

## Réflexions sur l'irréversibilité microscopique fondamentale

A la mémoire de Louis de Broglie pour le centenaire de sa naissance 15 Août 1892

M. GAUDIN

Service de Physique Théorique, Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière  
du Commissariat à l'Energie Atomique, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

*...l'on doit toujours penser qu'un nouvel effort nous permettra, un jour ou l'autre, de pénétrer davantage dans l'analyse détaillée des liaisons causales qui assurent la succession des phénomènes physiques.*

Louis de Broglie\*

*L'histoire est presque entièrement intelligible a posteriori, mais l'avenir demeure totalement imprévisible, même si l'on connaît toutes les données de départ...*

Armand de Ricqlès†

RÉSUMÉ. Le texte publié ne constitue que la première partie plus technique, ayant sa consistance propre, d'un essai à caractère spéculatif sur la réalité des événements microscopiques appréhendée dans le cadre de la mécanique quantique usuelle. A cette partie conviendrait mieux l'exergue de ce fragment de conversation récemment rapporté entre Terletsy et Feynman. J.T.: *Par conséquent, on peut considérer les chemins de Feynman comme quelque chose de réel.* R.F.: *De la même manière que tout ce que nous représentons au sujet des objets physiques.*

C'est à partir de l'analyse de la probabilité de transition comme somme sur les doubles trajectoires (dans les deux sens du temps) qu'on introduit la notion de boucle corrélatrice de phase définie, support des événements microscopiques réels. Les faisceaux de

---

\* Annales de la Fondation L. de Broglie **2**, 69 (1977).

† "Un big-bang zoologique au Cambrien" La Recherche, Février 1992, p.227.

boucles sont des événements aléatoires globaux, objets d'un flux à travers la section observable qu'est l'espace-temps. L'idée d'une réalité sous-jacente aux trajectoires virtuelles est déjà stimulée par l'existence d'une densité configurationnelle asymptotique, fonction réelle obéissant à une équation hyperbolique réelle, avec une dimension supplémentaire d'action, et dont les bicaractéristiques sont les trajectoires classiques. D'autre part, une densité asymptotique de boucles n'est définissable qu'au prix d'une modification ( $\hbar \rightarrow \hbar - i\gamma$ ) qui ne serait plus simplement technique, mais traduirait l'existence d'une longueur de cohérence, en ouvrant la spéculation sur l'origine gravitationnelle de la réduction, comme cause et comme effet de l'occurrence des événements réels.

*ABSTRACT. The present work is only a self-contained more technical first part of a speculative essay on the reality of the microscopic events in the frame of usual quantum mechanics. For this part, a more suitable exergue would be the following fragment of conversation recently reported between Terletsky and Feynman. J.T.: Consequently, the Feynman paths may be considered as something real. R.F.: In the same manner as all we represent about physical objects.*

*Starting from the analysis of the probability transition as a sum over double paths, we introduce the notion of correlating loop with definite phase, support of the real microscopic events. Marked loops are random global events, object of flux through an observable section which is physical space-time. The idea of an underlying reality is comforted by the existence of an asymptotic configurational density of paths, real positive function obeying a real hyperbolic wave equation with a supplementary dimension of action, whose bicaracteristics are classical paths. In contrast, such an asymptotic density cannot be defined for the loops without a modification ( $\hbar \rightarrow \hbar - i\gamma$ ) which is no more technical, but a source of speculation on the existence of a coherence length and the gravitationnal origin of the reduction.*

## I. États et événements en mécanique quantique

La mécanique quantique (MQ) permet de répondre à la question schématique suivante: un système physique défini étant observé dans un état  $A$  au temps initial, quelle probabilité a-t-il d'être observé dans l'état  $B$  en un temps ultérieur fixé? La question se rapporte à deux faits d'expérience,  $A$  au temps 0,  $B$  au temps  $t > 0$ , qui constituent deux observations maximales consécutives sur le système défini par les dispositifs expérimentaux. Ces faits, décrits dans le langage approprié de la physique classique, et exprimés quantitativement par la mesure de

certaines grandeurs, sont enregistrés comme tels grâce à la propriété de métastabilité thermodynamique des appareils de mesure.

La transition de l'état initial  $A$  à l'état final  $B$  implique une évolution du système en question, dont la représentation idéale par le vecteur d'état est conservative et causale, mais cette évolution du système quantique de  $A$  à  $B$  est sans parallélisme avec celle du dispositif, sauf en ses deux termes extrêmes que sont l'état initial et l'état final. Alors, l'opération de mesure des observables du système définit postule l'existence d'événements microscopiques, actes d'existence accidentels et transitoires mais réels, dont la coïncidence avec des événements macroscopiques est cause efficiente d'un enregistrement irréversible. La précision de la mesure ou de la préparation s'exprime souvent en terme de localisation spatio-temporelle. La théorie et ses concepts permettent ensuite d'inférer que telle particule, de masse, de spin, de charge définis est passé au voisinage d'un point marqué de l'espace-temps  $M$ , ou avait telle vitesse, le long de telle trace de courbure et d'épaisseur mesurées, etc...

Dans l'hypothèse d'une physique corpusculaire, la question schématique de la MQ se réfère donc à deux ensembles d'événements localisés,  $A$  et  $B$ , termes de l'évolution temporelle d'un même système, mais dont la relation causale n'est qu'une corrélation, corrélation statistique exprimée par la probabilité conditionnelle déterminée de  $B$ , si  $A$ . Il n'y a de probabilité que sur un ensemble d'épreuves caractérisées. Dans l'interprétation commune de la MQ, l'indéterminisme quantique se situe dans l'acte de mesure. La préparation initiale du système étant idéalement effectuée dans l'état  $|a\rangle$  de connaissance maximale des observables  $A$  au temps 0, cette préparation ne détermine aucun événement ultérieur au sein du système microscopique — mais elle détermine un état  $|\psi_t\rangle = e^{iHt/\hbar}|a\rangle$  qui constitue le seul événement global au temps  $t$ , sorte de déformation au cours du temps de l'événement initial observé  $a$  (pour un système conservatif d'hamiltonien  $H$ )— parce qu'un événement n'est déterminé dans son essence que par le dispositif qui définit ses attributs observables et que ce dispositif est invariant jusqu'à la prochaine mesure  $B$ . L'ensemble des systèmes préparés identiquement (pour autant que l'homogénéité de l'espace-temps le permette), c'est-à-dire décrit par  $|\psi_0\rangle = |a\rangle$  au temps initial, constitue un ensemble statistique, puisque l'interprétation orthodoxe est probabiliste et que les probabilités peuvent être comprises comme des fréquences relatives.

L'ensemble est défini non seulement par sa préparation, mais par la nature des épreuves auquel il est soumis, ici la mesure de  $B$ , où les

événements  $b$  sont aléatoires. Dans le cadre usuel de la MQ, il n'y a pas de différence de nature entre l'événement  $a$  défini par l'occurrence ou la sélection par l'analyseur spectral de la valeur propre  $a$ , et l'état du système représenté par le vecteur  $|a\rangle$  ou le projecteur  $P_a$ . La répétition immédiate d'une mesure de  $A$  dans l'état  $|\psi_0\rangle = |a\rangle$  reproduit à nouveau l'événement  $a$  (probabilité unité), tandis que l'observation de l'événement correspondant strictement à l'état  $|\psi_t\rangle$  au temps  $t > 0$  n'est pratiquement possible que si  $A$  est une constante du mouvement; l'événement étant alors stationnaire. Il n'y a d'événements dans l'interprétation orthodoxe, que lors des préparation-mesure constituant les processus instantanés de réduction  $R$ , aux termes initiaux et finals des processus d'évolution temporelle unitaire  $U$ .

C'est cette dualité qui distingue le système quantique du système classique. Distinction certes empirique, mais distinction certaine des cas limites extrêmes ou d'échelle différente. L'évolution temporelle des corps macroscopiques, évolution qui peut être stochastique à température finie, mais fondée sur les lois conservatives et le développement hamiltonien correspondant au processus  $U$ , peut aussi être regardée comme une succession continue de processus  $R$ , puisque la classe des observables dites macroscopiques est mesurable à tout instant dans l'état du système évoluant selon la dynamique hamiltonienne.

Il y a cependant une restriction essentielle au type de réduction: la classe des observations macroscopiques sur un grand système est loin d'être maximale; elle ne suffit pas à définir complètement un état quantique. Ce qui caractérise pour l'observateur le corps macroscopique classique est son caractère objectif, en ce sens qu'il n'est pas besoin d'un super-dispositif expérimental pour en définir les grandeurs observables; il serait pratiquement impossible d'en concevoir un pour une mesure maximale. Heisenberg dit qu'il y a complémentarité entre la description d'un système par un vecteur d'état et l'actualisation classique de ce même système. Une telle conception tient pour contradictoire l'attribution d'un vecteur d'état à tout objet macroscopique devant servir d'indicateur. Cette distinction de traitement et de comportement est la base de la conception de Bohr et de Heisenberg, qui permet de placer pratiquement la coupure entre le système et le dispositif complémentaire dès que le niveau macroscopique est atteint. Il est non moins certain que la régression de Von Neuman jusqu'à l'ultime conscience de l'observateur est légitime, si l'on postule l'universelle validité de la MQ linéaire comme l'a montré Wigner avec la plus grande netteté. Dans ces conditions

la reconnaissance du comportement objectif des corps macroscopiques peut être interprétée comme une limitation de la validité de la MQ au niveau macroscopique. C'est l'argument de Penrose, dont la balle de cricket n'a jamais été vue dans un état de superposition cohérente. Puisque la réduction macroscopique au moins partielle, est une donnée de l'expérience commune, on a pu en inférer que cette réduction est déjà présente au niveau microscopique.

Tel est le point de vue adopté, menant à la recherche d'une mécanique quantique modifiée, et ceci avant même de pouvoir identifier sûrement la cause de modification, espérant seulement situer son point d'application. D'autres points de vue d'un grand intérêt proposent une issue au dualisme sans rien modifier, sinon l'interprétation, mais ce n'est pas le nôtre ici.

Nous nous proposons simplement d'examiner une modalité de cette réduction spontanée ou sans mesure, vue ici comme acte microscopique d'une *irréversibilité fondamentale* (Haag), en partant de la théorie quantique commune et du formalisme courant des *sommes sur les trajectoires*. Comme ce ne sont pas la théorie de la mesure, axiomatique ou physique, ni la problématique de l'apparence classique des systèmes ouverts, qui nous intéressent ici, mais la nature et la détermination des événements microscopiques individuels s'ils existent, il suffira pour notre investigation d'utiliser les formes primitives des principes. La section II introduit le concept limite de boucle corrélatrice, double trajectoire fermée, fondé sur le calcul d'une densité configurationnelle effectué en appendice A.

La notion est étendue section III à la corrélation d'événements multiples portés par une même boucle fermionique dans le cadre d'une théorie des champs rudimentaire. On y retrouve l'intérêt, pour le calcul d'une probabilité, d'introduire deux copies de l'espace-temps où les processus sont représentés par des diagrammes repliés, sur deux feuillets ou deux faces. La section IV rappelle le mécanisme formel de l'évolution irréversible des grands systèmes, c'est-à-dire la résorption des phases due à la dominance des singularités diagonales, qui trouve une représentation suggestive dans la coïncidence des états sur les deux faces. Mais ce rappel n'est que pour mieux situer dans le cadre connu, ce qui est le propre de l'irréversibilité fondamentale en question. La section V évoque un modèle récent de réduction microscopique provoquée par les fluctuations supposées d'un champ externe, notamment gravitationnel. On propose enfin une caractérisation des événements réels comme points de passage commun aux trajectoires conjuguées ou boucles en une zone de

jonction géométrique des deux répliques de l'espace-temps. Ces idées ou ces images n'ont qu'un caractère spéculatif ou évocateur, en l'absence de modèle cohérent et prédictif, et ne sont qu'une représentation des relations formelles établies (pour les sections IV et V, cf. Gaudin, préprint 92).

## II. Les boucles corrélatrices: leur densité comme fonction caractéristique de la probabilité

Dans l'esprit de la formulation de la mécanique quantique due à Feynman (space-time approach to non-relativistic quantum mechanics) considérons une suite définie de mesures maximales successives sur un même système,  $A, B, C, \dots$  au temps  $t_a < t_b < t_c < \dots$  ( $A$  représente un ensemble maximal d'observables compatibles, de même  $B, C, \dots$ ), et la suite des événements correspondants  $a, b, c, \dots$

L'évolution temporelle du système après la mesure  $A$  est décrite par l'état

$$|\psi_t\rangle = U(t - t_a) |a\rangle \equiv U(t) |a(t_a)\rangle \quad (1)$$

ce qui définit  $|a(t_a)\rangle$  ( $U(t) = e^{-iHt}$ ). L'amplitude de l'état  $|b\rangle$  dans  $|\psi_t\rangle$  au temps  $t = t_b$  est

$$\langle b | U(t_b - t_a) | a \rangle \equiv \langle b(t_b) | a(t_a) \rangle \quad (2)$$

et la probabilité conditionnelle d'observer  $b$  au temps  $t_b$ , si  $a$  au temps  $t_a$  est donc

$$\begin{aligned} p(a, b) &= |\langle a | U(t_a - t_b) | b \rangle|^2 \\ &= |\langle a(t_a) | b(t_b) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

qu'on écrira de façon rapide  $|\langle a|b\rangle|^2, \dots$ , s'il est entendu que  $a, b, c, \dots$  sont en fait le spectre de  $A(t_a), B(t_b), \dots$  dans la représentation de Heisenberg ( $A(t) = U^+(t)A U(t)$ ).

Pour une suite de mesures, la probabilité conditionnelle de  $c$ , si  $b, a$  est donc

$$p(a, b, c) = p(a, b)p(b, c) \quad (4)$$

avec la propriété

$$\sum_c p(a, b, c) = p(a, b) \quad (5)$$

On peut considérer un couple  $(B, C)$  de mesures successives comme un événement composé de probabilité  $p(a, b, c)$ , puisque  $\sum_{b,c} p(a, b, c) = 1$ .

La différence capitale entre les évolutions quantiques et classiques s'exprime dans l'inégalité

$$\sum_b p(a, b, c) \neq p(a, c) \quad (6)$$

ou encore

$$\sum_b |\langle a|b\rangle|^2 |\langle b|c\rangle|^2 \neq \left| \sum_b \langle a|b\rangle \langle b|c\rangle \right|^2 \quad (7)$$

L'évolution quantique de l'événement initial  $A$  à l'événement final  $C$  ne peut être décrite comme succession d'événements intermédiaires, réels comme  $A$  et  $C$ .

$$(A, C) \neq \bigcup_B (A, B)(B, C) \quad (8)$$

Ce sont seulement les amplitudes de transition qui admette cette décomposition comme somme sur les états intermédiaires, dits virtuels

$$\langle a|c\rangle = \sum_b \langle a|b\rangle \langle b|c\rangle, \quad (9)$$

ce qui a conduit Feynman, à la suite de Dirac, à la formulation de l'amplitude comme somme sur les trajectoires ou histoires intermédiaires possibles. Bien que l'image soit suggestive et réhabilite en quelque sorte le concept de trajectoire en MQ, celle-ci ne correspond qu'à l'interprétation ondulatoire par la superposition des amplitudes complexes, et non à l'interprétation corpusculaire par l'addition des probabilités des événements exclusifs, où chaque trajectoire virtuelle serait un de ces événements.

On peut se demander par contre, si l'événement composé  $(B, C)$ , ou  $(A, B)$ , ... —événement constitué du couple préparation initiale et mesure finale— ne pourrait s'exprimer comme union d'événements élémentaires exclusifs, dont le couple  $(A, B)$  ne serait que le “bord” ou le “contour apparent”, c'est-à-dire l'aspect phénoménal, partie externe seule observable dans  $M$  d'un événement global. Puisque le principe de causalité s'exprime en MQ, non par une détermination de  $B$  par  $A$ , mais par une corrélation statistique entre les 2 termes de l'événement composé  $(A, B)$ , est-il possible de discerner les liaisons causales élémentaires entre  $A$  et  $B$  et de reconnaître en elles des événements élémentaires non locaux,

exclusifs, ayant une certaine réalité, fût-ce cachée dans des dimensions supplémentaires ? C'est ce que Nelson exprime en disant: " Bell's theorem and experiment rule out determinism —their is an intrinsic randomness in nature that is not due to our ignorance of initial conditions— but they in no way preclude a treatment of quantum fluctuations as being physically real" . Il n'est cependant pas exclu que le physiquement réel, au sens de fait probabilisable, exclusif et indépendant, débordé la classe des événements locaux, séparables et réels dans  $M$ , marqués par une irréversibilité fondamentale au sens que lui donne Haag et dont nous cherchons précisément la cause. " If indeterminism is accepted it leads to a picture of an evolving history formed by individual events and causal ties" . Mais la distinction est appuyée " there exists *marked* points in space-time but they are not connected by *marked* world lines" .

C'est pourquoi il est utile de rechercher et d'analyser le support causal des événements marqués dans le cadre le plus proche de la MQ orthodoxe.

Considérons une classe de systèmes conservatifs à  $D$  degrés de liberté pour lesquels la " somme sur les trajectoires" puisse être définie comme limite sur des trajectoires polygonales dans l'espace de configuration selon la méthode originelle de Feynman. Celle-ci a été appliquée avec succès pour le calcul des amplitudes à des Lagrangiens du type

$$L = \frac{m}{2} \sum_{\alpha, \beta}^D g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \sum_{\alpha}^D A_{\alpha}(q) \dot{q}^\alpha - V(q) \quad (10)$$

pour des fonctions, potentiels  $V$ ,  $A_{\alpha}$ , ou métrique  $g_{\alpha\beta}$ , suffisamment régulières (Feynman, Nelson, de Witt,...). Dans le cas d'une particule scalaire ( $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ,  $A_{\alpha} = 0$ ), moyennant une condition technique assez faible sur  $V$ , Faris a prouvé l'existence de la limite de la somme de Feynman pour la fonction d'onde, sous la forme suivante:

$$\psi(q_0|t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int e^{i w_N / \hbar} \psi(q_N) \mathcal{D}_N q \quad (11)$$

avec les notations

$$\mathcal{D}_N q = \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{mN}{2\pi i \hbar t}} dq_j, \quad \frac{t}{N} = \tau. \quad (12)$$



$$w_N = \frac{m}{2\tau} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1})^2 - \tau \sum_{j=1}^N V(q_j) \quad (13)$$

forme discrétisée de l'action  $\int_0^t L(q, \dot{q}) dt$  le long du polygone

$$\mathcal{C}_N [q_0 q_1 \dots q_N] \quad ; q(t = j\tau) = q_{N-j} \quad (14)$$

et enfin le choix d'une masse complexe

$$\text{Im } m = \hbar\gamma \quad (15)$$

Le point qui nous importe ici est que l'analyse de Faris est faite pour  $\text{Im } m > 0$ , avant de passer à la limite  $\text{Im } m = +0$ . Pour  $\text{Im } m > 0$  la somme sur les trajectoires polygonales à  $N$  côtés tend vers la solution de l'Eq. de Schrödinger complexifiée en  $m$ .

Dans son article, Feynman avait proposé le procédé formel  $\text{Im } \hbar^{-1} > 0$ , qui est une hypothèse technique distincte de celle de Faris, aux conséquences déjà différentes pour l'oscillateur par exemple (cf. Appendice A). Pour le strict propos de cette section qui est fondé sur l'existence d'une densité asymptotique de trajectoires, la condition de Faris nous suffirait. Mais pour une raison d'universalité, je préfère adopter l'hypothèse de Feynman qui entraîne l'existence de la limite (11) pour une classe de potentiel incluse dans celle de Faris et admettant, en outre, une borne inférieure de l'action. Dans la suite, on affecte donc une partie imaginaire négative à la constante de Planck, de la dimension d'une action, aussi petite qu'il le faut pour que la mécanique quantique ainsi formellement modifiée ne diffère pas dans ses vérifications actuelles de la MQ unitaire. La modification est ainsi universelle dans le domaine quantique.

Dans le cadre du modèle considéré à une seule masse  $m$ , on posera

$$\frac{m}{\hbar} = \mu = \mu_0 + i\gamma \quad , \quad \gamma > 0 \quad (16)$$

Enfin on gardera  $N$  fini, aussi grand qu'il faut pour que les estimations asymptotiques approchent leur limite supposée. La formule (11) nous donne alors une expression convergente de la fonction de transformation figurant dans l'intégrant

$$\psi(q_0, t) = \int \langle q_0(t) | q_N(0) \rangle \psi(q_N) dq_N, \quad t > 0 \quad (17)$$

Nous avons donc en général

$$\langle a|b \rangle = \int \exp(iw_N/\hbar) \mathcal{D}_N q \quad (18)$$

où  $w_N = w(\Gamma_N)$  est l'expression discrétisée de l'action entre les deux événements locaux  $a$  et  $b$ , associée à la chaîne polygonale  $(\Gamma_N)$  à  $N$  côtés. On introduit l'action réduite  $\ell$  (par unité de masse) analogue à un temps propre, telle que

$$w = m\ell, \quad \text{ou} \quad w/\hbar = \mu_0\ell, \quad (19)$$

et la phase  $\varphi = \mu_0\ell = \text{Re } \mu\ell$ , pour écrire

$$\langle a|b \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu_0\ell} \tilde{\rho}_N(\ell) d\ell \quad (20)$$

où  $\tilde{\rho}_N(\ell)d\ell$  est le volume de l'espace de configuration des chaînes  $(\Gamma_N)$  pondéré par le facteur d'atténuation  $e^{-\gamma\ell}$ , et  $\ell_0 = \frac{w_0}{m}$ , l'action minimale sur l'ensemble des chaînes  $\Gamma_N$ ,  $\forall N$ , c'est-à-dire l'action classique entre  $a$  et  $b$ . Nous avons cependant oublié dans (20) que le facteur de normalisation dans  $\mathcal{D}_N q$  (12) contient la phase  $-\frac{DN\pi}{4}$  que nous devons ajouter à la phase  $\varphi$  de l'intégrand, ce qui revient à remplacer la borne inférieure  $\ell_0$  par  $\ell_0 - \frac{ND\pi}{4\mu_0} = \ell'_0$ , qui dépend alors de  $N$ .

Si nous avons maintenu l'hypothèse de Faris, le facteur d'atténuation serait seulement cinétique

$$\exp\left(-\frac{\gamma}{2\tau} \sum_1^N (q_j - q_{j-1})^2\right). \quad (21)$$

On sait qu'il n'existe pas d'espace de trajectoires continues  $\Gamma$ , muni d'une mesure positive, tel que l'intégrale fonctionnelle correspondante soit la limite (20) (B. Simon). A l'exception du cas  $\mu_0 = 0$ , ou plus généralement dans la théorie en temps imaginaire pur: théorie de la diffusion à température inverse  $\beta = it$ , ou théorie euclidienne des champs. Le volume de l'espace des chaînes est alors pondéré par le facteur gaussien (21) et la mesure ainsi composée est celle des trajectoires browniennes de Wiener-Kac. Dans notre hypothèse  $\text{Im } \mu = \gamma > 0$  demeure une trace, évanescence avec  $\gamma$ , du caractère brownien.

Examinons l'ordre de grandeur des phases contribuant à l'intégrand de (20) (cf. Zinn-Justin, pour le cas euclidien). Prenons le cas libre où

le module de l'intégrand est essentiellement une distribution de Poisson dans la variable  $x = \gamma(\ell - \ell_0)$

$$p_M(x) = \frac{x^M}{M!} e^{-x} \tag{22}$$

qui dans un voisinage  $O(\sqrt{M})$  de son maximum en  $M$  est uniformément approchée par la gaussienne

$$p_M(x) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi M}} \exp - \frac{(x - M)^2}{2M} . \tag{23}$$

on a pour l'amplitude ( $D = 1$ )

$$\sqrt{2\pi t} \langle a | b \rangle = \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu_0 \ell} p_{M-1}(\gamma(\ell - \ell_0)) d\ell . \tag{24}$$

Les configurations de chaîne dominantes quant à leur densité sont telles que  $\ell = \ell_0 + \frac{N}{2\gamma} + O(\sqrt{N})$ . Mais la moyenne du terme périodique  $e^{i\mu_0 \ell}$  ne peut être effectuée assez finement avec l'approximation gaussienne (23) qui ne donne pas le résultat correct.

Il est nécessaire de connaître le comportement asymptotique dans tout le domaine  $\ell/N$  fini, c'est-à-dire de garder la forme initiale (22).

L'évaluation asymptotiquement exacte de l'intégrale (20) ou (24), se fait évidemment en déplaçant le contour pour passer par le col dans le demi-plan supérieur en  $\ell = \ell_0 + \frac{iN}{2\mu}$ , à comparer avec le maximum lointain sur l'axe réel en  $\ell_0 + \frac{N}{2\gamma}$ . La contribution dominante à la phase est  $\frac{N\pi}{2}$ , soit  $\frac{\pi}{2}$  par maillon, exactement compensée par le facteur de normalisation  $i^{-N}$ . La contribution typique du potentiel à la phase est finie. C'est un des aspects les plus agréables de la méthode de Feynman que de factoriser la contribution d'une trajectoire due aux potentiels sous la forme du facteur invariant de jauge (à la limite)

$$\exp \frac{i}{\hbar} \left( \sum_{j=1}^N \tau V(x_j) - (x_j - x_{j-1}) \cdot \frac{A(x_j + x_{j-1})}{2} \right) \tag{25}$$

En effet,  $\tau \sum_j V(x_j) = t \langle V(x) \rangle$ , où  $\langle V \rangle$  est la valeur moyenne de  $V$  sur la trajectoire brownienne typique, donc finie. Il en va de même

pour le potentiel vecteur puisque  $\langle (x_j - x_{j-1})^2 \rangle = O(\tau)$ . Dans le cas de potentiel de jauge non-abelien, le facteur de phase est remplacé par une matrice unitaire associée à la trajectoire. Dans le cadre de la mécanique statistique, on aurait le concept de boucle de Wilson s'agissant de chaînes fermées.

Notons que la formule (20) pour l'amplitude n'est pas établie pour un état initial strictement ponctuel  $a \equiv q_N(0)$ , mais pour toute fonction d'onde normalisable  $\psi(q_N)$ . La représentation (20), comme transformée d'une fonction positive ( $N$  et  $\gamma$  finis) reste valide si  $a$  et  $b$  sont des paquets d'onde initiaux et finals d'amplitude non-négative, par exemple des paquets gaussiens.

Notre but est d'exprimer la corrélation physique entre  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de  $b(t)$  si  $a(0)$

$$p(a, b) = |\langle a | b \rangle|^2 \quad (26)$$

comme somme sur les trajectoires.

Cette idée remonte à Feynman et Hibbs qui introduisent la notion de "double path integral" pour le calcul des fonctions d'influence dans le cas d'un potentiel  $V$  aléatoire, comme procédé formel. L'intérêt physique du concept a été mis en valeur par Hoyle et Narlikar dans leur essai sur la quantification de l'électrodynamique de Wheeler et Feynman, qui est une théorie symétrique entre passé et futur (time-symmetric absorber theory).

Les deux types de trajectoires, conjuguées par renversement du sens du mouvement, doivent être associées dans le calcul du champ de réponse pour obtenir la généralisation quantifiée de cette électrodynamique symétrique. "We do not know the response of the universe except in a probability calculation". Si la phase est inutile, pourquoi la calculer ?

Supposant qu'on puisse surmonter, par discrétisation ou par renormalisation, la difficulté provenant de la localité absolue de  $A$  et  $B$ , la formule (26) donne la probabilité de  $b$ , si  $a$ . On peut aussi considérer l'occurrence du couple  $(a, b)$  comme l'événement composé probabilisable. Ceci rappelé on déduit de (20) et (26)

$$p(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu_0 v} r_N(v) dv \quad (27)$$

avec la définition

$$r_N(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}_N(\ell) \tilde{\rho}_N(\ell + v) d\ell \tag{28}$$

La fonction  $r_N(u)$  est la *fonction d'autocorrélation* de la densité asymptotique  $\rho_N(\ell)$ , formellement considérée comme densité d'un processus de Poisson (Blanc-Lapierre et Fortet). On a les propriétés de parité et de positivité

$$\begin{aligned} & \cdot r(u) = r(-u) > 0 \\ & \cdot r(u) \geq r(0) \\ & \cdot \sum_{i,j} r(u_i - u_j) z_i z_j > 0, \quad \forall u_i, z_i \text{ réels .} \end{aligned} \tag{29}$$

ce qui en fait une *fonction caractéristique*. C'est la transformée d'une mesure positive (ici une fonction puisque  $N$  est fini).

$$r(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu v} R(\mu) d\mu \tag{30}$$

telle que

$$R(\mu_0) = p(a, b) . \tag{31}$$

La formule (28) exprime que  $r(v)$  est la densité configurationnelle de boucles ( $\mathcal{C}$ ), ou chaînes fermées à  $2N$  maillons, constituées typiquement de deux chaînes  $\mathcal{C}_N(a, b)$  et  $\mathcal{C}'_N(b, a)$

$$(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_N(a, b) + \mathcal{C}'_N(b, a)$$

d'action totale  $\mu_0 v = \mu_0 \ell - \mu_0 \ell'$ .

On peut encore écrire la probabilité de l'événement composé  $(a, b)$  sous forme réelle

$$p(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\mu_0 v) r(v) dv , \tag{32}$$

avec  $\mu_0 = \frac{m}{\hbar}$ , où  $r(v)$  est la densité configurationnelle de *boucles marquées* par les événements ponctuels  $a$  et  $b$ . On n'a pas à distinguer les 2 orientations possibles de la boucle (parité de  $r$ ). La formule (32) qui exprime la probabilité de  $(a, b)$  comme une superposition réelle, ne peut évidemment pas trouver une interprétation *réaliste* immédiate en

terme d'événements élémentaires qui seraient l'occurrence dans l'espace-temps  $M$  des boucles liant  $a$  et  $b$ . En effet le " poids" d'une boucle d'action totale  $v = \ell - \ell'$  est  $\cos \mu_0 v$ , qui peut avoir les deux signes. L'éueil est de même nature que pour la fonction densité de Wigner, mais cependant l'oscillation et la densité sont ici distinguées par leur caractère intrinsèque.

On pourrait essayer de poursuivre la tentative réaliste par une interprétation analogique de la formule (32), dans le cadre de la théorie probabiliste des flux, ce qui revient en quelque sorte à assimiler les pseudo-probabilités à des courants plutôt qu'à des densités. La probabilité  $p(a, b)$  est la valeur de la fonction caractéristique d'un processus pour l'argument  $\mu_0 = \frac{m}{\hbar}$ , qui est la fréquence propre ici associée à toute boucle, lieu géométrique d'une particule de masse  $m$  marqué en  $a$  et  $b$ . C'est la fréquence interne du corpuscule de de Broglie. Considérons l'espace temps  $M$  comme la base d'un espace de dimension 5, avec une extra-dimension analogue à un temps propre ou à un angle. Considérons le substrat physique de  $M$ , c'est-à-dire le vide, comme siège d'un flux d'événements aléatoires globaux; que le lieu géométrique d'un tel événement global soit un continu unidimensionnel fermé, dont la projection sur  $M$  soit la boucle marquée. Si le flux d'événements boucles est l'analogie d'un courant électrique aléatoire à travers une section de conducteur, la valeur de la fonction caractéristique est la *puissance instantanée* à la fréquence  $\mu_0$ , correspondant au nombre d'événements produits par unité de temps propre. C'est la partie réelle d'une *impédance* qui pour les systèmes absorbifs est toujours positive, alors que pour le système quantique, l'impédance analogique  $\cos \varphi$  relative au déphasage  $\varphi$  n'a pas de signe défini, bien que la puissance totale intégrée soit positive en vertu de (29), comme fréquence relative d'occurrence des événements marqués.

On pourrait encore considérer la formule (32) comme résultant d'un bilan, par analogie avec la théorie des trous de Dirac, où le rôle des fermions serait ici tenu par les boucles marquées de phase  $\varphi$ , affectées d'un *coefficient d'apparence* continu,  $\cos \varphi$ , au lieu du nombre fermionique discret,  $\pm 1$ . Les événements observés dans l'espace physique résulteraient d'un bilan (établi par exemple sur la période d'une coordonnée interne cyclique) de la production des boucles marquées dans le demi-espace  $\cos \varphi > 0$ , de sorte que le flux d'événements de phase  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  entrant ou sortant à travers la section  $\cos \varphi = 0$  soit la surface apparente interne  $\cos \varphi \times r(\varphi)d\varphi$  dans une représentation sur

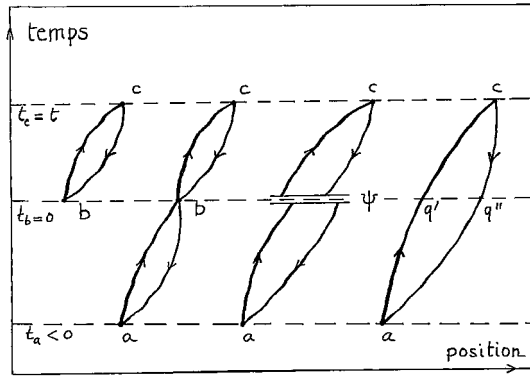


Figure 1. Boucles associées à divers processus de mesures idéales.

1. Préparation en  $q_b$ , mesure en  $q_c$

$$p(b, c) = |\langle q_b | q_c \rangle|^2 \quad (t_b = 0, t_c = t)$$

2. Préparation en  $q_a$ , mesures successives en  $q_b$  puis  $q_c$

$$p(a, b, c) = |\langle q_a | q_b \rangle|^2 |\langle q_b | q_c \rangle|^2 \quad (t_a < 0)$$

3. Préparation en  $q_a$ , mesure à  $t_b = 0$  dans l'état  $b = \psi$ , mesure à  $t_c = t$  en  $q_c$

$$p(a, \psi, c) = |\langle q_a | \psi(0) \rangle|^2 |\langle \psi(0) | q_c \rangle|^2$$

$$|\langle \psi(0) | q_c \rangle|^2 = \int \psi^*(q') \psi(q'') \langle q' | q_c \rangle \langle q'' | q_c \rangle^* dq' dq''$$

4. Préparation en  $q_a$ , à  $t_a < 0$ , mesure en  $q_c$  à  $t_c = t$ . Evolution jusqu'à  $t_c = 0$  vers l'état  $\psi(0)$

$$p(a, c) \equiv p(\psi, c),$$

$$a = a(t_a), \quad \psi = \psi(t_b), \quad t_a < 0, \quad t_b = 0.$$

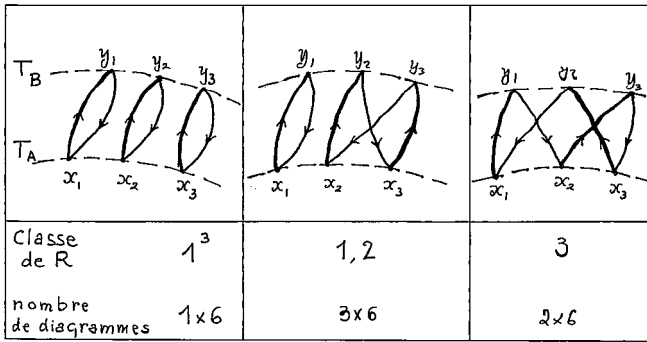
Dans le processus 3, l'état intermédiaire  $b = \psi$  est représenté par une double barre horizontale dont la longueur symbolise la dispersion spatiale de l'état  $\psi$  en  $t_b = 0$ . La brisure symbolise l'absence de continuité dans les trajectoires.

Dans le processus 4, la particule localisée en  $q_a$  au temps passé, après évolution unitaire en présence de champs et de collimateurs se trouve dans l'état  $\psi$  au temps  $t_b = 0$ . Si le dispositif est le même que dans le processus 3, on a évidemment  $p(a, b) = 1$ , puisque  $a(t_a) \rightarrow \psi(t_b)$ ,  $|\langle a | \psi \rangle| = 1$ .

le cylindre ( $e^{i\varphi}$ ,  $r(\varphi)$ ) du taux de production en fonction de la phase (mod  $2\pi$ ). La notion de surface apparente (de la face interne) est relative à la direction d'observation normale à la section, supposée la seule

possible dans  $M$ , comptée positivement dans le sens  $\varphi = 0$ , négativement dans le sens opposé.

En l'absence de données contraignantes sur l'espace interne ou de modèles prédictifs, l'analyse de la probabilité de transition de  $a$  et  $b$  dans le cadre de la MQ de Feynman ne permet d'attribuer qu'une ombre de réalité aux boucles marquées par deux événements réels, mais plongés dans un espace dont la dimension supplémentaire est analogue à une phase. On peut dire de la boucle qu'elle est corrélatrice puisqu'elle est le principe élémentaire (élément de tout un faisceau) de la liaison causale entre les deux événements ponctuels. Par la boucle, la liaison causale s'exerce dans les deux sens du temps; elle est symétrique entre passé et futur. On reviendra section IV sur ce qui pourrait distinguer la réalité phénoménale des événements marqués de la réalité cachée de la boucle qui les supporte. Rappelons que cette spéculation repose sur la seule construction de la densité configurationnelle faite (en Appendice A) au prix de l'hypothèse d'une durée de cohérence  $\gamma^{-1}$  finie, qui à la limite n'est plus qu'une hypothèse technique pour l'existence mathématique des sommes de Feynman.



**Figure 2.** La figure 2 représente les  $(3!)^2 = 36$  diagrammes numérotés répartis en 3 classes contribuant au calcul de la probabilité  $p(A, B)$  pour la transition  $A \rightarrow B$ .

$$a = (x_1 x_2 x_3) \quad b = (y_1 y_2 y_3).$$

Les lignes orientées  $A \rightarrow B$  propagent les fermions de la surface isochrone  $T_A$  à la surface  $T_B$  dans  $M$ , qu'on peut visualiser comme un premier feuillet. Les lignes de  $B \rightarrow A$  les propagent en remontant le temps dans  $\bar{M}$  représenté par un second feuillet. Le passage d'un feuillet à l'autre se fait aux points événements  $a$  et  $b$ .



Dans la section suivante, on essaye d'étendre la notion de boucle corrélatrice à un système de particules identiques en nombre indéfini ce qui relève en principe de la théorie locale des champs, mais on utilisera un formalisme rudimentaire suffisant pour l'intuition des idées.

La figure 2 illustre divers processus élémentaires, avec les doubles trajectoires ou boucles. La boucle est un concept limite définie pour  $a$  et  $b$  locaux. Strictement,  $p(a, b)$  n'est qu'une densité de probabilité.

### III. Corrélations réduites et boucles corrélatrices d'événements multiples

Le but de cette section est d'étendre la notion de boucle et de somme sur les boucles pour les probabilités de transition, à la situation spécifique des systèmes de particules identiques, situation relevant de la théorie des champs locaux, mais traitée ici de façon sursimplifiée bien que suffisante pour illustrer le propos.

Supposons que les opérations de préparation-mesure sur un système microscopique de particules massives puissent être idéalisées en une collection d'événements ponctuels compatibles. Par exemple localisation spatio-temporelle approchée à une longueur de Compton près de  $N$  fermions non relativistes de masse  $m$ , au temps  $t$ . Nous nous en tiendrons pour le raisonnement à la limite non-relativiste. Cependant l'extension relativiste devient inévitable si l'on veut affiner la localisation: la création de paires est alors possible et le nombre d'événements locaux est indéfini. La théorie des trous permet alors d'approcher un peu plus de la théorie des champs. Dans ce cas relativiste, on suppose un univers tel que les surfaces isochrones du temps cosmologique  $T = st$  soient régulières, sans points communs, et du genre espace, entre deux limites l'une passée, l'autre avenir. Supposons que cet univers soit le théâtre d'une série de mesures maximales  $A, B, C, \dots$  à des temps successifs  $T_A < T_B < T_C < \dots$  soient  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, \dots$  les états quantiques sur les surfaces isochrones (Tomonaga, Schwinger) ainsi préparés, dans un univers supposé dans un cas pur initial au temps passé  $-\infty$ . Par hypothèse

$$|a\rangle = |x_1 x_2 \dots x_M; T\rangle$$

$$x_j = (\vec{x}_j, t_j) \quad \text{avec} \quad t_j = t_j(x_j, T). \quad (1)$$

Pour avoir un état normé, il faudrait discrétiser l'espace à 3 dimensions des surfaces isochrones, ou bien considérer une base de fonctions

orthogonales localisées du genre Wannier. Le problème serait analogue dans une base non de position, mais d'impulsion, cas où il est résolu en enfermant le système dans une boîte de quantification.

On pourrait raffiner la description jusqu'à atteindre le niveau conceptuel de la théorie des champs locaux en introduisant les champs  $\psi_\alpha(x)$ ,  $\bar{\psi}_\alpha(x)$  relatifs à des particules de masse, de spin, de charge définis et l'on aurait

$$|a\rangle = |x_1 \dots x_M; T\rangle = \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_M}(x_M) |-\infty\rangle, \quad (2)$$

Revenons au simple modèle de  $N$  fermions non-relativistes sans spin.

La probabilité de la séquence d'événements globaux  $a$  en  $t_a$ ,  $b$  en  $t_b$ ,  $c$  en  $t_c$ , ... est

$$p(abc) = |\langle 0 | a\rangle|^2 |\langle a | b\rangle|^2 |\langle b | c\rangle|^2 \quad (3)$$

où  $|0\rangle$  désigne le cas pur initial (passé lointain) on a l'amplitude

$$\begin{aligned} |\langle a | b\rangle| &= \langle x_1(t_a) x_2(t_a) \dots x_N(t_a) | x_1(t_b) \dots x_N(t_b) \rangle \\ &= \langle x_1 x_2 \dots | U(t_a, t_b) | y_1 y_2 \dots \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

avec

$$x_j = x_j(t_a), \quad y_j = x_j(t_b) \quad (5)$$

S'il s'agit d'un système de fermions, la fonction de transformation  $\langle a | b\rangle$  est le déterminant suivant

$$\begin{aligned} \langle a | b\rangle &= \det |\langle x_\alpha(t_a) | x_\beta(t_b) \rangle|_N \\ &= \det |\langle x_\alpha | y_\beta \rangle|_N, \end{aligned} \quad (6)$$

on aurait un permanent pour des bosons. L'amplitude est solution de l'équation de Schrödinger dans un potentiel scalaire ou vecteur externe donné, ou peut obéir à l'équation de Dirac dans le cas du spin 1/2 etc... . Si le potentiel est indépendant du temps, on aura

$$\langle x(t_a) | y(t_b) \rangle = G(x, y | t), \quad t = t_b - t_a \quad (7)$$

De (6) et (7), on obtient

$$\begin{aligned} p(a, b) &= |\langle a | b\rangle|^2 \\ &= \sum_{P, Q} \prod_{\alpha=1}^N G(x_\alpha, y_{P\alpha} | t) G^*(x_\alpha, y_{Q\alpha} | t) \epsilon(P) \epsilon(Q), \end{aligned} \quad (8)$$

où  $P, Q$  sont 2 permutations courantes de  $\pi_N$ .

Or

$$\prod_{\alpha} G^*(x_{\alpha}, y_{Q\alpha} | t) \equiv \prod_{\alpha} G(y_{P\alpha}, x_{R\alpha} | -t), \quad \forall P. \quad (9)$$

avec

$$R = Q^{-1}P \in \pi_N. \quad (10)$$

on a donc, en notant  $\beta = P\alpha$ ,

$$p(a, b) = \sum_P \sum_R \epsilon(R) \prod_{\alpha=1}^N G(x_{\alpha}y_{\beta} | t) G(y_{\beta}, x_{R\alpha} | -t) \quad (11)$$

Cette représentation du carré d'un déterminant ou d'un permanent est bien connue. On a la symétrie  $\{x\} \longleftrightarrow \{y\}$ ,  $t \longrightarrow -t$ . La probabilité se présente comme une double somme. L'une sur  $P$  n'est qu'une symétrisation par rapport aux  $N$  points  $y$  (ici l'état final). La somme sur  $R$  n'est en fait qu'une somme sur les classes de  $R$ , de produits associés aux cycles de  $R$ . Soit  $\{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\}$  un cycle de  $R$  de longueur  $k$ . Le produit de propagateurs associé est

$$G(x_{\alpha_1}y_{\beta_1} | t) G(y_{\beta_1}x_{\alpha_2} | -t) G(x_{\alpha_2}y_{\beta_2} | t) \dots G(x_{\alpha_k}y_{\beta_k} | t) G(y_{\beta_k}x_{\alpha_1} | -t). \quad (12)$$

Le long d'une boucle de longueur  $2k$ , les propagateurs retardés et avancés alternent, en reliant successivement les événements ponctuels initiaux ( $x \in A$ ) et finaux ( $y \in B$ ).

$$(x_{\alpha_1}y_{\beta_1}x_{\alpha_2}y_{\beta_2}\dots x_{\alpha_k}y_{\beta_k})$$

Chaque boucle numérotée intervient 2 fois, selon les 2 orientations du cycle, avec un facteur  $(-1)$  par boucle (pour les fermions). La représentation diagrammatique d'un terme de  $p(a, b)$  associé à une classe de  $R$  est illustrée par la figure 2.

Les "cycles de longueur 1" de  $R$  donne lieu aux boucles à 2 lignes représentant

$$G(xy | t)G(yx | -t) = p(x, y) \quad (13)$$

qui est la probabilité de transition d'une seule particule du point  $x(0)$  au point  $y(t)$  analysée dans le chapitre II. On voit ici comment, dans le

cas de fermions identiques, la liaison causale ou corrélatrice élémentaire entre un ensemble de  $2k$  événements ponctuels trouve son expression précise dans la boucle corrélatrice alternant propagation chronologique et anti-chronologique entre événements initiaux et finals. En effet chaque propagateur du fermion de masse  $m$  dans le champ externe est “somme sur les trajectoires” entre les points extérieurs  $x$  et  $y$ , au sens de Feynman précisé section II. La contribution d’un cycle à  $p(a, b)$  est donc aussi somme sur les trajectoires fermées ou boucles définies plus haut, le long desquelles alternent les événements ponctuels initiaux ( $T_A$ ) et finals ( $T_B$ ). La somme est toujours réelle, mais de signe indéfini.

Conceptuellement on peut distinguer deux espaces de propagation, ou deux domaines entre les surfaces  $T_A$  et  $T_B$ . L’un est un domaine de  $M$ , l’autre de  $\bar{M}$ , où l’on a dédoublé l’espace de Minkowski de sorte que  $\bar{M}$  soit l’espace où le sens du temps est inversé par rapport à  $M$ . Ce qu’on peut imaginer, et peut-être représenter, comme deux feuillets superposés entre les isochrones  $T_A$  et  $T_B$ .

Les événements quasi-ponctuels que sont les localisations de “la particule” aux points  $x_j \in T_A$  et  $y_j \in T_B$  sont les points de passage entre  $M$  et  $\bar{M}$ , ou points de raccordements entre les deux espaces ou les deux feuillets. On peut étendre cette représentation à l’évolution complète du système à travers une série de mesures idéales  $A, B, C, \dots$ .

La justification de ce dédoublement remonte à Białylicki-Birula, et l’idée est en germe chez Schwinger. Les diagrammes à deux faces ont été introduits par le premier en électrodynamique pour le calcul des quantités observables, ainsi libérées des phases divergentes infra-rouge et de la renormalisation de la fonction d’onde. D’où cette intuition “Perhaps the two-sided diagrams representing, as they are, directly observable quantities are closer to reality” et ailleurs “... two copies of space-time, rather than one, are the proper arena for all quantum process” (Białylicki-Birula). Schwinger avait déjà noté que la connaissance de la fonction de transformation relative à une trajectoire fermée de l’espace-temps détermine toutes les valeurs moyennes.

Revenons maintenant à la probabilité  $p(a, b)$  donnée par (11). Il y a un lien étroit entre les fonctions de corrélation réduites des processus aléatoires multiples et les contributions des boucles ci-dessus définies.

En effet  $p(a, b)$  engendre une certaine densité de probabilité de sorte que

$$p(a, b) = \frac{1}{(N!)^2} p(x_1 x_2 \dots x_N | y_1 \dots y_N) dx_1 \dots dx_N dy_1 \dots dy_N$$

est la probabilité d'observer  $N$  événements indiscernables dans les éléments de volume  $dx_1 \dots dx_N$  (au temps  $t_a$ ), s'ils l'ont été dans  $dy_1 \dots dy_N$  (au temps  $t_b$ ).

Introduisons la fonction caractéristique  $g(y)$  des événements initiaux observés dans des volumes  $\Omega_j$  autour de  $y_j$  de sorte que

$$\begin{aligned} g(y) &= 1 & \text{si } y \in \Omega' \\ g(y) &= 0 & \text{si } y \notin \Omega' \end{aligned}$$

$$\Omega' = \cup \Omega_j$$

La loi de probabilité pour les événements  $x$  est donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!} p(x_1 \dots x_N) &= \frac{1}{(N!)^2} \int p(x_1 \dots x_N | y_1 \dots y_N) g(y_1) \dots g(y_N) dy_1 \dots dy_N \\ &= \frac{1}{N!} \text{dét} |K(x_\alpha, x_\beta)|_N \end{aligned} \tag{14}$$

avec

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \int dy G(x, y | t) G(y, x' | -t) g(y) \\ &= \int_{\Omega'} GG^* dy \end{aligned} \tag{15}$$

Selon la formule (11). Il en résulte que  $K$  est le noyau d'un projecteur hermitien et positif. Les fonctions de corrélation réduites d'ordre  $n$  de la distribution  $p(x_1 \dots x_N)$  sont précisément

$$(-)^{n-1} r_n(x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{\text{perm.} \\ \text{circ.}}} K(x_1 x_2) \dots K(x_n x_1) \tag{16}$$

où la somme porte sur les  $(n-1)!$  permutations circulaires des arguments.

Les fonctions de corrélation réduites sont précisément les contributions associées aux boucles individuelles. Chaque fonction réduite est à valeur réelle, mais les deux signes sont possibles. La probabilité pour qu'il n'y ait aucun événement observé dans un domaine  $\Omega$  donné de la surface tridimensionnelle  $T$ , s'écrit

$$p(\Omega) = \frac{1}{N!} \int p(x_1 \dots x_N) \prod_{j=1}^N (1 - f(x_j)) dx_j \tag{16}$$

où  $f(x)$  est la fonction caractéristique de  $\Omega$  sur  $T_A$  comme  $g(y)$  l'était de  $\Omega'$  sur  $T_B$ . On a la formule exponentielle

$$p(\Omega) = e^{-q(\Omega)} \tag{17}$$

$$q(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n!} \int_{\Omega} r_n(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n. \tag{18}$$

$$= -\text{tr} \log(1 - K_{\Omega})$$

soit

$$p(\Omega) = \text{dét} |1 - K_{\Omega}| \tag{19}$$

où  $K_{\Omega}$  désigne le noyau intégral  $K$  restreint au domaine  $\Omega$ . Il est clair que  $q(\Omega) = -\log p(\Omega)$  doit être positif puisque  $p$  est la probabilité absolue ( $p = 0$  si  $\Omega \equiv T$ ;  $p = 1$  si  $\Omega \equiv 0$ ). La quantité locale

$$q(x_1) = \left. \frac{\delta q(f)}{\delta f(x_1)} \right|_{f=\text{car.}\Omega}$$

$$= r(x_1) - \int_{\Omega} r(x_1 x_2) dx_2 + \frac{1}{2!} \int_{\Omega} r(x_1 x_2 x_3) dx_2 dx_3 \dots \tag{20}$$

peut être interprétée comme une densité de probabilité d'occurrence d'un événement ponctuel quelconque en  $x_1$ . La série  $q(\Omega)$  est effectivement à terme positif dans le cas des fermions, puisque

$$\frac{(-)^{n-1}}{n!} \int_{\Omega} r_n dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{n} \text{tr} K_{\Omega}^n > 0,$$

$K_{\Omega}$  étant un noyau positif. Il en est de même pour la série  $q_1(x)$ , qui est exactement la somme des contributions de toutes les boucles passant par  $x_1$ , mais dont les événements corrélés à  $x_1$  sont situés dans le domaine  $\Omega$ .

Sans prétendre extraire des considérations qui précèdent autre chose qu'une indication, la boucle semble représenter l'événement virtuel corrélateur des événements réels qu'elle relie, en ce sens que le poids associé à celle-ci est exactement la fonction de corrélation réduite de ces événements marqués. La boucle n'est pas seulement la "double trajectoire" fermée du modèle non-relativiste à une particule (figure 2), mais plus généralement, à cause du principe de Pauli, elle est une trajectoire fermionique fermée alternant les événements marqués, et la propagation

dans les espaces  $M$  et  $\overline{M}$ , de façon analogue à une boucle fermionique relativiste alternant entre les états de particule et d'anti-particule.

Ces deux types d'alternance coexistent évidemment dans la description complète. Seule la nature des vertex est complètement différente.

### Appendice A. Somme sur les trajectoires et sur les boucles : mesure asymptotique des configurations polygonales

On examine la propagation d'une particule massive non relativiste dans quelques cas intégrables parmi les plus simples et cependant capables de suggérer un comportement plus général. Dans la représentation du propagateur comme *somme sur les trajectoires* au sens de Feynman, on voudrait définir et calculer une densité asymptotique de configurations  $N$ -gonales, ou chaînes à  $N$  maillons figurant une trajectoire virtuelle typique définie par  $(N - 1)$  positions successives entre l'événement initial et l'événement final. Le calcul est faisable, outre le cas de la particule libre, en présence d'un potentiel linéaire ou harmonique, ou encore d'un système de parois non diffractif. De façon générale, cette densité asymptotique de trajectoires se trouve être solution d'une équation hyperbolique réelle sur un espace doué d'une cinquième dimension de temps propre (ou d'action). Celle-ci fait le pont entre le système classique décrit par Hamilton-Jacobi, et le système quantique décrit par l'équation "parabolique" de Schrödinger. On essaye enfin de définir une densité configurationnelle asymptotique pour les doubles trajectoires, c'est à dire les boucles corrélant deux événements ponctuels donnés.

L'état d'une particule initialement localisé est décrit par la fonction de Green vérifiant l'éq. inhomogène

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, y | t) = -i\hbar \delta(x - y)\delta(t) \quad (1)$$

avec la condition  $G(x, y | t) = 0$ , si  $t < 0$ . Ce qui revient à trouver la solution de l'éq. de Schrödinger en  $x, t$  telle que

$$G(x, y | +0) = \delta(x - y) . \quad (2)$$

Cette fonction de Green est l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution unitaire  $U_t = \exp\left(\frac{Ht}{i\hbar}\right)$ , qui dans le cas de la particule libre en dimension  $D$  s'écrit

$$\langle x | U_t | y \rangle = G_0(x, y | t) = \left( \frac{\mu}{2\pi i t} \right)^{(D/2)} e^{i\mu \frac{(x-y)^2}{2t}} \quad (3)$$

où l'on a posé

$$\mu = \frac{m}{\hbar} . \quad (4)$$

Il faut considérer  $G$  comme valeur au bord de la fonction analytique de  $\mu$ , en  $\text{Im } \mu = +0$ , de sorte que la limite  $t = +0$ , de l'expression (3) soit la distribution  $\delta(x-y)$ . Dans la suite, l'unitarité est violée, en supposant  $\text{Im } \mu > 0$

$$\mu = \mu_0 + i\gamma , \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

Comme on l'a indiqué section II, on a pu considérer (5) comme une hypothèse technique de prolongement analytique dans la masse  $m$ , permettant de prouver l'existence de la double limite  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty}$  de la somme de Feynman pour certaine classe de potentiel (Faris).

Suivant une indication de Feynman, nous considérons (5) comme un prolongement non pas sur la masse, mais sur la constante de Planck  $\hbar$ ; ce qui revient au même pour une large classe de potentiels, mais pas pour tous, notamment pas pour l'oscillateur. Si l'on postule  $\text{Im } \mu = \gamma$  non nul, il s'agit alors d'une mécanique quantique modifiée formellement par la complexification de  $\hbar$  (et non de  $m$ ), c'est-à-dire par l'adjonction à  $\hbar$  d'une partie imaginaire de la dimension d'une action, qu'on peut essayer d'interpréter ultérieurement. (Par exemple, si l'on prenait le rapport sans dimension  $\gamma/\mu_0$ , avec  $\mu_0 = \frac{mc^2}{\hbar}$ , de l'ordre de grandeur de la constante de structure de la gravitation  $\alpha_G = Gm_p^2/\hbar c \propto 10^{-38}$ , on aurait  $\hbar \rightarrow \hbar - i(Gm_p^2/c)$ , et la constante de temps  $\gamma^{-1}$ , sorte de durée de cohérence, atteindrait l'âge de l'univers  $\sim 10^{17}$  sec. ( $m_p, m$  masses du proton et de l'électron)).

Ceci admis, la somme de Feynman est engendrée par l'intégrale répétée

$$\begin{aligned} \langle x_0 | U_t | x \rangle &= \int \langle x_0 | U_\tau | x_1 \rangle \langle x_1 | U_\tau | x_2 \rangle \dots \\ &\quad \langle x_{N-1} | U_\tau | x \rangle dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \end{aligned} \quad (7)$$

où l'on a posé  $\tau = \frac{t}{N}$ .

C'est-à-dire dans le cas libre,  $\forall N$

$$G(x_0, x | t) = \left( \frac{\mu}{2\pi i\tau} \right)^{\frac{ND}{2}} \int e^{i\mu\ell} dx_1 \dots dx_{N-1} \quad (8)$$



avec la définition de l'action réduite  $\ell$ , analogue à un temps propre, de la chaîne polygonale  $\mathcal{C}_N$  de points ordonnés dans l'intervalle de temps  $t$  et reliant  $x_0$  à  $x = x_N$ .

$$\mathcal{C}_N = [x_0 x_1 \dots x_{N-1} x], \quad (9)$$

$$\ell = \frac{1}{2\tau} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2. \quad (10)$$

Entre la phase  $\varphi$ , l'action  $w$  et l'action réduite  $\ell$  nous avons

$$\varphi = \mu_0 \ell = w/\hbar. \quad (11)$$

Il existe donc une fonction densité positive, dépendant de  $N$ ,  $\rho_N(\ell)$ , telle que (8) s'écrive

$$G_0 = \left( \frac{\mu N}{2\pi i t} \right)^{\frac{ND}{2}} \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu\ell} \rho_N(\ell) d\ell \quad (12)$$

où  $\ell_0$  est la borne inférieure de  $\ell$  sur l'ensemble des  $\mathcal{C}_N$ ,  $\forall N$ , c'est-à-dire l'action classique (réduite) entre les deux événements initial  $(x_0, 0)$  et final  $(x, t)$ , ici

$$\ell_0 = \frac{(x - y)^2}{2t}. \quad (13)$$

Le volume de l'espace de configuration des chaînes  $\mathcal{C}_N$  d'action comprise entre  $\ell$  et  $\ell + d\ell$  est  $\rho_N(\ell)d\ell$ .

La présence d'un potentiel scalaire  $V(x)$ , et vecteur  $\vec{A}(x)$ , ne modifie que la définition de  $\ell$ . Il suffit que la borne inférieure de  $\ell$  ( $\mathcal{C}_N$ ) existe. Ce sera le cas si  $V(x)$  est borné supérieurement, ou même si la croissance de  $V$  est inférieure à la croissance quadratique, de même si la croissance de  $|\vec{A}|$  est inférieure à la croissance linéaire. On aura dans ces conditions

$$G(x, y|t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu}{2\pi i \tau} \right)^{\frac{ND}{2}} \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu\ell} \rho_N(\ell) d\ell \quad (14)$$

avec

$$\ell = \frac{1}{2\tau} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2 - \tau \sum_{j=1}^N v(x_j, x_{j-1}); \quad (15)$$

$$v(x_j, x_{j-1}) = \frac{1}{m} \left\{ V \left( \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) - \frac{1}{\tau} (x_j - x_{j-1}) \cdot A \left( \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) \right\} \quad (16)$$

et l'action classique

$$\ell_0(x_0, x, t) = \text{Inf. } \ell(\mathcal{C}_N) . \quad (17)$$

La formule (14) permet l'évaluation asymptotique de la densité  $\rho_N(\ell)$  ainsi définie lorsque la fonction de Green  $G$  est connue comme fonction de  $\hbar$ , ou de  $\mu = \frac{m}{\hbar}$ . Pour la particule libre, la formule (12) montre que  $\rho_N$  est précisément la transformée de Fourier en  $\mu$  de la fonction

$$\mu^{-(ND/2)} \exp \frac{i\mu}{2t} (x - x_0)^2$$

on obtient ainsi

$$\rho_N(\ell) = (2\pi t)^{-\frac{D}{2}} \left( \frac{2\pi t}{N} \right)^{\frac{ND}{2}} \frac{(\ell - \ell_0)_+^{MD-1}}{(MD-1)!} \quad (18)$$

où l'on a posé

$$M = \frac{N-1}{2}, \quad (19)$$

avec

$$\rho_N(\ell) = 0 \quad , \quad \text{si } \ell < \ell_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2t} \quad (20)$$

On peut encore écrire, dans le cas libre à 3 dimensions

$$(2\pi\tau)^{-\frac{3N}{2}} \rho_N(\ell) d\ell = (2\pi t)^{-3/2} d \cdot \frac{(\ell - \ell_0)_+^{3M}}{(3M)!} . \quad (21)$$

La présence d'un potentiel linéaire ou quadratique ne modifie pas la structure du résultat (18) pour la densité asymptotique,  $\forall D$ . Par exemple avec  $v(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ , il suffit de substituer pour  $\ell_0$ , l'action de l'oscillateur isotrope classique

$$\ell_0 = \frac{\omega}{2 \sin \omega t} ((x^2 + x_0^2) \cos \omega t - 2x \cdot x_0) \quad (22)$$

et de remplacer le module de l'amplitude  $(2\pi t)^{-D/2}$  par

$$\left( \frac{2\pi}{\omega} \sin \omega t \right)^{-D/2} . \quad (23)$$

Enfin la forme (18) donne le comportement dominant de  $\rho_N(\ell)$  pour  $\ell - \ell_0$  assez petit, quelque soit le potentiel suffisamment régulier pour que, au voisinage de son minimum absolu  $\ell_0$  et pour  $N$  assez grand, la fonction de  $\mathcal{C}_N$ ,  $\ell - \ell_0$ , soit approchée par une forme quadratique définie positive.

C'est le lieu de remarquer la restriction au résultat (22)-(23) dans le cas harmonique, qui n'existerait pas dans le cas de l'oscillateur inversé ( $\omega \rightarrow i\omega$ ). En effet la forme quadratique (15) n'est bornée inférieurement que si elle est définie, ce qui implique la restriction sur  $t$

$$0 \leq \omega t < \pi . \tag{24}$$

On montre plus généralement que la forme (15) a une signature  $k$  fois négative si

$$k < \frac{\omega t}{\pi} < k + 1 . \tag{25}$$

La difficulté ne concerne donc, à temps fini, qu'un nombre fini de degrés de liberté de la chaîne, donc asymptotiquement négligeable pour l'entropie de la chaîne; ceci est sans doute techniquement surmontable, et le problème ne se pose pas pour des potentiels plus réalistes.

Autre remarque, la fonction  $\rho_N(\ell)$  n'est pas une densité au sens strict, mais  $\rho(\ell)d\ell$  est un volume de l'espace de configuration de  $\mathcal{C}_N$ . Si l'on définit la longueur élémentaire

$$a = \left( \frac{2\pi\tau}{\mu_0} \right)^{1/2} \tag{26}$$

la proportion ou densité de chaînes dont les sommets occupent des volumes élémentaires  $a^D$ , et dont la phase est  $\varphi = \mu_0\ell$ , s'écrit

$$a^{-ND} \rho_N(\ell)d\ell = (2\pi t)^{-(D/2)} d \frac{(\varphi - \varphi_0)_+^{MD}}{(MD)!} \tag{27}$$

Si l'on opère une translation de la phase

$$\mu_0\ell' = \mu_0\ell - \frac{3N\pi}{4} \tag{28}$$

de façon à absorber le facteur  $i^{-\frac{ND}{2}}$  dans (14), on obtient la représentation du propagateur

$$G = \int_{\ell'_0}^{\infty} e^{i\mu_0\ell'} \tilde{\rho}_N(\ell)d\ell \tag{29}$$

avec

$$\tilde{\rho}_N(\ell) = a^{-ND} \rho_N(\ell) e^{-\gamma \ell} \tag{30}$$

où la densité  $\tilde{\rho}_N$  comprend le facteur d'atténuation dû à  $\gamma$ . Cette dernière représentation est un peu hybride quant à la dépendance en  $\mu_0$ , et nous nous en tiendrons à la formule (14).

· **L'équation hyperbolique  $\mathcal{H}$  pour la densité de trajectoires**

On se restreint par commodité à la suite des entiers  $N$  pairs, et l'on pose  $P = \frac{ND}{2} = (M + \frac{1}{2}) D$ . Nous écrivons, selon (14),

$$\begin{aligned} G(x, y|t, \mu) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2\pi\tau} \right)^P \int_{\ell_0}^{\infty} \left( \frac{d}{d\ell^P} e^{i\mu\ell} \right) \rho_N(\ell) d\ell \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\ell_0}^{\infty} d\ell e^{i\mu\ell} \frac{1}{(2\pi\tau)^P} \frac{d}{d\ell^P} \rho_N(\ell) \end{aligned} \tag{31}$$

où l'on a utilisé le fait, signalé plus haut, que  $\rho$  et toutes ses dérivées d'ordre inférieur à  $P$  s'annulent sûrement en  $\ell_0$ . La formule (31) détermine alors

$$\rho(\ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi\tau)^P} \frac{d}{d\ell^P} \rho_N(\ell) \tag{32}$$

comme transformée de Fourier de  $G(\cdot|\mu)$

$$G(x, y|t; \mu) = \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu\ell} \rho(\ell) d\ell \tag{33}$$

où  $\rho(\ell)$  est donc une fonction généralisée de  $\ell$ , et  $x, y, t$ .

Une telle représentation de la fonction de Green dans la variable  $\frac{1}{\hbar}$  a été considérée il y a vingt ans par Bloch et Balian qui, dans le formalisme indépendant du temps, ont reconnu les singularités d'un développement perturbatif de leur transformée comme les valeurs de l'action classique des trajectoires complexes. Le point de vue différent adopté ici manifeste la jonction des deux méthodes de sommation sur les trajectoires, la série de Balian-Bloch exacte si convergente, ou la série asymptotique semi-classique (Maslov), et la somme de Feynman. La formule (32) relie directement la densité configurationnelle asymptotique à la distribution  $\rho(\ell)$  transformée de  $G$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{N}{2\pi t} \right)^P \rho_N(\ell) &\propto \frac{1}{(P-1)!} \int_{\ell_0}^{\ell} (\ell - \ell')^{(P-1)} \rho(\ell') d\ell' \\ &= I^P \cdot \rho(\ell) \quad , \quad \left( P = \frac{ND}{2} \right) . \end{aligned} \tag{34}$$

qui exprime  $\rho_N(\ell)$  comme l'intégrale de Riesz d'ordre  $P = \frac{ND}{2}$  de la fonction  $\rho(\ell)$  (intégrale notée  $I^P \cdot \rho$  et définie pour tout  $P$  complexe par prolongement en  $P$  en dehors des entiers négatifs).

L'intérêt de la distribution  $\rho(\ell)$  est sa réalité, la positivité des  $\rho_N(\ell)$  associés (asymptotiquement en  $N$ ), et le fait que  $\rho(\ell)$  obéit à une équation hyperbolique dans les  $D + 2$  variables  $x, t, \ell$ , équation qui dérive simplement de l'équation "parabolique" de Schrödinger. Mettant en évidence la variable  $\mu = \frac{m}{\hbar}$ , l'équation (1) s'écrit

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + v(x)\mu^2 G - i\mu \frac{\partial G}{\partial t} = -i\mu \delta(x - y)\delta(t) \tag{35}$$

Il résulte de (33) que la partie homogène de l'équation pour  $\rho$  s'écrit

$$\mathcal{H} : -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial \ell^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial \ell} = 0 \tag{36}$$

(En présence d'un potentiel vecteur  $a(x) = \frac{A}{m}$  on aurait  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - a(x) \frac{\partial}{\partial \ell}$ ).

C'est une équation d'onde réelle pour des variables réelles dans un espace-temps-action, dont la partie homogène est commune à  $\rho$  et à tout  $\rho_N$  défini par l'intégrale de Riesz selon (34).

D'après (35), le terme de source inhomogène est la distribution  $\delta'(\ell)\delta(t)\delta(x - y)$  et les conditions initiales

$$\begin{aligned} \rho(\ell, x, t) = 0 & \quad \text{si } \ell < \ell_0(x, t), \quad t > 0 \\ & \quad \text{ou si } t < 0 \end{aligned} \tag{37}$$

Etant donné la nature délicate de la singularité à l'origine, il vaut mieux préciser le comportement de  $\rho$  au voisinage de  $t = +0$  on doit avoir, selon (2),

$$\delta(x - y) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\ell_0}^{\infty} e^{i\mu\ell} \rho(\ell, t) d\ell \tag{38}$$

Sachant que dans le voisinage  $x - y \sim 0$  et  $t \sim 0$ , on a toujours  $\ell_0 = \frac{(x-y)^2}{2t}$ , il suffit d'avoir,  $\forall \ell_0$  fini,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^{\infty} (2\pi t)^{D/2} \rho(\ell + \ell_0, t) \left(\frac{i}{\mu}\right)^{D/2} e^{i\mu\ell} d\ell = 1 \tag{39}$$

c'est-à-dire le comportement au voisinage de  $t = +0$ ,  $\forall \ell, \ell_0$  finis,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (2\pi t)^{D/2} \rho(\ell, t) = I^{-\frac{D}{2}} \delta(\ell - \ell_0) \quad (40)$$

Soit pour  $D = 3$

$$\rho(\ell, t) \sim \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{\pi}} Pf. (\ell - \ell_0)_+^{-5/2} . \quad (41)$$

La condition (40) est bien cohérente avec la formule (18) pour  $\rho_N(\ell)$  dans le cas libre, compte tenu de (34) et des propriétés de l'intégrale de Riesz, permettant d'ailleurs de lever la restriction initiale sur la parité de  $N$ .

### . Singularités de $\rho$ et caractéristiques de $\mathcal{H}$ .

Un théorème de Hadamard et Le Roux énonce que si le potentiel est analytique les singularités de  $\rho$  n'existent que sur les *surfaces caractéristiques*  $\phi(\ell, x, t) = 0$ , de l'équation hyperbolique  $\mathcal{H}$ . Au vu de l'équation (36), l'équation du second degré dans les dérivées partielles de  $\phi$  s'écrit

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + v(x) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \ell} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \ell} \right) = 0 \quad (42)$$

dont une intégrale complète s'écrit

$$\phi(\ell, x, t) = \mu_0 (\ell_c(x, t) - \ell) \quad (43)$$

où  $\ell_c(x, y, t)$  est une intégrale complète de l'équation de Jacobi

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ell_c}{\partial x} \right)^2 + v(x) + \frac{\partial \ell_c}{\partial t} = 0 . \quad (44)$$

Les conditions initiales (37) et (40), qui postulent discontinuité ou singularité transformée par l'opération de Riesz  $I$  (34), le long de la surface  $\ell_0(x, y, t) = \ell$ , sont donc bien posées, puisque  $\ell_0$  vérifie (44). C'est la solution de moindre action entre  $(x, t)$  et  $(y, 0)$ , s'annulant pour  $x = y$ , et  $t$  assez petit.

Il peut exister une suite infinie de trajectoires classiques entre les deux événements terminaux correspondant à des valeurs stationnaires

de l'action  $\ell_c$ , formant une suite croissante. Les zéros de la fonction  $\phi$ , c'est-à-dire les singularités rencontrées par  $\rho(\ell)$  quand  $\ell$  croît à partir de  $\ell_0$  à  $x, t$  fixés sont en nombre fini.

L'existence et l'analyticité, dans le même domaine que celle des potentiels, de la solution  $\rho$  de l'équation  $\mathcal{H}$  soumise à la condition (41) sur le conoïde caractéristique de sommet  $y$ ,  $\phi_0 \equiv \ell - \ell_0(x, y, t) = 0$ , a été prouvée par Hadamard qui l'a appelée *solution élémentaire de pôle  $y$* . La densité  $\rho$ , et toute densité asymptotique  $\rho_N$  définie par la méthode de Feynman vérifie l'équation homogène (41), qui est celle d'un problème ondulatoire qu'on dirait classique puisqu'indépendant de la constante de Planck, mais dans un espace à dimension supplémentaire de temps propre. Remarquablement l'équation hyperbolique réelle dérivée de la méthode de Feynman réalise le pont entre l'équation quantique de Schrödinger et l'équation classique de Hamilton-Jacobi pour les *surfaces caractéristiques* de la première.

Pour en terminer avec la densité de trajectoires, et faute de savoir faire mieux, donnons quelques exemples dans des cas intégrables assez suggestifs malgré leur simplicité. Premier cas, une particule en présence d'une paroi plane impénétrable. La fonction de Green dans le demi-espace physique, noté  $(DE)$ , est la superposition de deux fonctions élémentaires du type (2).

$$G^{(DE)}(x, x_1|t) \equiv G(x, x_1|t) - G(x, x_2|t) \tag{45}$$

où  $x_2$  est l'image de  $x_1$ . En effet la formule entraîne, selon (2), la condition sur la paroi

$$G^{(DE)}(x, x_1|t) = 0 \quad , \quad \text{si} \quad |x - x_1| = |x - x_2| \quad , \quad \forall t.$$

On déduit de (12) et (18), que la densité de trajectoires dans le demi-espace  $DE$  est la superposition

$$\rho_N^{(DE)}(\ell) = c_m \left( (\ell - \ell_1)_+^m - (\ell - \ell_2)_+^m \right) \tag{46}$$

avec  $m = 3M - 1 = \frac{1}{2}(3N - 5)$  ;  $c_m = \frac{1}{m!}$ , où  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont les actions réduites des deux trajectoires classiques reliant  $(x, 0)$  à  $(x_1, t)$

$$\ell_{1,2} = \frac{(x - x_{1,2})^2}{2t} \quad ; \quad \ell_2 > \ell_1 . \tag{47}$$

Le point de l'argument est que la différence (46) est non-négative  $\forall \ell$ ,  $m > 0$ , dans le demi-espace physique, et constitue donc la solution cherchée.

On aura la même propriété de positivité pour une particule dans un quadrant ( $QE$ ), dans une dièdre ( $2\pi/K$ ), ou dans un simplexe régulier. Prenons le cas du quadrant. Soient  $x_1$  et ses images  $x_2, x_3, x_4$ . Selon le principe de superposition, la densité de trajectoires  $\ell$  dans le quadrant est

$$\rho_m^{(QE)}(\ell) = c_m \{ (\ell - \ell_1)_+^m - (\ell - \ell_2)_+^m + (\ell - \ell_3)_+^m - (\ell - \ell_4)_+^m \} \quad (48)$$

avec  $\ell_i = \frac{1}{2t} (x - x_i)^2$ ,  $x \in QE$ ;  $m > 0$ .

Il suffit de vérifier  $\rho_m^{(QE)}(\ell) \geq 0$ ,  $\forall \ell, m$ , ce qui découle de la géométrie des images.

a) Nous avons  $\ell_1 + \ell_3 \equiv \ell_2 + \ell_4$

$$\ell_2 - \ell_1 > 0, \quad \ell_3 - \ell_4 > 0, \quad \ell_3 - \ell_2 > 0, \quad \ell_4 - \ell_1 > 0. \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \implies \ell_3 - \ell_1 &\geq (\ell_3 - \ell_2) + (\ell_3 - \ell_4) \\ \implies (\ell_3 - \ell_1)^m &\geq (\ell_3 - \ell_2)^m + (\ell_3 - \ell_4)^m \end{aligned} \quad (50)$$

b) Plaçons nous dans le cas  $\ell \geq \ell_3$  où les 4 termes de la somme (48) contribuent, et supposons qu'on ait montré  $\rho_{m'} \geq 0$  pour  $m' \leq m$ . On en déduit  $\rho_{m+1} \geq 0$ , car  $\frac{d\rho_{m+1}}{d\ell} = m\rho_m$ ,  $\rho_{m+1}$  est donc croissante et son minimum pour  $\ell = \ell_3$  est non-négatif d'après (50). Ce qui prouve (48) par récurrence sur  $m$ , dans la région  $\ell > \ell_3$ .

c) Dans la région  $\ell_4 < \ell < \ell_3$ , il suffit de montrer

$$(\ell - \ell_1)^m \geq (\ell - \ell_2)_+^m + (\ell - \ell_4)_+^m \quad (51)$$

or  $\ell \leq \ell_3$  entraîne, selon (49),

$$\ell - \ell_1 \geq (\ell - \ell_2) + (\ell - \ell_4) \implies (51).$$

La structure de superposition (48) et la positivité sont probablement vraies chaque fois que la méthode des images est applicable, et plus généralement pour les systèmes dits intégrables.



. La densité de boucles  $r_M(v)$

Nous passons maintenant à la construction d'une autre densité  $r_N(\ell)$ , qui est la *densité configurationnelle* pondérée des doubles trajectoires, ou des boucles. On cherche à exprimer à partir de la densité  $\rho_N$  des simples trajectoires, le carré d'une amplitude qui est la probabilité de présence.

L'évolution temporelle d'une fonction d'onde  $\psi(x, t)$  est donnée, selon (1) et (2), par

$$\psi(x, t) = \int G(x, x_1 | t) \psi(x_1) dx_1 \tag{52}$$

où  $\psi(x_1)$  est l'onde initiale. La probabilité de présence au temps  $t$  a pour densité

$$|\psi(x, t)|^2 = \int \int G^*(x, x_1 | t) G(x, x_2 | t) \psi^*(x_1) \psi(x_2) dx_1 dx_2 . \tag{53}$$

C'est par la considération de cette formule que Feynman a introduit la notion de "*double path integral*" qu'il a surtout développée pour le calcul des fonctions d'influence dans le cas de potentiel  $V$  aléatoires. (Feynman and Hibbs).

Reprenant le modèle libre pour illustrer le propos, nous avons selon (2)

$$G^*(x, x_1 | t) G(x, x_2 | t) = \left( \frac{|\mu|}{2\pi t} \right)^D e^{i\mu_0(\ell_2 - \ell_1) - \gamma(\ell_2 + \ell_1)}$$

avec

$$|\mu| = (\mu_0^2 + \gamma^2)^{1/2} , \quad \ell_1 = \frac{(x - x_1)^2}{2t} , \text{ etc...} \tag{54}$$

D'autre part, en terme des densités  $\rho_N^{(1)}$  et  $\rho_N^{(2)}$  associées à  $G(x_1)$  et  $G(x_2)$  selon (12), nous avons

$$\begin{aligned} (2\pi t)^D G_1^* G_2 &\equiv \left( \frac{|\mu|}{2\pi t} \right)^{ND} \iint e^{i(\mu \ell' - \mu^* \ell)} \rho_N^{(1)}(\ell) \rho_N^{(2)}(\ell') d\ell d\ell' \\ &= \frac{|\mu|^{ND}}{((DM - 1)!)^2} \int_{\ell_1}^{\infty} \int_{\ell_2}^{\infty} e^{i\mu_0(\ell' - \ell) - \gamma(\ell + \ell')} [(\ell - \ell_1)(\ell' - \ell_2)]^{DM-1} d\ell d\ell' \\ &= |\mu|^{ND} e^{i(\mu \ell_2 - \mu^* \ell_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} r_{DM}(v) e^{i\mu_0 v} dv \end{aligned} \tag{55}$$

où la fonction  $r_M(v)$  est le résultat de l'intégration sur  $(\ell + \ell')$  à  $\ell' - \ell = \ell_2 - \ell_1 + v$  constant, qui s'exprime ainsi pour  $v \geq 0$  :

$$r_M(v) = \frac{1}{(M-1)!^2} \left(\frac{v}{2}\right)^{2M-1} \int_1^\infty e^{-\gamma v z} (z^2 - 1)^{M-1} dz . \quad (56)$$

$r_M(v)$  est une fonction paire, positive et décroissante de  $|v|$ , dont l'expression analytique est

$$\begin{aligned} r_M(v) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(M-1)!} \left(\frac{v}{2\gamma}\right)^{M-\frac{1}{2}} K_{M-\frac{1}{2}}(\gamma v) , \quad (v \geq 0) \\ r_M(0) &= (2\gamma)^{-2M+1} \frac{(2M-2)!}{((M-1)!)^2} , \end{aligned} \quad (57)$$

où  $K$  est la fonction de Bessel. On a la formule (Whittaker and Watson, Modern Analysis, p.384)

$$2 \int_0^\infty \cos \mu_0 v r_M(v) dv = \frac{1}{(\mu_0^2 + \gamma^2)^M} \quad (58)$$

ce qui est exactement (54) quand on a substitué (57) dans le dernier membre de (55). L'équivalence de (56) et de (58) constitue la transformation de Malmsten (Watson G.N.).

La fonction  $r_{DM}(v)$  est essentiellement la convolution pondérée par le facteur d'atténuation en  $\gamma$ , des deux densités  $\rho_N^{(1)}$  et  $\rho_N^{(2)}$ , c'est-à-dire la densité configurationnelle de la double chaîne d'extrémités  $x_1$  et  $x_2$ , passant par  $x$ , dont l'action réduite est la différence des actions des chaînes  $\mathcal{C}_N[x_2, x]$  et  $\mathcal{C}_N[x_1, x]$ , soit  $v + \ell_2 - \ell_1$ . Le point important à noter, c'est que contrairement à la densité  $\rho_N$  de simple trajectoire, la densité  $r_M(v)$  ne peut exister sans le facteur d'atténuation  $e^{-\gamma(\ell+\ell')}$  qui finit par supprimer les doubles trajectoires ou les boucles de "longueur" totale  $\ell + \ell' \gtrsim \gamma^{-1}$ , qui apparaît comme une durée de cohérence. (L'âge de l'univers si la MQ est universelle).

Le calcul précédent pour la densité d'une double trajectoire ouverte,  $x_1 \neq x_2$ , peut être appliqué tout de suite au calcul de la densité de boucles, dont la transformée de Fourier est la probabilité de présence, dans le cas intégrale où  $\rho$  est une superposition du type (48), selon l'exemple d'une particule dans un quadrant (QE). On obtient directement pour la densité de boucles:

$$\check{r}_M(v) = \sum_{i,j} (-)^{i+j} r_M(v + \ell_i - \ell_j) e^{-\gamma(\ell_i + \ell_j)} . \quad (59)$$

C'est une fonction positive par construction, somme de termes associés à chaque " boucle classique"  $\mathcal{C}_{ij}$  d'action différentielle  $(\ell_i - \ell_j)$ . La transformée de Fourier de  $\check{r}_M(v)$  en  $\mu_0$  donne lieu aux divers termes d'interférence, dûs aux contributions de la singularité à l'origine de la fonction standard  $r_M(v)$ , (57).

A l'approximation semi-classique, on aurait

$$2\pi t |G^2| = |\mu|^N \int_{-\infty}^{+\infty} \check{r}_M(v) \cos \mu_0 v \, dv \sim \left| \sum_j (-)^j e^{i\mu\ell_j} \right|^2 \quad (\text{ici } D = 1) \quad (60)$$

Enfin on peut donner une relation pour déterminer généralement la densité asymptotique de boucles  $\check{r}_M(v)$  lorsque la fonction  $\rho(\ell)$ , solution de l'équation hyperbolique (36) est supposée connue. Définissons la densité atténuée

$$\check{\rho}(\ell) = \rho(\ell) e^{-\gamma\ell} \quad (61)$$

et la fonction d'autocorrélation paire

$$\check{r}(v) = \int_{\ell_0}^{\infty} \check{\rho}(\ell + v) \check{\rho}(\ell) \, d\ell \quad , \quad v \geq 0 \quad (62)$$

Avec  $P = \frac{ND}{2}$ , nous avons selon (32) ou (34),

$$(2\pi\tau)^P \check{\rho}(\ell) = \left( \frac{d}{d\ell} + \gamma \right)^P \check{\rho}_N(\ell) \quad (63)$$

et par conséquent

$$\check{r}(v) = \left( -\frac{d^2}{dv^2} + \gamma^2 \right)^P \int_{\ell_0}^{\infty} \check{\rho}_N(\ell + v) \check{\rho}_N(\ell) \, d\ell \quad (64)$$

D'où la relation cherchée

$$(2\pi\tau)^{ND} \check{r}(v) = \left( -\frac{d^2}{dv^2} + \gamma^2 \right)^{\frac{ND}{2}} \check{r}_{MD}(v) \quad (65)$$

Alors qu'on pouvait passer simplement de  $\rho(\ell)$  à  $\rho_N(\ell)$  par application de l'opérateur de Riesz selon (34), l'inversion est un peu compliquée

ici par l'existence de  $\gamma$ , dont dépend radicalement la densité  $\check{r}_M(v)$  dans la région asymptotique  $\gamma v = O(N)$ .

Au moins dans le cas intégrable, il est clair que ce sont les singularités définies par les boucles classiques en  $v = |\ell_i - \ell_j|$ , qui contribuent aux oscillations de la probabilité, mais le facteur d'amplitude et aussi une phase résiduelle caractéristique dépendant du comportement de la fonction  $\check{r}_M(v)$  dans la région  $(\gamma v/N)$  fini au voisinage du col. Pour tester en quelque sorte la stabilité par rapport à  $N$  de la densité  $r_M(v)$ , nous allons évaluer la transformée de Fourier au premier membre de (58), en utilisant cette fois son approximation asymptotique dans la région  $(v/N)$  fini, au lieu de l'expression exacte (57). Celle-là s'obtient par la méthode de Laplace sur l'intégrale (56).

Posant

$$\frac{\gamma v}{M_0} = \xi = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \quad , \quad \text{avec} \quad M_0 = M - \frac{1}{2} = \frac{N}{2} - 1 \quad (66)$$

on trouve le comportement, pour  $v > 0$  ( $\alpha > 0$ )

$$\gamma^{2M} r_M(v) \propto \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{th} \alpha}{\pi M}} e^{-M_0(\operatorname{coth} \alpha - 1 + \log(1 - e^{-2\alpha}))} \quad (67)$$

( $A_M \propto B_M$  signifie  $\lim_{N \rightarrow \infty} (A_M/B_M) = 1$ ).

Il existe donc une entropie extensive de la double chaîne qui vaut  $-\frac{1}{2}f$  par maillon avec

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{2}{e^{2\alpha} - 1} + \log(1 - e^{-2\alpha}) \\ &= \sqrt{\xi^2 + 1} - 1 - \log\left(\frac{1 + \sqrt{\xi^2 + 1}}{2}\right) \geq 0 \quad , \end{aligned} \quad (68)$$

telle que la densité configurationnelle de chaînes soit

$$r_M(v) \propto \gamma^{-2M} \sqrt{\frac{\operatorname{th} \alpha}{\pi M}} e^{-M_0 f\left(\frac{\gamma v}{M_0}\right)} \quad (69)$$

Cette fonction de  $v$  est holomorphe en  $\xi$  dans la bande contenant l'axe réel  $\operatorname{Im} \xi < 1$ , en fait dans le plan coupé par  $] -i\infty, -i][i, i\infty[$ . Si l'on cherche à calculer la transformée pour  $M \gg 1$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{M_0\left(\frac{i\mu_0}{\gamma}\xi - f(\xi)\right)} d\xi \quad (70)$$

Il faut aller chercher le col dans le second feuillet (et  $\text{Im } \xi > 0$ ). L'équation du col  $f'(\xi_0) = \frac{i\mu_0}{\gamma}$  nous donne  $\frac{i\mu_0}{\gamma} = e^{-\alpha}$  ou

$$\xi_0 = i \frac{2\mu_0\gamma}{\mu_0^2 + \gamma^2} \quad , \quad 0 < \text{Im } \xi_0 < 1 . \quad (71)$$

La valeur de l'exponentielle au col, nous donne le facteur essentiel  $\left(1 + \frac{\mu_0^2}{\gamma^2}\right)^{-M_0}$ . Le calcul de la contribution du terme  $(f''(\xi_0))^{-1/2}$  donne juste le résultat (58), compte tenu du facteur de phase au col, à l'approximation de Stirling.

### Bibliographie sommaire

- R. Balian, *On the principles of quantum mechanics and the reduction of the wave-packet*, Am. J. Phys. **57** (1989) p.1019.
- R. Balian and C. Bloch, *Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths*, Annals of Physics **85** (1974) p.514.
- A. Barchielli, L. Lanz and G.M. Prosperi, *A model for the macroscopic description and continual observation in quantum mechanics*, Nuovo Cimento **72B** (1982) p.79.
- F.J. Belinfante, *Measurements and Time-reversal in objective Quantum theory*, Pergamon-P. (1975).
- I. and Z. Białynicki-Birula, *Quantum Electrodynamics, Oxford U.P. (1975) Transition amplitudes versus transition probabilities and a replication of space-time*, in "Quantum Concepts in Space and Time", éd. Penrose and Isham, Oxford (1986).
- A. Blanc-lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, éd. Masson (1953).
- D. Bohm, B.H. Hiley and P.N. Kaloyerou, *An ontological basis for the quantum theory*, Physics Reports **144** (1987) p.321.
- L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta (Thèse)*, Annales de Physique 10<sup>ème</sup> série, t.III, J-F- 1925., *La physique quantique restera-t-elle indéterministe?*, Gauthiers-Villars (1953), *Tentative d'interprétation causale et non-linéaire de la mécanique ondulatoire*, Gauthiers-Villars (1956), *La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire*, Gauthiers-Villars (1957), *Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire*, Gauthiers-Villars (1963).
- O. Costa de Beauregard, *Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta*, Gauthiers-Villars (1957).
- R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, (1937) Springer Verlag t.II.
- A. Daneri, A. Loinger, G.M. Prosperi, *Quantum theory of measurement and ergodicity conditions*, Nuclear Physics A **33** (1962) p.297.
- P.C.W. Davies, *The Physics of Time Asymmetry*, U.C. Press (1977).

- L. Diosi, *Orthogonal jumps of the wave-function in white-noise potentials*, Phys. Lett. **A112** (1985) p.288, *A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics*, Phys. Lett. **A120** (1987) p.377, *Quantum stochastic processes as models for state-vector reduction*, J. Phys. A Math. Gen. **21** (1988) p.2885.
- P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford IV éd. (1958).
- B. d'Espagnat, *Conceptions de la Physique contemporaine*, Hermann (1965).
- W.G. Faris, *The product formula for semi-group defined by Friedrichs extensions*, Pacific J. of Maths **22** (1967) p.47.
- R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic Quantum Mechanics*, Phys. Rev. **76** (1949) p.769., *Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction*, Phys. Rev. **80** (1950) p.440.
- R.P. Feynman and A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw-Hill, N.Y. (1965).
- M. Gaudin, *Réflexions sur l'irréversibilité microscopique fondamentale*, Préprint SACLAY, S.Ph.T. 92/160. Juin 1992.
- G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, *Unified dynamics for micro and macro-system*, Phys. Rev. **D34** (1986) p.470.
- G.W. Gibbons, *Quantum Field Theory in curved Space-time*, in "An Einstein Centenary Survey", éd. Hawking and Israël, Cambridge (1979).
- R. Haag, *Fundamental irreversibility and the concept of events*, Comm. in Math. Phys. **132** (1990) p.245.
- J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann Ed. (1932).
- L. van Hove, *The approach to equilibrium in quantum statistics*, Physica XXIII (1957) p.441.
- F. Hoyle and J.V. Narlikar, *Electrodynamics of direct interparticle Action. I. The quantum mechanical response of the Universe*, Annals of Physics **54** (1969) p.207, *II. Relativistic radiative processes*, Annals of Physics **62** (1971) p.44.
- D. Iagolnitzer, *The S-matrix*, North-Holland (1978).
- K. Ito, *Introduction to probability theory*, Cambridge U.P. (1984).
- C. Itzykson et J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill (1981).
- Th. Jacobson, *Spinor chain path integral for the Dirac equation*, J. Phys. A **17** (1984) p.2433.
- F. Karolyhazy, A. Frenkel and B. Lukacs, *On the possible role of gravity on the reduction*, in "Quantum Concepts in Space and Time", éd. Penrose and Isham, Oxford (1986).
- G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semi-groups*, Comm. Math. Physics **48** (1976) p.119.
- G. Lochak, *L'irréversibilité en physique*, Annales de la Fondation Louis de Broglie **13**, 4 (1988) p.409.
- V.P. Maslov, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod - G.V. (1972).
- A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod (1959).
- C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).

- E. Nelson, *Feynman Integral and the Schrödinger Equation*, J. Math. Phys. **5** (1964) p.332., *Quantum fluctuations*, Princeton U.P. (1985).
- J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer (1932), Princeton U.P. (1955).
- P. Pearle, *Combining stochastic dynamical state vector reduction with spontaneous localisation*, Phys. Rev. **A39** (1989) p.2277.
- O. Penrose and I.C. Percival, *The direction of Time*, Proc. Phys. Soc. London **79** (1962) p.605.
- O. Penrose, *Gravity and state-vector reduction*, in “ *Quantum Concepts in Space and Time* ” , éd. Penrose and Isham, Oxford C.P. (1986), *Newton, quantum theory and reality*, in “ *Three hundred years of gravitation* ” , éd. Hawking and Israël, Cambridge V.P. (1987), *The Emperor's new mind*, Oxford U.P. (1989).
- I. Prigogine and T.Y. Petrosky, *Intrinsic irreversibility in quantum theory*, Physica **147A** (1987) p.33 An Alternative to quantum theory (1988) P.461.
- E. Prugovečki, *Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-time*, éd. D. Reidel, Dordrecht (1984).
- C.W. Rietdijk, *On the four-dimensional character of micro-physical phenomena*, in “ *The Wave-Particle Dualism* ” A tribute to Louis de Broglie on his 90th birthday, éd.: Diner, Fargue, Lochak and Selleri, D. Reidel P.C. (1982).
- L. Rosenfeld, *General Introduction to Irreversibility* , in “ *Irreversibility in the many-body problem* ” , éd.: Garrido, Biel and Rae, P.P. (1972).
- J. Schwinger, *Brownian motion of a quantum oscillator*, J. Math. Phys. **2** (1961) p.407.
- B. Simon, *Quantum Mechanics for Hamiltonians defined as quadratic Forms*, Princeton Series (1971), *Functional Integration and Quantum Mechanics*, A.P. (1979).
- L. Smolin, *Stochastic mechanics, hidden variables and gravity*, in “ *Quantum Concepts in Space and Time* ” , éd.: Penrose and Isham, Oxford C.P. (1986).
- J.P. Terletsky, *Discussions avec R. Feynman ...* , in Courants, amers, écueils en Microphysique (1993), Bibliothèque des Annales de la Fondation Louis de Broglie.
- G.N. Watson, *Theory of Bessel functions*, II<sup>o</sup> éd., Cambridge.
- J.A. Wheeler and R.P. Feynman, *Classical Electrodynamics in terms of direct interparticle Action*, Rev. Mod. Phys. **17** (1945) p.157, **21** (1949) p.425.
- E.T. Whittaker and G.N. Watson, *Modern Analysis*, IV<sup>o</sup> éd., Cambridge U.P. (1958).
- E.P. Wigner, *Relativistic Invariance and Quantum Phenomena; Epistemology and Quantum Mechanics*, in “ *Symmetries and Reflections* ” Indiana V.P. (1967).
- B. de Witt, *Dynamical theory in curved spaces I. A review of the classical and quantum Action Principles*, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) p.377.
- C. de Witt-Morette, A. Maheshwari and B. Nelson, *Path Integration in non-relativistic Quantum Mechanics*, Physics Reports **50** (1979) p.255.
- H.D. Zeh, *The Physical Basis of the direction of Time*, Springer (1989).
- J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, C.P. Oxford (1989).

W.H. Zurek, *Environment-induced superselection rules*, Phys. Rev. **D26**  
(1982) p.1862.

*(Manuscrit reçu le 26 mars 1993)*