseur symétrique de viscosité. Le tenseur d'impulsion-énergie $T^{\lambda\mu}$ doit satisfaire les deux conditions suivantes :

$$T^{\lambda}_{\ \lambda} = m_0 c^2 \ \varpi \ cos \ Y \tag{12}$$

$$T^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta} = q \ \varpi \ F^{\alpha\beta} \ u_{\beta} = f^{\alpha} \tag{13}$$

(force de Lorentz)

Le calcul explicite de la divergence $T^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta}$ conduit à définir le quadrivecteur densité volumique d'impulsion-énergie p^α par la relation :

$$p^\alpha = m_0 c^2 \ \varpi \ cos \ Y u^\alpha + q \ \varpi \ A^\alpha + s^\alpha \tag{14}$$

où s^α désigne un quadrivecteur inconnu qu'il faudra préciser par la suite. Compte tenu de ces définitions, $T^{\lambda\mu}$ s'écrit :

$$T^{\lambda\mu} = m_0 c^2 \ \varpi \ cos \ Y u^\lambda u^\mu - g^{\lambda\mu} p + \frac{1}{2}\left(u^\lambda s^\mu + u^\mu s^\lambda\right) + \Pi^{\lambda\mu} \tag{15}$$

La condition (12) implique que :

$$4 \ p = s^\lambda \ u_\lambda + \Pi^\lambda{}_\lambda \tag{16}$$

Conformément à [9], le facteur de $u^\lambda u^\mu$ dans (15) peut être écrit:

$$m_0 c^2 \ \varpi \ cos Y = \rho \ c^2 + \rho \ \epsilon + p \tag{17}$$

ρ et ϵ désignent respectivement la masse spécifique et l'énergie interne par unité de masse du fluide constitué par la matière de l'électron.

$$\rho = m_0 \varpi \tag{18}$$

on pose :

$$\tilde{p} = s^\lambda u_\lambda / 2 \tag{19}$$

Suivant que l'on écrive (15) sous la forme :

$$T^{\lambda\mu} = m_0 c^2 \ \varpi \ cos \ Y \ u^\lambda u^\mu - g^{\lambda\mu} \ p + \frac{s^\lambda u^\mu + s^\mu u^\lambda}{2} + \Pi^{\lambda\mu} \tag{20}$$

ou sous la forme

$$T^{\lambda\mu} = \left(\rho c^2 + \rho \ \epsilon + p\right) u^\lambda u^\mu - g^{\lambda\mu} p + \frac{s^\lambda u^\mu + s^\mu u^\lambda}{2} + \Pi^{\lambda\mu} \tag{21}$$

la condition (13) conduit, soit à l'équation du mouvement, soit à la formulation thermodynamique. Celle-ci se traduit par :

$$\frac{D\epsilon}{ds} + p\frac{D}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}u_\alpha \Pi^{\alpha\beta}_{;\beta} - \tilde{p}\frac{D}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\dot{s}_\alpha u^\alpha + s^\alpha_{;\alpha}\right)/2\rho \tag{22}$$

Prolongeant l'analogie, on peut encore écrire :

$$T\frac{DS}{ds} = \frac{D\epsilon}{ds} + p\frac{D}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) = a \tag{23}$$

a est une quantité inconnue, homogène à une accélération. T et S sont, par analogie, la "température" et l'"entropie" de l'électron.

Si l'on pose :

$$A = u_\alpha \Pi^{\alpha\beta}_{;\beta} \tag{24}$$

la relation (22) s'écrit :

$$\tilde{p}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi} = A + a\rho + \left(\dot{s}_\alpha u^\alpha + s^\alpha_{;\alpha}\right)/2 \tag{25}$$

Par ailleurs, l'emploi de la formule (20) conduit aux relations suivantes, qui constituent les équations du mouvement :

$$m_0 c^2 \varpi \frac{DcosY}{ds} - \frac{Dp}{ds} = a\rho \tag{26}$$

et

$$m_0 c^2 \varpi \; cos \; Y \quad \dot{u}^\alpha = f^\alpha + \Phi^\alpha \tag{27}$$

avec

$$\begin{cases} \Phi^\alpha = p^{,\alpha} - (\dot{p} + a\rho)\, u^\alpha - \Pi^{\alpha\beta}_{;\beta} \\ \qquad\qquad -\frac{1}{2}\left[\dot{s}^\alpha + s^\beta_{;\beta} u^\alpha + s^\beta u^\alpha_{;\beta} - s^\alpha \frac{\dot{\varpi}}{\varpi}\right] \\ \quad (\Phi^\alpha u_\alpha = 0) \end{cases} \tag{28}$$

Jusqu'ici, aucune hypothèse "gratuite" n'a été faite, ni au niveau du calcul, ni au niveau de la physique. $a, p, s^\alpha, \Pi^{\alpha\beta}$ sont encore indéterminées. Toutefois, on sait que s^α, u^α, p et $\Pi^{\alpha\beta}$ sont reliées par l'équation (16)

$$4p = s^\alpha u_\alpha + \Pi^\alpha_{\ \alpha}$$

Le changement de fonction inconnue

$$p = \tilde{p} + b \tag{29}$$

se traduit par :

$$\Pi^{\alpha}_{\alpha} = s^{\alpha} u_{\alpha} + 4b \tag{30}$$

résultat qui incite à formuler l'hypothèse (H1) :

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(s^{\alpha}u^{\beta} + s^{\beta}u^{\alpha}\right) + g^{\alpha\beta} b \qquad \text{(H1)} \tag{31}$$

Cette première hypothèse sur la structure de $\Pi^{\alpha\beta}$, permet d'écrire le tenseur $T^{\alpha\beta}$ sous la forme :

$$T^{\alpha\beta} = m_0 c^2\ \varpi\ cos\ Y\ u^{\alpha}u^{\beta} - g^{\alpha\beta}\tilde{p} + s^{\alpha}u^{\beta} + s^{\beta}u^{\alpha} \tag{32}$$

De (31) on déduit :

$$\Pi^{\alpha\beta}_{\ ;\beta} = b'^{\alpha} + \left(\dot{s}^{\alpha} + s^{\beta}_{;\beta}u^{\alpha} + s^{\beta}u^{\alpha}_{;\beta} - s^{\alpha}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi}\right)/2 \tag{33}$$

et

$$A = u_{\alpha}\Pi^{\alpha\beta}_{\ ;\beta} = -\tilde{p}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi} + \dot{b} + \left(\dot{s}^{\alpha}u_{\alpha} + s^{\alpha}_{;\alpha}\right)/2 \tag{34}$$

D'où :

$$\tilde{p}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi} = -A + \dot{b} + \left(\dot{s}^{\alpha}u_{\alpha} + s^{\alpha}_{;\alpha}\right)/2 \tag{35}$$

La comparaison de (35) avec (25) montre que :

$$\dot{b} = 2\ A + a\ \rho \tag{36}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{b} + a\rho = 2(A + a\rho) = 2\left[\tilde{p}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi} - \left(\dot{s}^{\alpha}u_{\alpha} + s^{\alpha}_{;\alpha}\right)/2\right] \tag{37}$$

et

$$\Phi^{\alpha} = \left(g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta}\right)\psi_{\beta} \tag{38}$$

avec

$$\psi_\beta = \tilde{p}_{,\beta} - \dot{s}_\beta - s^\lambda_{;\lambda} u_\beta - \dot{s}^\lambda u_{\beta;\lambda} + s_\beta \dot{\varpi}/\varpi \tag{39}$$

d'où l'équation du mouvement du "point courant" du fluide électron :

$$m_0 c^2 \varpi \; cos \; Y \; \dot{u}^\alpha = q \; \varpi \; F^{\alpha\beta} \; u_\beta + \left(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta\right) \psi_\beta \tag{40}$$

De la relation d'orthogonalité

$$u^\alpha w_\alpha = 0$$

on déduit :

$$u_\mu \left[m_0 c^2 \varpi \; cos \; Y \; \dot{w}^\mu - q \; \varpi \; F^{\mu\rho} w_\rho + u^\mu \; \psi^\rho \; w_\rho\right] = 0 \tag{41}$$

Cette relation est en particulier satisfaite par la condition forte que constitue l'hypothèse (H2) :

$$m_0 c^2 \varpi \; cos \; Y \; \dot{w}^\mu = q \; \varpi \; F^{\mu\rho} w_\rho - u^\mu \psi^\rho w_\rho \qquad \text{(H2)} \tag{42}$$

Les relations (40) et (42) constituent les équations d'évolution de la vitesse d'univers et du spin pour le "point courant" de l'électron.

Grâce à l'hypothèse (H1) (relation (31)) les expressions (38), (40) et (42) ne font plus intervenir que les quantités u^α, s^α, w^α, ϖ, cos Y et leurs dérivées.

Les quantités auxiliaires a et b interviennent encore dans les relations (37) et (26), cette dernière pouvant être écrite :

$$m_0 c^2 \; \varpi \frac{DcosY}{ds} - \frac{D\tilde{p}}{ds} = \dot{b} + a\rho \tag{43}$$

Les développements effectués en [4] étaient basés sur les conditions fortes :

$$a = 0, b = 0 \tag{44}$$

celles-ci signifient que l'électron est isentropique et que la pression qui y règne est égale à $\tilde{p} = s^\lambda u_\lambda/2$.

Une condition plus faible est constituée par l'hypothèse (H3) :

$$\dot{b} + a\rho = 0 \qquad \text{(H3)} \qquad (45)$$

Dans ce cas, a et b peuvent être différents de zéro. L'électron n'est plus isentropique, la pression n'est plus strictement égale à $\tilde{p}$, mais il se trouve que les relations (37) et (43) sont encore celles qui avaient orienté l'étude effectuée en [4], c'est-à-dire :

$$\tilde{p}\frac{\dot{\varpi}}{\varpi} = \left(\dot{s}^{\alpha}u_{\alpha} + s^{\alpha}_{;\alpha}\right)/2 \qquad (46)$$

et

$$m_0c^2\varpi\frac{D\ \cos\, Y}{ds} = \frac{D\tilde{p}}{ds} \qquad (47)$$

on fait alors une quatrième hypothèse, $\tilde{p}$ est proportionnel à ϖ:

$$\frac{\dot{\tilde{p}}}{\tilde{p}} = \frac{\dot{\varpi}}{\varpi} \qquad \text{(H4)} \qquad (48)$$

ce qui entraîne :

$$s^{\alpha}_{;\alpha} = s_{\alpha}\ \ \dot{u}^{\alpha} \qquad (49)$$

$$\tilde{p} = K\ m_0c^2\varpi \qquad (50)$$

K désignant une constante sans dimension. Ces relations sont en particulier satisfaites par l'hypothèse "minimum" (H5).

$$s^{\alpha} = 2\ K\ m_0c^2\ \varpi\ u^{\alpha} \qquad \text{(H5)} \qquad (51)$$

De ce fait, ϖ_0 désignant une constante :

$$cos\ Y = 1 - K\ Log\frac{\varpi_o}{\varpi} \qquad (52)$$

pourvu que

$$\begin{cases} 0 \leq K\ Log\frac{\varpi_o}{\varpi} \leq 2 \\ \left(K > 0, \frac{\varpi_o}{\varpi} > 1\right) \end{cases} \qquad (53)$$

K étant positif, ϖ_o représente la valeur maximale que peut prendre la fonction densité ϖ. Elle correspond à cos Y = 1 et donc à $\Omega = \varpi$ puisque $\Omega = \varpi$ cos Y.

Il est temps d'expliciter les équations (40) et (42) compte tenu des trois hypothèses (H3), (H4), (H5).

On pose :

$$cos\ Y = 2/g \tag{54}$$

g est une fonction dont le module est supérieur ou égal à deux; c'est par définition le "rapport gyromagnétique local". Au moyen de g, les deux équations (40) et (42) s'écrivent :

$$m_0c^2\dot{u}^\alpha = \frac{g}{2(1+2Kg)}qF^{\alpha\beta}u_\beta + \frac{Km_0c^2g}{2(1+2Kg)}\left(\frac{\varpi^{,\alpha}}{\varpi} - \frac{\dot{\varpi}}{\varpi}u^\alpha\right) \tag{55}$$

et

$$\begin{cases} m_0c^2\dot{w}^\mu = \frac{g}{2}qF^{\mu\rho}w_\rho + \frac{Kg^2}{1+2Kg}u^\mu\left(qw_\alpha F^{\alpha\beta}u_\beta\right) \\ \qquad\qquad -\frac{Km_0c^2g}{2(1+2Kg)}u^\mu\left(\frac{\varpi_{,\alpha}}{\varpi}w^\alpha\right) \end{cases} \tag{56}$$

Ces équations qui déterminent en chaque point de l'électron la vitesse d'univers et le spin ressemblent étrangement aux équations de B.M.T. Elles en diffèrent par les coefficients et aussi par les termes en $\varpi^{,\alpha}$, $\dot{\varpi}$.

Le problème qui se pose dès maintenant est de savoir si elles peuvent conduire aux équations (4) et (5) de B.M.T.

Passage aux équations de B.M.T.

L'identification directe des équations (55) et (56) avec les équations (4) et (5) s'effectue en écrivant :

$$\frac{g}{2(1+2Kg)} = 1, \quad \frac{g}{2} = \frac{g_0}{2}, \quad \frac{Kg^2}{1+2Kg} = \frac{g_0}{2} - 1 \tag{57}$$

et

$$\varpi^{,\alpha} = 0 \quad , \quad \dot{\varpi} = 0 \tag{58}$$

Les équations (57) sont satisfaites par :

$$K = \frac{g_0 - 2}{4g_0} \quad \text{et} \quad g = g_0 \qquad \dagger \tag{59'}$$

ou encore, en posant

$$\varepsilon = q^2/hc \tag{60}$$

et compte tenu de (6)

$$K = \frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon)} \tag{61}$$

De (52) et (54) on déduit :

$$\varpi = \varpi_o e^{-4} \qquad \ddagger \tag{63}$$

L'électron de B.M.T. est un électron "solide" pour lequel la densité est égale au produit de la densité maximum ϖ_o par l'inverse de la puissance quatrième de e.

Une deuxième méthode de passage aux équations de B.M.T. consiste à intégrer les équations (55) et (56) sur tout le domaine de l'électron que l'on supposera "équi-s" : tous les points du domaine fluide se trouvent au même temps propre "s" (cf. [11]). dVo désignant un élément de volume scalaire, les équations (55) et (56) sont intégrées après avoir été multipliées par ϖ et par application du théorème de la moyenne :

$$\left\{ \begin{aligned} &\overline{(m_0 c^2 \dot{u}^\alpha)} \int \varpi \, dVo = \overline{(qF^{\alpha\beta} u_\beta)} \int \tfrac{g \; \varpi \; dVo}{2(1+2Kg)} + \\ &\qquad m_0 c^2 \left(\overline{\tfrac{\varpi^{,\alpha}}{\varpi} - \tfrac{\dot{\varpi}}{\varpi} u^\alpha} \right) \int \tfrac{Kg \; \varpi \; dVo}{2(1+2Kg)} \end{aligned} \right. \tag{64}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\overline{(m_0 c^2 \dot{w}^\mu)} \int \varpi \, dVo = \overline{(qF^{\mu\rho} w_\rho)} \int \tfrac{g}{2} \varpi \, dVo + \\ &\qquad \overline{(u^\mu q \; w_\alpha \; F^{\alpha\beta} u\beta)} \int \tfrac{K \; g^2 \; \varpi \; dVo}{1+2Kg} - \\ &\qquad m_0 c^2 \overline{\left(u^\mu \tfrac{\varpi_{,\alpha}}{\varpi} w^\alpha\right)} \int \tfrac{Kg \; dVo}{2(1+2Kg)} \end{aligned} \right. \tag{65}$$

† *a priori* g_0 pourrait être quelconque, pourvu que $g_0 \geq 2$.

‡ ϖ_o, valeur de référence - peut être définie à partir de la masse m_0, et du rayon classique de l'électron r_0 par exemple.

Etant donné que, compte tenu de (52) et (54), g a pour expression:

$$g = \frac{2}{1 - K\ Log\ \left(\frac{\varpi_o}{\varpi}\right)} \tag{66}$$

si dV_0 est tel que :

$$\int \varpi\ dV_0 = 1 \tag{67}$$

on doit vérifier que :

$$\begin{cases} \int \frac{g\ \varpi\ dV_0}{2(1+2Kg)} = 1 \\ \int \frac{g}{2}\varpi\ dV_0 = \frac{g_0}{2} \\ \int \frac{K\ g^2\ \varpi\ dV_0}{1+2Kg} = \frac{g_0}{2} - 1 \end{cases} \tag{68}$$

L'hypothèse (H6)

$$dV_0 = d\left(\frac{1}{\varpi}\right) \tag{69}$$

permet, en intégrant entre les deux valeurs de ϖ, ϖ_1 et ϖ_2 telles que:

$$\varpi_1 = e\varpi_2 \tag{70}$$

(e : exponentielle) de vérifier les équations (68) pourvu que $X = e^{-K}$ satisfasse l'équation :

$$4X^{\left(1+\frac{g_0}{2}\right)} - 3X^{\left(\frac{g_0}{2}\right)} - 5X + 4 = 0 \tag{71}$$

d'où l'on tire après un calcul sur CRAY[1]

$$K = 2,90091.10^{-4} = (g_0 - 2)/4g_0 \tag{72}$$

Si alors on pose

$$\mathcal{A}^{-1} = q/m_0c^2 \tag{73}$$

($\mathcal{A}$ est homogène à un potentiel électromagnétique) les équations (64) et (65) peuvent être écrites :

$$\overline{(\dot{u}^\alpha)} = \mathcal{A}^{-1}\,\overline{(F^{\alpha\beta}u_\beta)} + \frac{g_0 - 2}{4g_0}\left[\overline{\left(\frac{\varpi^{,\alpha}}{\varpi}\right) - \left(\frac{\dot{\varpi}}{\varpi}u^\alpha\right)}\right] \tag{74}$$

[1] effectué par notre collègue Yves Martin du CEL-V.

$$\overline{(\dot{w}^{\mu})} = \frac{g_0}{2}\mathcal{A}^{-1}\,\overline{\left(F^{\mu P}w_{\rho}\right)} + \left(\frac{g_0}{2}-1\right)\mathcal{A}^{-1}\,\overline{\left(u^{\mu}w_{\alpha}F^{\alpha\beta}\mu_{\beta}\right)}$$

$$-\frac{g_0-2}{4g_0}\,\overline{\left(u^{\mu}\tfrac{\varpi_{,\alpha}}{\varpi}w^{\alpha}\right)} \tag{75}$$

Elles sont superposables[2] aux équations de Good [12] et Vandam et Ruijgrok [13] établies pour l'électron ponctuel, pourvu que l'on procède à l'identification :

$$\frac{g_0-2}{4g_0}\frac{\varpi^{,\alpha}}{\varpi} = \chi\frac{qh}{m_0^2c^3}w^{\rho}u^{\sigma}\nabla^{\alpha}\tilde{F}_{\rho\sigma} \tag{76}$$

Dans cette relation, qui exprime le gradient de la fonction densité ϖ en fonction du gradient du champ électromagnétique dual, χ est une constante ajustable. Les formules de Good correspondent à:

$$\chi = g_0/8\pi$$

d'où : $\frac{\varpi^{,\alpha}}{\varpi} = \frac{1+q^2/hc}{\pi}\left(\frac{h}{m_0c}\right)^2\frac{1}{q}w^{\rho}u^{\sigma}\nabla^{\alpha}\tilde{F}_{\rho\sigma}$ Le facteur constant est de l'ordre de 10^{-10} C.G.S. GAUSS.

Conclusion.

Le modèle hydrodynamique proposé, fondé sur l'identification du tenseur symétrisé du champ de Dirac au tenseur le plus général de l'hydrodynamique relativiste, a permis au moyen des six hypothèses exprimées par les relations (31), (42), (45), (48), (51) et (69), de retrouver les équations de B.M.T. Cependant les équations de B.M.T. correspondent à un électron "solide" et de ce fait ne peuvent présenter la même souplesse d'emploi que les équations du fluide (55) et (56) qui devraient leur être préférées. Celles-ci procèdent du tenseur d'impulsion-énergie :

$$T^{\alpha\beta} = m_0c^2\varpi\left[\left(1+4\ K+K\ Log\frac{\varpi}{\varpi_o}\right)u^{\alpha}u^{\beta} - Kg^{\alpha\beta}\right] \tag{77}$$

[2] sous réserve que des termes quadrupolaires de Good ne soient pas pris en compte.

qui fournit pour l'énergie "au repos" de l'électron, la valeur (indépendante de la métrique):

$$E\left(T^{o}_{\ o}\right) = m_0c^2(1-K) = m_0c^2\left[1-\frac{q^2}{4hc}\frac{1}{\left(1+\frac{q^2}{hc}\right)}\right] \tag{78}$$

tandis que le 4-vecteur impulsion énergie,

$$p^\alpha = m_0c^2\varpi\left(1+2\ K+K\ Log\frac{\varpi}{\varpi^0}\right)u^\alpha + q\ \varpi\ A^\alpha \tag{79}$$

fournit la valeur (en métrique de Minkowski) :

$$E\left(p_0\right) = m_0c^2(1-2K) = m_0c^2\left[1-\frac{q^2}{2hc}\frac{1}{1+\frac{q^2}{hc}}\right] \tag{80}$$

Cette dernière correspond à la correction de renormalisation indiquée par Heitler en [14] p. 298, formule 14', avec $\mu = m_0c^2$: $\delta\mu = \frac{\mu}{2\pi 137}\int\frac{-d\epsilon}{\epsilon^3} = m_0c^2\left(\frac{q^2}{hc}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -2m_0c^2K$

Les résultats obtenus à partir de ce modèle hydrodynamique déduit de l'équation de Dirac : -équation de BMT, correction de masse - sont suffisamment cohérents pour avaliser le concept d'"électron étendu".

Dans cette perspective nombre de problèmes restent à examiner :

- les relations d'"incertitude" (cf. [11]),
- les perturbations de trajectoire dues à $\varpi^{,\alpha}$, $\dot{\varpi}$, en liaison peut être avec la relation (76),
- le problème de l'énergie interne et de la pression, relié à la connaissance de $a = TDS/ds^{(1)}$,[3]
- l'analogie avec les "trous noirs" [15],

[3] L'énergie interne est liée à $a = TDS/ds$ par l'équation différentielle.

$$\dot{\epsilon} + \frac{\dot{\varpi}}{\varpi}\left[\epsilon - Kc^2 Log\left(\frac{\varpi}{\varpi^0}\right)\right] = a$$

avec $\epsilon = D\epsilon/ds, \qquad \varpi = D\varpi/ds$

- la recherche d'autres vecteurs s^α (cf. [16], [17]),
- éventuellement, l'élargissement de cette étude en partant de l'équation de Dirac - Pauli (terme anomal).

Mais, ce qu'il y a lieu de retenir, c'est qu'en rattachant la formulation corpusculaire, déterministe par nature, à l'équation de Dirac que certains peuvent considérer comme probabiliste, on montre que cette dernière s'intègre parfaitement dans la conception déterministe de de Broglie - Einstein, pourvu que l'on donne aux quantités ϖ et cos Y les significations qui leur ont été attribuées dans cette étude : ϖ représente la densité volumique propre de l'électron ([16], [17]), et $g = \frac{2}{cos\ Y}$ la "densité volumique propre de rapport gyromagnétique", l'élément de volume propre étant défini par $dV_0 = d(1/\varpi)$.

Annexe. L'équation de Dirac en espace riemannien.

L'équation de Dirac, (envisagée dans une métrique de signature $+---$), s'écrit :

$$\Gamma^\alpha \bar{\nabla}_\alpha \psi + i\mu\psi = 0 \quad \text{avec} \qquad \mu = m_0 c/\hbar \tag{A1}$$

Le symbole $\bar{\nabla}_\alpha$, lié à la dérivée de Lie de ψ (cf. [4], [8]) a pour expression :

$$\bar{\nabla}_\alpha = \partial_\alpha - \Omega_\alpha + ikA_\alpha \quad , \qquad k = q/\hbar c \tag{A2}$$

avec :

$$\Omega_\alpha = -\Gamma_\beta \Gamma^\beta_{;\alpha}/4 \tag{A3}$$

(connexion spinorielle)

La pression totale et l'énergie interne sont reliées par l'équation d'état :

$$p + m_0\varpi\epsilon = Km_0c^2\varpi\ Log\left(\frac{\varpi}{\varpi^0}\right) < 0$$

Lorsque a = 0 (électron isentropique)

$$\epsilon = Kc^2\left[Log\left(\frac{\varpi}{\varpi^0}\right) - 1\right] \quad , \quad p = Km_0c^2\varpi$$

Les matrices Γ^α sont des fonctions de l'espace et du temps par l'intermédiaire des tétrades $h^{(a)\alpha}$ de vecteurs locaux. Dans une transformation de coordonnées elles se comportent comme les composantes d'un vecteur d'univers. Elles sont de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma^\alpha = \Gamma_{(o)} h^{(o)\alpha} + \Gamma_{(i)} h^{(i)\alpha}; \qquad \alpha = 0,1,2,3; i = 1,2,3 \\ \Gamma_{(o)} = \begin{pmatrix} o & \sigma_o \\ & \\ \sigma_o & o \end{pmatrix}, \Gamma_{(i)} = \begin{pmatrix} o & -\sigma_i \\ & \\ \sigma_i & o \end{pmatrix} (\sigma_\alpha : \text{ matrices de Pauli}) \\ h^{(o)\alpha} h^{(o)}_{\ \ \alpha} = 1, h^{(i)\alpha} h^{(i)}_{\ \ \alpha} = -1, h^{(a)\alpha} h^{(b)}_{\ \ \alpha} = 0 \qquad a \neq b \\ g_{\alpha\beta} = \eta_{ab} h^{(a)}_{\ \ \alpha} h^{(b)}_{\ \ \beta}, \eta_{oo} = 1, \eta_{oj} = 0, \eta_{ij} = -\delta_{ij} \\ \eta^{ab} = g^{\alpha\beta} h^{(a)}_{\ \ \alpha} h^{(b)}_{\ \ \beta} \qquad (a,b,\alpha,\beta = 0,1,2,3) \end{array}\right. \tag{A4}$$

Les invariants de Dirac sont définis par :

$$\Omega = \psi^+ \begin{pmatrix} o & \sigma_o \\ & \\ \sigma_o & o \end{pmatrix} \psi \quad , \quad \hat{\Omega} = i\psi^+ \begin{pmatrix} o & -\sigma_o \\ & \\ \sigma_o & o \end{pmatrix} \psi \tag{A5}$$

A partir de Ω et $\hat{\Omega}$ on définit le scalaire ϖ

$$\varpi = \sqrt{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \tag{A6}$$

Les matrices hermitiques

$$\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} o & \sigma_o \\ & \\ \sigma_o & o \end{pmatrix} \Gamma^\alpha \tag{A7}$$

permettent de construire les 4-vecteurs vitesse d'univers u^α et spin w^α au moyen des relations:

$$\left\{\begin{array}{l} u^\alpha = \psi^+ \gamma^\alpha \psi / \varpi \\ w^\alpha = \psi^+ \begin{pmatrix} \sigma_o & o \\ & \\ o & -\sigma_o \end{pmatrix} \gamma^\alpha \psi / \varpi \end{array}\right. \tag{A8}$$

et d'expliciter le Lagrangien L d'où l'équation de Dirac peut être déduite.

$$L = \frac{i\hbar c}{2}\left[\psi^+\gamma^\alpha\bar{\nabla}_\alpha\psi - \left(\bar{\nabla}_\alpha\psi\right)^+\gamma^\alpha\psi\right] - m_0c^2\psi^+\Gamma_{(o)}\psi \tag{A9}$$

Le tenseur canonique $\theta^{\lambda\mu}$ déduit de L a pour expression :

$$\theta^{\lambda\mu} = \frac{i\hbar c}{2}\left[\psi^+\gamma^\mu\bar{\nabla}^\lambda\psi - \left(\bar{\nabla}^\lambda\psi\right)^+\gamma^\mu\psi\right] \tag{A10}$$

Ce tenseur est homogène à une densité volumique d'énergie, ce qui implique :

$$[\psi] \sim l^{-\frac{3}{2}} \quad \text{d'où} \quad [\varpi] \sim l^{-3}$$

On montre que le tenseur d'impulsion-énergie symétrisé, $T^{\lambda\mu}$, peut être écrit :

$$T^{\lambda\mu} = \left(\theta^{\lambda\mu} + \theta^{\mu\lambda}\right)/2 \tag{A11}$$

(cf. [4], [5])

Les opérateurs matriciels d'impulsion-énergie $\hat{p}^\lambda$et de vitesse d'univers $\hat{u}^\mu$ sont respectivement définis par :

$$\begin{cases} \hat{p}^\lambda = i\hbar c\left(\partial^\lambda - \Omega^\lambda\right), & \left[\hat{p}^\lambda\right] = ml^2t^{-2} \\ \hat{u}^\mu = \gamma^\mu & \left[\hat{u}^\mu\right] \text{ sans dimension} \end{cases} \tag{A12}$$

D'où l'expression du tenseur $T^{\lambda\mu}$ du champ de Dirac :

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left[\psi^+\left(\hat{u}^\mu\hat{p}^\lambda + \hat{u}^\lambda\hat{p}^\mu\right)\psi\right] - \frac{q\varpi}{2}\left(u^\mu A^\lambda + u^\lambda A^\mu\right) \tag{A13}$$

Remerciements.

Cette étude a vu le jour grâce à la bienveillance des autorités du Centre d'Etudes de Limeil - Valenton, que je tiens à remercier très vivement. Elles en ont permis la publication sous la forme des deux notes CEA 2705 et 2706 citées dans la bibliographie.

Mais je dois aussi exprimer toute ma gratitude à l'équipe de la Fondation Louis de Broglie que dirige Georges Lochak: MM. Bass, Cormier-Delanoue, Costa de Beauregard, Diner, Salmon et tout particulièrement MM. Dutheil, Fargues, Karatchentzeff, qui m'ont tour à tour encouragé, critiqué, donné l'occasion de m'exprimer au Séminaire de la Fondation. Je n'aurai garde d'oublier M. le Professeur Lichnerowicz qui m'a fait l'honneur de lire cette étude dans la version de la note CEA 2706. Son jugement a été pour moi un vif encouragement.

Références

[1] J. Frenkel, Z. Physik 37, 243 (1926).
[2] V. Bargmann, L. Michel, V.L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959)
[3] *The Physicist's Conception of Nature* edited by Jagdish Mehra - D. Reidel Publishing Company (1973).
[4] P. Paillère, *Investigations sur le champ de Dirac en géométrie de Riemann. Passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargmann - Michel - Telegdi pour un électron étendu.* Note CEA 2.705 du 16/11/92 (relative à une publication interne du 12/06/92 diffusée le 29/06/92.
[5] P. Paillère, *Note de synthèse sur le passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargmann - Michel - Telegdi.* Note CEA 2.706 du 16/11/92 (relative à une publication interne du 12/06/92 diffusée le 26/06/92). (La note 2.706 est une version abrégée de la 2.705).
[6] P. Paillère, *Aperçus sur la symétrisation du tenseur canonique d'impulsion énergie et sur la détermination du moment angulaire pour des variables de champ tensorielles à partir du principe de moindre action en géométrie de Riemann.* , Note CEA 2.641 du 09/10/89.
[7] O. Costa de Beauregard, - Thèse de Doctorat (1943) *Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac* , - CRAS Paris, 214, 904 (1942).
[8] Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde, G.D. Kerlick and James M. Nester, *General relativity with spin and torsion : Foundation and prospects*, Reviews of Modern Physics, Vol.48, N°3, July 1976.
[9] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Masson) 1955.*
[10] P. Paillère, *Aperçus sur l'équation de Dirac en Relativité Générale.* Note CEA n° 2419 d'Octobre 84.
[11] P. Paillère, *L'électron de Klein-Gordon "étendu" et les relations d'"incertitude".* Publication CEA 56239. Annales de la Fondation Louis de Broglie, **18**, n°1, 1993, 81-101.
[12] R.H. Good, Jr., *Classical equations of motion for a polarized particle in an electromagnetic field.* Physical Review Vol 125, n° 6, March 15, 1962.
[13] H. Van Dam and Th. W. Ruijgrok, *Classical relativistic equations for particles with spin moving in external fields.* Physica 104 A (1980) 281 - 297 North Holland P. Co.

[14] Heitler, *The quantum theory of radiation* (Oxford, Clarendon Press) (1957).
[15] R. Dutheil et J. P. Vigier, Bull. Soc. Royale Sciences, Liège, 52, 5 (1983).
[16] J. Yvon, *Equations de Dirac - Madelung.* Journal de Physique et le Radium, 1940, p. 18-24.
[17] T. Takabayasi, *Hydrodynamical description of the Dirac equation.* Il Nuovo Cimento Vol.III, N°2 Serie decima, 1° Febbraio, 1956.

(Manuscrit reçu le 25 juin 1992)