

## Remarques sur une équation de Dirac non linéaire

C. DAVIAU

Fondation Louis de Broglie, 23 quai de Conti, 75006 Paris

**RÉSUMÉ.** Partant d'une équation non linéaire de Dirac sont discutés le lien entre l'angle d'Yvon-Takabayasi et le signe de l'énergie, le moment cinétique total et la séparabilité dans le cas d'un potentiel coulombien, l'extension de l'équation non linéaire au modèle GSW d'interactions électro-faibles.

*ABSTRACT.* Starting with a nonlinear Dirac equation, several points are discussed: the link between the Yvon-Takabayasi angle and the sign of energy, the total cinetic momentum and the separation of variables in the case of a central potential, and the enlargement of the nonlinear equation to the model GSW of electro-weak interactions.

### Introduction

Nous avons présenté une première fois dans ces Annales [1] une équation de Dirac non linéaire obtenue à partir des travaux de G. Lochak sur le monopôle magnétique [2 à 5] et de la réécriture dans l'algèbre d'espace-temps de l'équation de Dirac par Hestenes [6 à 12], Boudet [13 et 14], Krüger [15] et alii. L'étude de cette équation non linéaire a été poursuivie en [16], où ont été traités plus en détail de nombreux points, dont les solutions de l'équation pour l'atome d'hydrogène. Le but de cet article est de compléter et de préciser ce travail, notamment sur l'interprétation de l'angle d'Yvon-Takabayasi, sur la question du moment cinétique, sur le prolongement possible de l'équation vers la théorie électro-faible.

Les notations que nous utiliserons seront celles de [16], où l'on utilise, pour calculer dans l'algèbre de Clifford d'espace-temps, la

représentation matricielle usuelle de Dirac:

$$\begin{aligned}
 (\gamma^0)^2 &= I_4 ; (\gamma^j)^2 = -I_4, j = 1, 2, 3 ; \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \mu \neq \nu \\
 \gamma^0 &= \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} ; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

L'équation non linéaire que nous avons proposée s'écrit:

$$\hbar \partial \Psi \gamma_{21} \Psi^{-1} = \frac{m_0 c}{\rho} \Psi \gamma_0 \tilde{\Psi} + \frac{e}{c} A \tag{2}$$

où l'on a:

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu ; \gamma_{21} = \gamma_2 \gamma_1 ; A = \gamma^\mu A_\mu ; \tilde{\Psi} = \gamma_0 \Psi^\dagger \gamma_0 ; \rho = (\det \Psi)^{1/2} \tag{3}$$

$A$  est le vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique,  $\Psi$  est une fonction de l'espace-temps à valeur dans la sous-algèbre paire d'espace-temps, donc  $\Psi$  s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix} ; \Phi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\bar{\Psi}_2 \\ \Psi_2 & \bar{\Psi}_1 \end{pmatrix} ; \Phi_2 = \begin{pmatrix} \Psi_3 & \bar{\Psi}_4 \\ \Psi_4 & -\bar{\Psi}_3 \end{pmatrix} ; \\
 \Psi &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} ; \Phi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} ; \chi = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

de sorte que le  $\Psi$  de Dirac est simplement la colonne de gauche, avec cette représentation matricielle, de  $\Psi$  qui est une matrice 4 x 4. Cette matrice est inversible si  $\det \Psi$  n'est pas nul. Or on a:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \bar{\Psi} \Psi ; \Omega_2 = -\bar{\Psi} \hat{i} \Psi ; \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 ; \hat{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\
 \Psi \tilde{\Psi} &= \Omega_1 + \Omega_2 \hat{i} ; \det \Psi = \rho^2 ; \rho = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

C'est à dire que  $\Psi$  est inversible si l'un au moins des invariants  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  est non nul. Dans ce cas on définit l'angle d'Yvon-Takabayasi par:

$$\Omega_1 = \rho \cos \beta ; \Omega_2 = \rho \sin \beta ; \Psi \tilde{\Psi} = \rho e^{\beta \hat{i}} \tag{6}$$

## 1 Sur l'angle $\beta$ et le signe de l'énergie

L'interprétation physique de l'angle  $\beta$  a toujours posé problème en théorie de Dirac. L'étude des ondes planes monochromatiques a conduit à penser que  $\beta$  était lié au signe de l'énergie. Cette étude a été reprise dans le chapitre 2 de [16] pour l'équation non linéaire, et on peut simplifier grandement cela en considérant:

$$\Psi = \Psi_0 e^{\varphi \gamma_{12}}; \quad \varphi = \frac{1}{\hbar}(Et - p \cdot r); \quad p \cdot r = p_x x + p_y y + p_z z \quad (1-1)$$

où  $\Psi_0$  est fixe, et en supposant également  $A$  fixe. On a alors:

$$\Psi^{-1} = e^{\varphi \gamma_{21}} \Psi_0^{-1}; \quad \tilde{\Psi} = e^{\varphi \gamma_{21}} \tilde{\Psi}_0; \quad \hbar \partial \Psi = p \Psi \gamma_{12}; \quad p = \gamma^\mu p_\mu \quad (1-2)$$

de sorte que l'équation non linéaire (2) donne:

$$p - \frac{e}{c} A = \frac{m_0 c}{\rho} \Psi_0 \gamma_0 \tilde{\Psi}_0 \quad (1-3)$$

Or si  $\Psi_0$  est inversible, il peut toujours s'écrire:

$$\Psi_0 = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2} \hat{i}} R \quad (1-4)$$

où  $R$  est une rotation de Lorentz et l'on a:

$$e_0 = \frac{1}{\rho} \Psi_0 \gamma_0 \tilde{\Psi}_0 = R \gamma_0 \tilde{R} \quad (1-5)$$

$e_0$  est un vecteur d'espace-temps de carré 1, dont la composante de temps est positive, donc peut être interprété comme une vitesse d'univers et (1-3) devient:

$$p - \frac{e}{c} A = m_0 c e_0 \quad (1-6)$$

Donc pour l'équation non linéaire (2), lorsque  $p$  et  $A$  sont donnés, on peut prendre pour  $\Psi_0$  n'importe quel élément fixe, tel que le vecteur  $e_0$  défini par (1-5) vérifie (1-6). Or il n'en est pas de même pour l'équation de Dirac, qui s'écrit en algèbre d'espace-temps:

$$\hbar \partial \Psi \gamma_{21} = m_0 c \Psi \gamma_0 + \frac{e}{c} A \Psi \quad (1-7)$$

et donne avec (1-1):

$$p - \frac{e}{c}A = m_0 c e^{\beta \hat{i}} e_0 \quad (1-8)$$

Or le premier membre de cette égalité est un vecteur, et le second est somme d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur d'espace-temps. L'égalité (1-8) n'est possible que si la partie pseudo-vectorielle de (1-8) s'annule, c'est à dire si  $\beta$  est nul modulo  $\pi$ . Comme la composante de temps de  $e_0$  est positive, il n'y a que deux possibilités: si  $\beta$  est nul modulo  $2\pi$ ,  $E$  doit être positif et si  $\beta$  vaut  $\pi$  modulo  $2\pi$ ,  $E$  est négatif. C'est pour cela que l'on a été amené à penser que  $\beta$  était lié au signe de l'énergie. Or ceci est certainement faux dans (1-6), où la composante de temps  $E$  du vecteur  $p$  est toujours positive. Et ceci est conforme à l'expérience qui nécessite la fourniture de  $2 \times 511$  keV pour créer une paire électron-positron. L'équation non linéaire ne contredit pas la symétrie de charge. La symétrie de charge change seulement le signe des charges, en sorte que nous aurons pour un positron, au lieu de (1-6):

$$p + \frac{e}{c}A = m_0 c e_0 \quad (1-9)$$

En fait le lien entre l'angle d'Yvon-Takabayasi et le signe de l'énergie est très contestable pour la théorie de Dirac linéaire elle-même. Un calcul détaillé de l'angle  $\beta$ , pour les états  $2s1/2$  et  $2p1/2$  de l'atome d'hydrogène [16 p. 138] montre que, pour ces états qui ont exactement la même énergie si l'on s'en tient à l'équation de Dirac, le comportement de l'angle  $\beta$  est tout à fait différent. Sur l'axe  $Oz$ ,  $\beta$  présente un maximum et un minimum pour les états  $2s1/2$  et seulement un extremum pour les états  $2p1/2$ . De plus l'angle  $\beta$  n'est même pas partout défini, car l'invariant  $\Omega_2$  est nul pour tous les états de l'atome  $H$  dans le plan  $z = 0$ . Donc aux endroits de ce plan où  $\Omega_1$  s'annule aussi, l'angle  $\beta$  n'est pas défini. D'une manière générale il est très dangereux de baser une interprétation physique sur la seule étude des ondes planes monochromatiques illimitées, solutions très particulières et sans véritable existence physique, comme l'a souvent souligné Louis de Broglie.

Le fait que l'angle  $\beta$  ne soit pas lié au signe de l'énergie renforce l'intérêt pour l'interprétation physique qu'en a donnée Georges Lochak comme faisant le pendant, pour le magnétisme, de la phase classique liée à l'électricité [2 à 5].

## 2 Sur le moment cinétique

La résolution de l'équation linéaire de Dirac, dans le cas de l'atome d'hydrogène, passe par une étude détaillée du moment cinétique. Les opérateurs du moment cinétique  $L$  de la théorie de Schrödinger ne sont plus des constantes du mouvement, et ce sont uniquement les opérateurs du moment cinétique total  $J = L + S$  qui commutent avec le hamiltonien  $H$ . On peut donc trouver des états qui sont vecteurs propres des opérateurs  $H$ ,  $J_3$  et  $J^2$ . On démontre alors que, si  $\Psi_{jm}$  est un vecteur propre de  $J_3$  et  $J^2$ , c'est à dire si:

$$J^2\Psi_{jm} = j(j+1)\Psi_{jm} ; J_3\Psi_{jm} = m\Psi_{jm} \quad (2-1)$$

$m$  et  $j$  sont, soit entiers, soit tous deux demi-impairs et  $m$  ne peut prendre que les valeurs  $j, j-1, \dots, -j+1, -j$ .

Mais en fait, dans la théorie linéaire, on ne se contente pas de ne prendre que des vecteurs propres de  $H, J^2$  et  $J_3$ , on impose en outre à  $\Psi$  d'être aussi vecteur propre de l'opérateur:

$$K = \gamma_0(S \cdot J + 1) \quad (2-2)$$

sans s'interroger beaucoup sur la signification physique de cette condition supplémentaire.

Lorsqu'on passe de l'équation linéaire à notre équation non linéaire, on ne peut plus procéder de la même façon. En effet il n'y a plus de hamiltonien indépendant de  $\Psi$ , et Georges Lochak m'a fait remarquer qu'il faut alors revenir à la définition des intégrales premières en mécanique ondulatoire: l'opérateur  $J$  est intégrale première du mouvement si l'intégrale d'espace correspondante est constante, c'est à dire si:

$$\frac{d}{dt} \left( \int \Psi^\dagger J \Psi dv \right) = 0 \quad (2-3)$$

De plus, Georges Lochak m'a indiqué que, pour l'équation non linéaire (2), on a effectivement la conservation du moment cinétique total  $J$ , c'est à dire (2-3).

L'étude du moment cinétique ne fournit pas seulement les nombres quantiques attendus par les spectroscopistes, elle fournit en outre des solutions à variables séparables, en coordonnées sphériques. Or Krüger [15] a effectué le travail en sens inverse et résolu le problème de la séparation

des variables pour les solutions de l'atome d'hydrogène, aussi est-il possible d'obtenir les bons nombres quantiques d'une toute autre manière. Krüger utilise:

$$\begin{aligned} x^1 = x &= r \sin \theta \cos \varphi ; x^2 = y = r \sin \theta \sin \varphi ; x^3 = z = r \cos \theta \\ \vec{r} &= x\gamma_{10} + y\gamma_{20} + z\gamma_{30} = rS\gamma_{30}S^{-1} ; S = e^{-\frac{\varphi}{2}\gamma_{21}}e^{-\frac{\theta}{2}\gamma_{13}} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Si l'on pose:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{r\sqrt{\sin \theta}}S ; \underline{\partial} = \gamma_{10}\partial_1 + \gamma_{20}\partial_2 + \gamma_{30}\partial_3 \\ \partial' &= \gamma_{30}\partial_r + \gamma_{10}\frac{1}{r}\partial_\theta + \gamma_{20}\frac{1}{r\sin \theta}\partial_\varphi \end{aligned} \quad (2-5)$$

on obtient:

$$\underline{\partial} = \Omega\partial'\Omega^{-1} \quad (2-6)$$

La séparation des variables  $t$  et  $\varphi$  s'obtient en posant:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_{32}) ; \\ \Psi &= \Omega\Psi_1e^{(m\varphi - \frac{E}{\hbar}t)\gamma_{13}}\underline{U} = \frac{1}{r\sqrt{\sin \theta}}e^{-\frac{\varphi}{2}\gamma_{21}}e^{-\frac{\theta}{2}\gamma_{13}}\Psi_1\underline{U}e^{(m\varphi - \frac{E}{\hbar}t)\gamma_{21}} \end{aligned} \quad (2-7)$$

L'équation non linéaire (2) se réduit alors, dans un potentiel coulombien à:

$$\begin{aligned} E\Psi_1 + (\gamma_{30}\partial_r + \gamma_{10}\frac{1}{r}\partial_\theta)\Psi_1\gamma_{13} - \frac{m}{r\sin \theta}\gamma_{20}\Psi_1 + \frac{Z\alpha}{r}\Psi_1 &= M\gamma_0\Psi_1\gamma_0e^{\beta\hat{i}} \\ \alpha &= \frac{e^2}{\hbar c} ; M = \frac{m_0c}{\hbar} \end{aligned} \quad (2-8)$$

En fait l'utilisation de la méthode précédente ne permet pas seulement de séparer les variables  $t$  et  $\varphi$ , elle simplifie aussi grandement le calcul des opérateurs  $J$ . En algèbre d'espace-temps, ils prennent la forme:

$$\begin{aligned} J_1\Psi &= (y\partial_z - z\partial_y)\Psi\gamma_{12} + \frac{1}{2}\gamma_{21}\Psi\gamma_{12} \\ J_2\Psi &= (z\partial_x - x\partial_z)\Psi\gamma_{12} + \frac{1}{2}\gamma_{32}\Psi\gamma_{12} \\ J_3\Psi &= (x\partial_y - y\partial_x)\Psi\gamma_{12} + \frac{1}{2}\gamma_{13}\Psi\gamma_{12} \end{aligned} \quad (2-9)$$

et l'on obtient:

$$\begin{aligned} J_3(\Omega\Psi U) &= -\Omega\partial_\varphi\Psi\gamma_{13}U \\ J^2(\Omega\Psi U) &= \Omega\left(-\frac{1}{4}\Psi + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\gamma_{21}\partial_\varphi\Psi - \partial_{\theta\theta}^2\Psi - \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}^2\Psi\right)U \end{aligned} \quad (2-10)$$

Donc l'équation aux valeurs propres pour  $J_3$  se simplifie:

$$\begin{aligned} J_3(\Omega\Psi U) &= m(\Omega\Psi U) \iff -\partial_\varphi\Psi\gamma_{13} = m\Psi \\ \iff \Psi &= \Psi(t, r, \theta)e^{m\varphi\gamma_{13}} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Il en résulte que toute solution séparant les variables  $t$  et  $\varphi$  est vecteur propre de  $J_3$ , avec la valeur propre  $m$  ou que tout vecteur propre de  $J_3$ , sépare la variable  $\varphi$  des autres variables. Cette situation n'est évidemment pas un hasard puisque la séparation des variables, pour une équation aux dérivées partielles, est liée à une symétrie du problème, ici à la symétrie sphérique du potentiel coulombien. Notons que  $\Psi$  s'écrit, en détaillant (2-7):

$$\Psi = \frac{1}{r\sqrt{\sin\theta}}e^{-\frac{\varphi}{2}\gamma_{21}}e^{-\frac{\theta}{2}\gamma_{13}}\Psi_1\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_{32})e^{(m\varphi - \frac{E}{\hbar}t)\gamma_{21}} \quad (2-12)$$

donc  $\Psi$  n'aura une valeur définie que si  $m$  et donc aussi  $j$  est demi-impair. Si  $m$  était entier, le changement de  $\varphi$  en  $\varphi + 2\pi$  changerait de signe  $\Psi$ . En outre, pour tout  $\Psi$  de la forme (2-12), c'est à dire pour toute solution stationnaire et vecteur propre de  $J_3$  avec la valeur propre  $m$ ,  $\Psi$  est vecteur propre de  $J^2$  si:

$$\partial_{\theta\theta}^2\Psi_1 + \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Psi_1 - m\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\gamma_{21}\Psi_1\gamma_{13} = 0 \quad (2-13)$$

Pour l'équation non linéaire, comme pour l'équation linéaire de Dirac, on peut poursuivre le processus de séparation des variables en posant:

$$\Psi_1 = \hat{i}\eta g + \gamma_{30}\eta f ; \eta = \eta(r) ; g = g(\theta) ; f = f(\theta) \quad (2-14)$$

où  $f$  et  $g$  sont à valeur paire, donc commutent avec  $\hat{i}$ . On peut alors séparer les fonctions radiales et les fonctions angulaires si  $f$  et  $g$  commutent avec  $\gamma_0$  et  $\gamma_{13}$  et l'on obtient:

$$-g'\gamma_{13} + \frac{m}{\sin\theta}f = \kappa g ; f'\gamma_{13} + \frac{m}{\sin\theta}g = \kappa f \quad (2-15)$$

$$(E + \frac{Z\alpha}{r})\eta + M\gamma_0\eta\gamma_0 e^{\beta i} + \gamma_{30}\eta'\gamma_{13} - \gamma_{10}\frac{\kappa}{r}\eta = 0 \quad (2-16)$$

où  $\kappa$  est une constante, à ce stade du calcul sans valeur particulière. On peut voir de deux manières différentes que  $\kappa$  ne prend pas des valeurs quelconques: on peut ramener (2-15) à l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer et prouver que  $\Psi$  n'est de carré sommable que si  $2\kappa$  est un entier relatif non nul. On peut obtenir ce même résultat en mettant (2-14) dans (2-13), car on a:

$$\partial_{\theta\theta}^2 \Psi_1 + [(j + \frac{1}{2})^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \Psi_1 - m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \gamma_{21} \Psi_1 \gamma_{13} = [(j + \frac{1}{2})^2 - \kappa^2] \Psi_1 \quad (2-17)$$

donc  $\Psi$  est vecteur propre de  $J^2$  si, et seulement si:

$$\kappa^2 = (j + \frac{1}{2})^2 \quad (2-18)$$

Donc les solutions du type (2-14), issue de la séparation des variables, sont automatiquement vecteurs propres de  $J^2$  avec la valeur propre  $j(j+1)$  où  $j$  vérifie (2-18), c'est à dire où  $2\kappa$  est un entier relatif non nul. Il est à noter que (2-13) admet bien d'autres solutions que celles de la forme (2-14). C'est donc la séparabilité, et non pas la seule conservation du moment cinétique, qui permet d'obtenir les bons nombres quantiques. Dans la théorie linéaire on obtient quand même les trois nombres quantiques  $m, j, \kappa$  parce que l'on impose en plus à  $\Psi$  d'être univaluée et vecteur propre de l'opérateur  $K$ . Avec l'équation non linéaire (2), la séparation des variables n'est que partielle, parce que l'angle d'Yvon-Takabayasi est fonction de  $r$  et  $\theta$ . Pour chaque valeur de  $\theta$  on obtient une équation (2-16) différente. Mais il se trouve que, pour toute valeur de  $m, j$  et  $\kappa$ , l'angle de Takabayasi se comporte de manière très particulière dans le plan d'équation  $z = 0$ , et (2-16) est alors très proche de l'équation radiale de l'équation linéaire. C'est pour cela que l'intégrabilité entraîne l'existence, comme dans la théorie linéaire, de valeurs bien précises pour les niveaux d'énergie.

### 3 Correspondance avec la théorie électro-faible

L'électron, particule chargée, interagit avec tout champ électromagnétique. Mais il interagit d'une autre manière, dans les phénomènes radioactifs avec émission d'électron positif ou négatif. La théorie de



Fermi de ces forces dites faibles a évolué vers la théorie standard actuelle, construite à partir d'une invariance de jauge locale sous un groupe  $U(1) \times SU(2)$ . Hestenes [17] et Boudet [14] ont tenté de traduire ce modèle dans le formalisme de l'algèbre d'espace-temps. Le problème tient à ce que, à l'intérieur de l'algèbre d'espace-temps, il y a plusieurs façons d'obtenir un groupe  $U(1) \times SU(2)$ . Ce groupe peut être engendré aussi bien par:  $\hat{i}; \gamma_{21}; \gamma_{32}; \gamma_{13}$  que par  $\gamma_{21}; \hat{i}; \gamma_3; \hat{i}\gamma_3$ . Le premier groupe, mis en avant par Hestenes, ne peut pas convenir car la phase électrique  $\varphi$  correspond à la multiplication de  $\Psi$  par  $e^{i\varphi}$ , et la multiplication de  $\Psi$  par  $i$  se traduit par la multiplication de  $\Psi$  par  $\gamma_{21}$  à droite. On doit donc nécessairement prendre  $\gamma_{21}$  comme générateur du groupe de jauge électrique  $U(1)$ , ainsi que le fait R. Boudet [14]. Mais celui-ci prend ensuite pour  $SU(2)$  un groupe engendré par  $\gamma_{21}; \gamma_{32}; \gamma_{13}$ , donc le groupe de jauge ne peut pas être exactement le produit direct de  $U(1)$  par  $SU(2)$ .

Nous avons proposé [16, p 86] une extension du groupe de jauge  $U(1) \times U(1)$  de l'équation non linéaire [2] à un groupe  $U(1) \times SU(2)$  engendré par  $\gamma_{21}; \hat{i}; \gamma_3; \hat{i}\gamma_3$ . Pour cela il faut étendre le domaine de variation possible pour l'onde. On introduit un nombre minimum de paramètres supplémentaires en posant:

$$\Phi = \Psi Q; Q = a_1 + a_2 \hat{i} + a_3 \gamma_3 + a_4 \hat{i} \gamma_3; a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 \quad (3-1)$$

Notons que l'onde du neutrino, si l'inexistence du neutrino droit se confirme, est à valeur dans  $\mathbb{C}^2$  ou  $\mathbb{R}^4$ , donc peut correspondre aux 4 paramètres  $a_i$  supplémentaires introduits ici. De plus on a:

$$\begin{aligned} \Phi \gamma_0 \tilde{\Phi} &= \Psi (a_1 + a_2 \hat{i} + a_3 \gamma_3 + a_4 \hat{i} \gamma_3) \gamma_0 (a_1 + a_2 \hat{i} + a_3 \gamma_3 - a_4 \hat{i} \gamma_3) \tilde{\Psi} \\ &= \Psi (a_1 + a_2 \hat{i} + a_3 \gamma_3 + a_4 \hat{i} \gamma_3) (a_1 - a_2 \hat{i} - a_3 \gamma_3 - a_4 \hat{i} \gamma_3) \gamma_0 \tilde{\Psi} \\ &= \Psi Q Q^{-1} \gamma_0 \tilde{\Psi} = \Psi \gamma_0 \tilde{\Psi} \end{aligned} \quad (3-2)$$

donc  $Q$  n'introduit aucun courant électrique supplémentaire, ce qui est attendu d'une particule neutre comme le neutrino.  $Q$  n'introduit aucune masse supplémentaire, ce qui est conforme à la théorie standard, même si la question de la masse du neutrino est toujours ouverte.

Rendre l'invariance de jauge locale nécessite d'introduire, en plus du vecteur potentiel électromagnétique  $A$ , trois autres vecteurs d'espace-temps potentiels, notés  $B_1, B_2, B_3$ , et trois champs bivectoriels similaires

au champ électromagnétique  $F$ , notés  $F_1, F_2, F_3$ , tels que:

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial\Lambda B_1 + \frac{g}{\hbar c}(B_2 B_3 - B_3 B_2) \\ F_2 &= \partial\Lambda B_2 + \frac{g}{\hbar c}(B_3 B_1 - B_1 B_3) \\ F_3 &= \partial\Lambda B_3 + \frac{g}{\hbar c}(B_1 B_2 - B_2 B_1) \end{aligned} \quad (3-3)$$

Les équations d'évolution des champs peuvent être obtenues à partir de la densité lagrangienne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \hbar \langle \partial\Phi \hat{i}\gamma_3 \tilde{\Phi} \rangle_0 - m_0 c \rho - \frac{e}{c} \langle A\Phi\gamma_0 \tilde{\Phi} \rangle_0 + \frac{g}{c} \langle B_1 \Phi\gamma_3 \tilde{\Phi} - B_2 \Phi \hat{i} \tilde{\Phi} + B_3 \Phi \tilde{\Phi} \rangle_0 \\ &+ \frac{1}{8\pi} \langle -F\tilde{F} + F_1 \tilde{F}_1 + F_2 \tilde{F}_2 + F_3 \tilde{F}_3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

où  $\langle M \rangle_i$  désigne la partie i-vectorielle de  $M$ . On obtient alors les équations d'évolution:

$$\hbar \partial\Phi \hat{i}\gamma_3 - m_0 c \frac{1}{\rho} \Phi\gamma_0 \tilde{\Phi}\Phi\gamma_0 - \frac{e}{c} A\Phi\gamma_0 + \frac{g}{c} (B_1 \Phi\gamma_3 - B_2 \Phi \hat{i} + B_3 \Phi) = 0 \quad (3-5)$$

$$\partial \cdot F = \frac{4\pi}{c} e\Phi\gamma_0 \tilde{\Phi} \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} \partial \cdot F_1 &= \frac{4\pi}{c} g \langle \Phi\gamma_3 \tilde{\Phi} \rangle_1 + \frac{2g}{\hbar c} (B_3 \cdot F_2 - B_2 \cdot F_3) \\ \partial \cdot F_2 &= \frac{4\pi}{c} g \langle -\Phi \hat{i} \tilde{\Phi} \rangle_1 + \frac{2g}{\hbar c} (B_1 \cdot F_3 - B_3 \cdot F_1) \\ \partial \cdot F_3 &= \frac{4\pi}{c} g \langle \Phi \tilde{\Phi} \rangle_1 + \frac{2g}{\hbar c} (B_2 \cdot F_1 - B_1 \cdot F_2) \end{aligned} \quad (3-7)$$

L'équation (3-5) est invariante sous les transformations de jauge locale:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi e^{\varphi\gamma_{12}} \quad ; \quad A \rightarrow A' = A + \frac{\hbar c}{e} \partial\varphi \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi e^{a_1 \hat{i}} \quad ; \quad B_1 \rightarrow B'_1 = B_1 + \frac{\hbar c}{g} \partial a_1 \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi e^{a_2 \gamma_3} \quad ; \quad B_2 \rightarrow B'_2 = B_2 + \frac{\hbar c}{g} \partial a_2 \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi e^{a_3 \hat{i}\gamma_3} \quad ; \quad B_3 \rightarrow B'_3 = B_3 + \frac{\hbar c}{g} \partial a_3 \end{aligned} \quad (3-8)$$

Sous une forme différente on a ici un modèle très proche de celui de la théorie électro-faible. Il doit bien sûr être complété, tout comme le modèle initial de Glashow, Weinberg et Salam, pour rendre compte de la très courte portée des interactions faibles. Si le modèle précédent est le bon raccordement entre la théorie standard et l'algèbre d'espace-temps, alors le potentiel  $B$  de Cabibbo et Ferrari de la théorie du monopôle est le potentiel  $B_1$  des équations précédentes. La symétrie entre électricité et magnétisme ne serait donc que très partielle, tout comme la symétrie existant entre un photon et un boson  $Z_0$ . L'intérêt du modèle précédent tient à ce que les invariances de jauge de (3-8) sont les seules qui soient compatibles avec la conservation du courant de (3-2). Le fait que les électrons ne sont sensibles qu'aux interactions électromagnétiques et faibles, et pas aux interactions fortes, serait ainsi une conséquence de la forme des équations d'onde de l'électron.

## Références

- [1] C. Daviau et G. Lochak: *Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire* - Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 16 n°1, 1991.
- [2] G. Lochak: *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin 1/2* - Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 8 n°4, 1983 et Vol. 9 n°1, 1984.
- [3] G. Lochak: *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin 1/2 magnetic monopole* - Proceedings of the 4th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics, CISM, 1985.
- [4] G. Lochak: *Wave equation for a magnetic monopole* - International Journal of Theoretical Physics, Vol. 24 n°10, 1985.
- [5] G. Lochak: *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac* (Etats magnétiques du champ de Majorana) - Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 17 n°2, 1992.
- [6] D. Hestenes: *Space-Time Algebra* - Gordon & Breach, New-York, 1966.
- [7] D. Hestenes: *Real Spinor Fields* - Journal of Mathematical Physics, Vol. 8 n°4, 1967.
- [8] D. Hestenes: *Local observables in the Dirac theory* - Journal of Mathematical Physics, Vol. 14 n°7, 1973.
- [9] D. Hestenes: *Proper particle mechanics* - Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10, 1974.
- [10] D. Hestenes: *Proper dynamics of a rigid point particle* - Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10, 1974.
- [11] D. Hestenes: *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* - Journal of Mathematical Physics, Vol. 16 n°3, 1975.
- [12] D. Hestenes: *A unified language for Mathematics and Physics & Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* - JSR Chisholm & AK Common eds, Reidel, Dordrecht, 1986.

- [13] R. Boudet: *La géométrie des particules du groupe  $SU(2)$  et l'algèbre réelle d'espace-temps* - Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 13 n°1, 1988.
- [14] R. Boudet: *Non abelian gauge fields in the real Clifford algebra of space time*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* - F. Bracks, R. Delanghe and H. Serras eds, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [15] H. Krüger: *New solutions of the Dirac equation for central fields* - D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, *The Electron* 49-81, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [16] C. Daviau: *Equation de Dirac non linéaire* - Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 5 Mars 1993.
- [17] D. Hestenes: *Space-Time Structure of Weak and Electromagnetic Interactions* - *Foundation of Physics*, Vol. 12 n°2, 1982.

*(Manuscrit reçu le 3 décembre 1993)*