Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 19, n°4, 1994

Sur un modèle de photon tachyonique

R. Dutheil

Fondation Louis de Broglie
23 Quai Conti 75006 Paris

RÉSUMÉ. Dans le système de coordonnées du cône de lumière à deux dimensions, la combinaison linéaire des équations de Dirac du genre temps et du genre espace conduit à considérer le photon comme formé d'un fermion bradyonique et d'un fermion tachyonique. Il est possible de généraliser ces résultats à quatre dimensions dans une métrique et un système de coordonnées adaptés au cône de lumière. Un tel modèle de photon tachyonique pourrait fournir une interprétation alternative pour expliquer un certain nombre de résultats expérimentaux, par exemple ceux observés dans les guides d'ondes, ainsi que les ondes évanescentes.

ABSTRACT. We analyse the isomorphism of $SO(3,1;C)$ and $SO(1,3;C)$ groups, from which one can derive complete LORENTZ groups L_+^T and $L_+^{T'}$, which are subluminal and superluminal respectively. It is shown that it is impossible to find an operator belonging to $SO(4;C)$ that serves to pass from one group to the other. However, by considering the $SO(2;C)$ group, namely the $SO(1,1;C)$ groups, it is possible to define two conjugate LORENTZ groups with two dimensions l_+^T and $l_+^{T'}$. On this basis, and using a purely algebraic method, we rediscover the concept of the IMF referential frame and the light cone coordinates.

By then writing the time-like and space-like KLEIN-GORDON and DIRAC equations in this coordinate system, we search for a common solution and find a DIRAC equation defining a particle whose rest frame is of the IMF type, with a helicity $|\lambda\vec{p}\rangle$ such that $\lambda = \pm 1$. However the solutions to this spinorial equation can be identified as the components of the electromagnetic field tensor.

In these conditions, it can consider that a photon model has been defined.

Introduction

Certains auteurs considèrent l'électron, le quark et le photon comme formés de tachyons [1][2]. Pour l'électron nous avons présenté un tel modèle [3][4]. Dans cet article nous proposons un modèle de photon tachyonique basé sur notre théorie de la Relativité dans la région du genre espace [5]. En utilisant le système de coordonnées à deux dimensions du cône de lumière [6], nous montrons qu'il peut exister une particule à deux composantes : un fermion bradyonique et un fermion tachyonique. Une telle particule possède une hélicité $|\lambda\vec{p}\rangle$ où $\lambda = \pm 1$. Les composantes spinorielles de l'équation du premier ordre de cette particule peuvent être identifiées aux composantes du tenseur champ électromagnétique, résultat confirmé rigoureusement par l'application de la théorie du champ de spin maximum 1, utilisant l'algèbre des formes extérieures. On peut alors identifier cette particule à un photon.

Ce résultat obtenu dans le système de coordonnées du cône de lumière à deux dimensions, peut être généralisé dans un système de coordonnées rectilignes et curvilignes [7] adapté au cône de lumière. Nous exposerons en détail cette généralisation dans un article ultérieur. Un tel modèle pourrait fournir une base d'interprétation à certains résultats expérimentaux récents [11,12] où l'on observe des paquets d'ondes de vitesse de groupe supérieure à c, en particulier dans les guides d'ondes, et également pour les ondes évanescentes.

I. Sur les groupes de Lorentz isomorphes

Les groupes $SO(3,1;C)$ et $SO(1,3;C)$ des 4×4 matrices complexes, isomorphes à $SO(4;C)$ sont isomorphes et conservent respectivement les métriques de signatures $+---$ et $-+++$.

Il en résulte qu'il existe deux groupes complets et orthochrones de Lorentz ayant même Algèbre de Lie et isomorphes [8]

$$L_+^T \quad \text{et} \quad L_+^{T'}$$

conservant respectivement les métriques de signatures respectives $+---$ et $-+++$.

L_+^T est le groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz, Λ' des transformations superlumineuses [1] isomorphe au groupe des 4×4 matrices réelles de Lorentz Λ des transformations sous-lumineuses.

Cherchons s'il existe un opérateur permettant de passer de L_+^T à $L_+^{T'}$ et réciproquement. Considérons donc les espaces pseudo-euclidiens définis par les métriques réelles

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

$$dS^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

de signatures respectives $+---$ et $-+++$, la métrique (1) étant définie dans le système de coordonnées réelles habituelles (x^μ), la métrique (2) étant définie dans un système de coordonnées réelles inhérentes (X^ν) [2].

Les tenseurs métriques covariants de (1) et (2) étant respectivement

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [G_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

nous pouvons écrire

$$[G_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] \quad , \quad [g_{\mu\nu}] = S^{-1}[G_{\mu\nu}] \quad , \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{4}$$

où

$$[S] = [-1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nous avons

$$[S] = [T][T] \tag{6}$$

où

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & \pm i & 0 & 0 \\ \pm i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm i \end{pmatrix} \tag{7}$$

Nous avons choisi le signe + devant chaque élément $i = e^{i\pi/2}$, le choix du signe $-$ donnant les mêmes résultats.

L'opérateur $[T]$ ne fait pas partie de $SO(4; C)$, car

$$\|[T]\| = -1 \tag{8}$$

On ne peut donc passer du groupe des 4×4 matrices de Lorentz L_+^T au groupe des 4×4 matrices de Lorentz $L_+^{T'}$ par une rotation, ce qui est en accord avec le concept de coordonnées inhérentes.

Par contre si l'on considère l'opérateur

$$[O] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$[O]$ fait partie du groupe $SO(2;C)$ isomorphe à $SO(1,1;C)$, car

$$\|[O]\| = +1 \tag{10}$$

$SO(2;C)$ groupe des $2x2$ matrices complexes λ^* et λ'^* conserve les métriques de signatures respectives $+-$ et $-+$ et comme

$$[O][O]^{-1} = [O]^{-1}[O] = [1] \tag{11}$$

λ^* et λ'^* sont conjuguées dans $SO(2;C)$, soit

$$\lambda'^* = [O]\lambda[0]^{-1} \tag{12}$$

Il en résulte qu'il existe deux sous-groupes de Lorentz isomorphes à deux dimensions, soit

$$l_+^T \quad \text{et} \quad l_+^{T'}$$

conservant les métriques réelles de signatures $+-$ et $-+$. Ces deux sous-groupes des 2×2 matrices réelles λ et λ' sont conjugués, soit

$$\lambda' = [O]\lambda[O]^{-1} \tag{13}$$

Cette propriété de conjugaison permet de définir de nouvelles coordonnées inhérentes réelles

$$\tau, \xi$$

et deux sous-groupes de transformations entre les $(x^\nu)(\nu = 0,1)$ et (τ, ξ) d'une part et les $X^\mu(\mu = 0,1)$ et (τ, ξ) d'autre part. En effet, nous avons

$$(X^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi/2} \\ e^{i\pi/2} & 0 \end{pmatrix} (x^\nu)(\mu, \nu = 0,1) \tag{14}$$

$e^{i\pi/2}$ étant opérateur de rotation de $\pi/2$.

De (14), nous déduisons

$$e^{-i\pi/4}\chi^1 = e^{i\pi/4}x^0 \quad , \quad e^{i\pi/4}\chi^0 = e^{-i\pi/4}x^1 \tag{15}$$

i étant changé en $-i$ dans la deuxième relation de (15). Opérons le changement de coordonnées

$$\tau^* = e^{i\pi/4}x^0 \quad , \quad \xi^* = e^{-i\pi/4}x^1 \tag{16}$$

au second membre de (15) et

$$\xi^* = e^{-i\pi/4}X^1 \quad , \quad \tau^* = e^{i\pi/4}X^0 \tag{17}$$

au premier membre, les X^μ et x^ν, $(\mu, \nu = 0, 1)$ étant réelles. A partir de (16) nous pouvons écrire

$$\tau^* + \xi^* = e^{i\pi/4}x^0 + e^{-i\pi/4}x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + it) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ix) \tag{18}$$

en posant $x^0 = t$ $(c = 1)$; $x^1 = x$, (18) peut alors s'écrire

$$\tau^* + \xi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) + \frac{i}{\sqrt{2}}(t - x) \tag{19}$$

Définissons de nouvelles coordonnées inhérentes, en posant

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \quad , \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \tag{20}$$

et soit Ω le référentiel associé à ces coordonnées : $\Omega(\tau, \xi, y'; z')$. Il est clair que l'on peut identifier ces nouvelles coordonnées et Ω respectivement aux coordonnées du cône de lumière et à un référentiel IMF [1] [6], la transformation complète entre les deux systèmes de coordonnées (t, x, y, z) et (τ, ξ, y', z') s'écrivant

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau + \xi); y = y' \quad , \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau - \xi); z = z' \tag{21}$$

Les coordonnées (τ, ξ) sont inhérentes, alors que y' et z' sont du type ORF[2].

---

[1] IMF = Infinite Momentum Frame

[2] ORF = Ordinary Referential Frame

On obtient la transformation IMF du genre espace de la même manière à partir de (17) et en permutant les axes τ et ξ :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\tau} + \tilde{\xi}) \quad , \quad Y = Y' \quad , \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi} - \tilde{\tau}) \quad , \quad Z = Z' \qquad (22)$$

En considérant strictement les coordonnées inhérentes, (21) correspond à la métrique $t^2 - x^2 = \tau\xi + \xi\tau > 0$ avec toujours $\tau > 0$, $\xi > 0$ et (22) à la métrique $X^2 - T^2 = -\tilde{\xi}\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\tilde{\xi} > 0$, avec toujours $\tilde{\tau} > 0$, $\tilde{\xi} < 0$, les lignes d'univers respectives du genre temps et du genre espace étant telles que $t > 0, \xi > 0$ et $\tilde{\tau} > 0, \tilde{\xi} < 0$.

Des événements du genre temps et du genre espace peuvent donc s'exprimer dans le même système de coordonnées (τ, ξ) dans deux référentiels du type Ω strictement équivalents.

Considérons les quadrivecteurs d'impulsion énergie du genre temps (π^0, π) avec $\pi^0 > 0$, $\pi > 0$ et du genre espace (Π^0, Π) avec $\Pi^0 > 0$, $\Pi < 0$. Soit :

$$\pi^0\pi + \pi\pi^0 = -\Pi\Pi^0 - \Pi^0\Pi = m^2c^2 > 0 \qquad (23)$$

correspondant à :

$$\tau\xi + \xi\tau = -\tilde{\xi}\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\tilde{\xi} > 0 \qquad (24)$$

Nous poserons :

$$\begin{pmatrix} \Pi^0 \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} \qquad (25)$$

soit

$$\Pi = -\pi^0 \quad , \quad \Pi^0 = \pi \quad , \quad \tilde{\tau} = \xi \quad , \quad \tilde{\xi} = -\tau$$

Nous dirons que (τ, ξ) et $(\tilde{\tau}, \tilde{\xi})$ sont conjuguées. A partir de (21) et (22), nous obtenons respectivement :

$$t - x = \sqrt{2}\xi \quad , \quad T - X = \sqrt{2}\tilde{\tau} = \sqrt{2}\xi = tx \qquad (26)$$

De même, il est aisé de voir que l'on a

$$p^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}mc = \frac{1}{\sqrt{2}}mc = \frac{1}{\sqrt{2}}h\nu/c = \frac{1}{\sqrt{2}}h\nu; (c = 1)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\Pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}mc = -\frac{1}{\sqrt{2}}h\nu; (c = 1) \tag{27}$$

correspondant respectivement à $\beta = 0$ dans le système (t, x) et $\beta = \infty$ dans le système (T, X).

II. Sur un modèle de particule dont le référentiel propre est du type Ω

Désignons par $\Omega(\tau, \xi, x^2, x^3)$ [3] le référentiel associé aux coordonnées (τ, ξ) telles que nous venons de les définir. Par rapport au référentiel ORF (= Ordinary Referential Frame) $x^\mu(\mu = 1, 1, 2, 3)$ nous avons en prenant

$$p^1 = p \quad , \quad p^2 = 0 \quad , \quad p^3 = 0 \quad , \quad (p^0)^2 - (p)^2 = m^2c^2 \tag{28}$$

et par rapport au référentiel Ω

$$\Pi^2\Pi + \Pi\Pi^0 = (p^0)^2 - (p)^2 = m^2c^2 \tag{29}$$

Dans le référentiel ORF, on obtient l'équation K.G en remplaçant :

$$p^0 \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{30}$$

soit

$$\Box\psi = \chi^2\psi \quad \text{où} \quad \Box = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{31}$$

en posant $\chi = mc/\hbar = m/\hbar$ avec $c = 1$.

Nous postulons que les opérateurs quantiques sont les mêmes par rapport à Ω, soit

$$\pi^0 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} \quad , \quad \pi = i\hbar\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{32}$$

En remplaçant dans (29), on obtient :

$$[\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \tau}]\psi(\tau, \xi) = [\partial_\tau\partial_\xi + \partial_\xi\partial_\tau]\psi(\tau, \xi) = \chi^2\psi(\tau, \xi) \tag{33}$$

équation K.G. du genre temps dans le système de coordonnées (τ, ξ).

---

[3] ou IMF (τ, ξ, x^2, x^3).

Par rapport au référentiel tachyonique $X^{\mu}(\mu = 0, 1, 2, 3)$ nous avons en posant

$$P^1 = P \quad , \quad P^2 = P^3 = 0 \quad , \quad (P^0)^2 - (P)^2 = \Pi^0\Pi + \Pi\Pi^0 = - = \tilde{m}^2c^2 \tag{34}$$

où $\Pi^0 > 0 \quad , \quad \Pi < 0$ et donc

$$-\Pi^0\Pi - \Pi\Pi^0 = \tilde{m}^2c^2 \quad , \quad \tilde{m} = m = \text{ masse propre} \tag{35}$$

En remplaçant par les opérateurs quantiques, on obtient l'équation K.G du genre espace dans le système de coordonnées (τ, ξ) soit :

$$-[\partial_\tau\partial_\xi + \partial_\xi\partial_\tau]\tilde{\psi}(\tau, \xi) = \chi^2\tilde{\psi}(\tau, \xi) \tag{36}$$

Pour obtenir l'équation du premier ordre du genre temps, nous employons la méthode classique, l'équation la plus simple étant de la forme

$$[\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} - \chi]\psi(y_\mu) = 0 \tag{37}$$

ou

$$[\gamma_\nu\partial_\nu - \chi]\psi(y_\mu) = 0(\nu, \mu = 0, 1 \quad , \quad y_0 = \tau \quad , \quad y_1 = \xi) \tag{38}$$

On applique l'opérateur

$$[\gamma_\lambda\partial_\lambda + \chi][\gamma_\nu\partial_\nu - \chi]\psi = [\gamma_\lambda\gamma_\nu\partial_\lambda\partial_\nu - \chi^2]\psi = 0 \tag{40}$$

ou encore

$$[\frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\lambda)\partial_\lambda\partial_\nu - \chi^2]\psi = 0(\lambda, \nu = 0, 1) \tag{41}$$

avec

$$\gamma_\lambda\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\lambda = 2g_{\lambda\nu}[1] \tag{42}$$

$g_{\lambda\nu}$ ayant comme valeurs dans le référentiel Ω

$$g_{00} = g_{11} = 0 \quad , \quad g_{01} = g_{10} = 1 \tag{43}$$

D'autre part, nous avons

$$(\gamma_0)^2 = (\gamma_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [O] \tag{44}$$

En résumé, les γ_μ doivent satisfaire aux deux conditions

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = 2 \quad [1] \quad , \quad (\gamma_0)^2 = (\gamma_1)^2 = [O] \tag{45}$$

Les matrices

$$\gamma_0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

répondent à ces conditions ; on a bien en effet

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Avec ces valeurs des γ_μ, l'équation de Dirac du genre temps s'écrira dans le système de coordonnées (τ, ξ)

$$[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 - \chi]\psi(\tau, \xi) = 0 \tag{48}$$

L'application de l'opérateur

$$[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \chi] \tag{49}$$

sur (48) donne bien

$$[\partial_\tau\partial_\xi + \partial_\xi\partial_\tau - \chi^2]\psi(\tau, \xi) = [\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0 - \chi^2]\psi(\tau, \xi) \tag{50}$$

Nous supposons que $\partial_0\partial_1 = \partial_1\partial_0$.

L'équation K.G du genre espace

$$[\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0]\tilde{\psi} = -\chi^2\tilde{\psi} \tag{51}$$

peut s'écrire

$$[\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0] - \chi^2]\tilde{\psi} = 0 \tag{52}$$

en posant

$$\tilde{\chi} = i\chi \tag{53}$$

d'où en gardant les mêmes matrices γ_0, γ_1 l'équation de Dirac du genre espace

$$[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 - \tilde{\chi}]\tilde{\psi} = [\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 - i\chi]\tilde{\psi} = 0 \tag{54}$$

soit en multipliant par i les deux membres de (54)

$$[i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_1\partial_1 + \chi]\tilde{\psi} = 0 \tag{55}$$

Les deux E.D. du genre temps et du genre espace sont donc

$$[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 - \chi]\psi = 0 \tag{56}$$

$$[i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_1\partial_1 + \chi]\tilde{\psi} = 0 \tag{57}$$

S'il existe une solution commune ψ à ces deux équations elle doit être telle que

$$[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 - \chi]\psi + [i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_1\partial_1 + \chi]\psi = 0 \tag{58}$$

soit

$$(1+i)[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1]\psi = 0 \tag{59}$$

ou en multipliant (59) par $(1-i)$

$$[2\gamma_0\partial_0 + 2\gamma_1\partial_1]\psi = 0 \tag{60}$$

et en posant

$$\Gamma_0 = 2\gamma_0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma_1 = 2\gamma_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

l'équation (60) devient

$$[\Gamma_0\partial_0 + \Gamma_1\partial_1]\psi = 0 \tag{62}$$

Si l'on applique l'opérateur

$$\frac{1}{4}[\Gamma_0\partial_0 + \Gamma_1\partial_1] = \frac{1}{2}[\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1] \tag{63}$$

à l'équation (62) on obtient

$$[\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0]\partial_0\partial_1\psi = 0 \tag{64}$$

en supposant $\partial_0\partial_1 = \partial_1\partial_0$, et comme

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = 2[1]; \tag{65}$$

on obtient bien l'équation

$$[\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0]\psi = 2\partial_0\partial_1\psi == 0 \tag{66}$$

D'autre part, la transformation (21), $\Omega - ORF$, soit IMF-ORF appliquée au vecteur Γ de composantes

$$\Gamma_0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

avec la matrice de rotation

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

donne la matrice des valeurs propres suivant ox

$$\Gamma_1 \to x = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{69}$$

matrice de Pauli suivant ox. Les valeurs propres fournissent le spin de la particule résultante, suivant Ox, soit

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

soit $\lambda = \pm 1$ dirigé suivant Ox dans le sens de l'impulsion ou en sens contraire, soit

$$|\lambda\vec{p}\rangle \tag{71}$$

Nous dirons que la particule résultante a une hélicité $\lambda = \pm 1$.

Il faut remarquer que la même transformation appliquée dans les mêmes conditions donne comme valeurs propres du spin suivant Ox pour la composante du genre temps et du genre espace

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

soit $s = \pm 1/2$.

Quelle est l'interprétation que l'on peut donner de la fonction d'onde ψ ? L'équation

$$2\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\psi = 2\partial_0\partial_1\psi = 0 \quad , \qquad \text{soit} \quad \partial_0\partial_1\psi = 0 \tag{73}$$

admet comme solution

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \tag{74}$$

où

$$\psi_0 = e^{i/\hbar\pi\tau} \quad , \quad \psi_1 = e^{-i/\hbar\pi\xi} \tag{75}$$

Dans ces conditions en effet (75) s'écrit

$$\partial_0\psi_0\partial_1\psi_0 + \partial_0\psi_1\partial_1\psi_1 = 0 \tag{76}$$

L'équation de premier ordre

$$[\Gamma_0\partial_0 + \Gamma_1\partial_1]\psi = 0 \tag{77}$$

devient en simplifiant par $2\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{78}$$

et a comme solution ψ_0 et ψ_1 données par (75).

Nous pouvons écrire (78) sous la forme :

$$\partial_0\psi_1 = 0 \quad , \quad \partial_1\psi_0 = 0 \tag{79}$$

ou

$$\partial_0\psi_1 + \partial_1\psi_0 = 0 \tag{80}$$

$-\psi_1$ et $-\psi_0$ sont également solutions de (79) et (80). Nous allons montrer que ψ_0 et ψ_1 peuvent être identifiées à deux des composantes d'un tenseur antisymétrique du deuxième ordre, ayant six composantes indépendantes, quatre de ces composantes indépendantes étant nulles dans le référentiel propre de la particule. Soit

$$t^{\lambda\mu}(\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3)$$

ce tenseur, les deux composantes indépendantes non nulles étant

$$t^{20} = -\psi_1 \quad , \quad t^{02} = \psi_1 = e^{-i/\hbar\pi\xi} \tag{81}$$

$$t^{21} = -\psi_0 \quad , \quad t^{12} = \psi_0 = e^{i/\hbar\pi^0\xi} \tag{82}$$

Nous pouvons écrire d'après (26) et (27), en remplaçant dans (81) et (82)

$$t^{0'2'} = e^{2\pi i\nu(t-x)} \tag{83}$$

$$t^{1'2'} = e^{2\pi i\nu(t-x)} \tag{84}$$

qui sont les composantes de $t^{\mu\nu}$ dans le référentiel ORF. (83) et (84) sont solutions de

$$\partial_0 t^{2'0'} + \partial_1 t^{2'1'} = 0 \tag{85}$$

soit

$$\partial_{\mu'} t^{\lambda'\mu'} = 0 \quad (\lambda' = 2 \quad , \quad \mu' = 0,1) \tag{86}$$

(86) est identique à

$$\partial_\mu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (J^\lambda = 0) \quad (\lambda = 2; \mu = 0,1) \tag{87}$$

correspondant à un photon se propageant dans le référentiel ORF (t, x, y, z) suivant l'axe des $x(x < 0)$. A ce photon est associée l'onde plane monochromatique (Ey, Hz) telle que

$$Ey = e^{2\pi i\nu(t-x)} \quad , \quad Hz = e^{2\pi i\nu(t-x)} \quad , \tag{88}$$

Toutes les composantes de $F^{\lambda\mu}$ sont nulles

$$F^{23} = F^{31} = F^{10} = F^{30} = 0 \tag{89}$$

sauf

$$F^{02} = e^{2\pi i\nu(t-x)} = Ey \tag{90}$$

$$F^{12} = e^{2\pi i\nu(t-x)} = Hz \tag{91}$$

(93) et (94) étant identiques à (83) et (84).

Réciproquement, nous avons :

$$F^{1'2'} = e^{i/\hbar\pi^0\tau} \tag{92}$$

$$F^{0'2'} = e^{-i/\hbar\pi\xi} \tag{93}$$

dans le référentiel IMF, l'équation du photon dans ce référentiel étant

$$\partial_0 F^{2'0'} = 0 \quad , \quad \partial_1 F^{2'1'} = 0 \tag{94}$$

ou

$$\partial_0 F^{2'0'} + \partial_1 F^{2'1'} = 0 \qquad (95)$$

équations identiques à

$$\partial_0 t^{20} = \partial_0 \psi_1 = 0 \quad , \quad \partial_1 t^{21} = \partial_1 \psi_0 = 0 \qquad (96)$$

ou

$$\partial_0 t^{20} + \partial_1 t^{21} = 0 \qquad (97)$$

Nous allons montrer en annexe que l'on peut justifier rigoureusement ce résultat en utilisant la théorie du champ de spin maximum 1, employant l'algèbre des formes extérieures, c'est-à-dire la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer [9] généralisée par A. Lichnerowicz [10].

Ainsi sera établie l'identification

$$t^{20} = -\psi_1 \quad , \quad t^{02} = \psi_1 \quad , \quad t^{21} = -\psi_0 \quad , \quad t^{12} = \psi_0$$

ANNEXE. Sur une application de la théorie du champ de spin maximum 1 au modèle de particule de référentiel propre IMF.

Dans des articles antérieurs [13,14,15] nous avons présenté la théorie d'un modèle de particule, dont le référentiel propre est du type IMF. Nous avons écrit par rapport à un référentiel IMF et dans le système de coordonnées du cône de lumière (τ, ζ) les équations du premier ordre ou équations de Dirac respectivement du genre temps et du genre espace soit

$$[\gamma^\mu \partial_\mu - \chi]\Psi = 0 \qquad (1)$$

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \chi]\widetilde{\Psi} = 0 \qquad (2)$$

$$\gamma^0 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\Psi = \Psi(\tau, \zeta) \quad , \quad \widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}(\tau, \zeta) \qquad (4)$$

$$\chi = \frac{mc}{\hbar} = \frac{m}{\hbar}(c = 1) \qquad (5)$$

Les équations (1) et (2) sont conjuguées dans $SO(2; c)$ par l'opérateur

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Cherchant la solution commune à (1) et (2) nous avons trouvé l'équation du premier ordre

$$\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi = 0 \quad , \quad (\mu = 0,1) \tag{7}$$

$$\Gamma^{\mu} = 2\gamma^{\mu} \tag{8}$$

L'équation (7) est l'équation d'une particule de référentiel propre IMF et d'hélicité $|\vec{p}\lambda>$ telle que $\lambda = \pm 1$. Nous identifions cette particule au photon, en montrant que les composantes spinorielles des solutions de l'équation (7) peuvent être identifiées aux composantes du tenseur champ-électromagnétique. En effet (7) peut s'écrire en simplifiant par $2\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_0\begin{pmatrix}\Psi_0\\ \Psi_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_1\begin{pmatrix}\Psi_0\\ \Psi_1\end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

et a comme solutions Ψ_0 et Ψ_1 : (9) s'écrit en effet [14, p. 140]

$$\partial_0\Psi_1 = 0\partial_1\Psi_0 = 0 \tag{10}$$

ou

$$\partial_0\Psi_1 + \partial_1\Psi_0 = 0 \tag{11}$$

$-\Psi_1$ et $-\Psi_0$ sont également solutions de (10) et (11). Soit

$$t^{\lambda\mu}(\quad \text{ou} \quad t_{\lambda\mu}) \quad , \quad (\lambda,\mu = 0,1,2,3) \tag{12}$$

un tenseur antisymétrique du deuxième ordre ayant six composantes indépendantes, quatre de ces composantes étant nulles. Nous faisons l'identification pour les composantes non nulles [14, p. 141]

$$t^{20} = -\Psi_1 \quad , \quad t^{02} = \Psi_1 t^{21} = -\Psi_0 \quad , \quad t^{12} = \Psi_0 \tag{13}$$

Nous nous proposons dans cette annexe de justifier rigoureusement cette identification en utilisant l'algèbre des formes extérieures : en effet la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer [9] généralisée par A. Lichnerowicz [10] est la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1, utilisant la correspondance existant entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2. Dans cette théorie, on fait correspondre à l'opérateur de Dirac l'opérateur

$$(d + \delta)$$

sur les formes, le carré de cet opérateur étant le laplacien de Georges De Rahm.

Considérons donc avec A. Lichnerowicz [10, p. 75] un espace V_4 muni d'une métrique hyperbolique arbitraire. On généralise dans V_4 la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer pour un champ de spin maximum 1 : un tel champ est représenté par un 2-spineur

$$\Psi$$

de type $(1, 1)$.

Dans V_4 l'équation du premier ordre s'écrit

$$P\Psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi \tag{14}$$

où P désigne l'opérateur covariant de Dirac

$$P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \tag{15}$$

Or nous pouvons écrire l'équation (7)

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \tag{16}$$

Pour l'équation (16) l'opérateur de Dirac peut s'écrire

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \tag{17}$$

De toute manière nous pouvons écrire (16)

$$P\Psi = 0 \tag{18}$$

avec

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \tag{19}$$

ou

$$P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \tag{20}$$

car (16) généralisée dans V_4 a la forme

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0 \tag{21}$$

A. Lichnerowicz développe la correspondance entre l'algèbre extérieure des formes et les 2-spineurs dans V_4 [10, p. 77, par 31] :

L'Algèbre extérieure des formes de V_4, et le module des 2-spineurs admettent, en tant que modules, un isomorphisme S défini de la manière suivante. A toute p-forme

$$\alpha^{(p)}$$

faisons correspondre le 2-spineur

$$S\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p} \tag{22}$$

Si α est une forme non homogène de V_4

$$\alpha = \Sigma_{p=0}\alpha^{(p)} \tag{23}$$

et $S\alpha$ se définit par linéarité.

Inversement, en le rapportant à la base définie par les produits antisymétrismes de matrices γ distinctes, tout 2-spineur

$$\Psi$$

de type $(1,1)$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule

$$\Psi = \Sigma^4_{p=0}\frac{1}{p!}\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p} = \Sigma^4_{p=0}S\alpha^{(p)} \tag{24}$$

où les $\alpha^{(p)}$ sont des p-formes. Ainsi il existe une forme α et une seule telle que

$$\Psi = S\alpha \tag{25}$$

Appliquons ces résultats à l'équation (16) ou (21). Dans le cas considéré, le 2-spineur

$$\Psi$$

solution de cette équation est tel que

$$p = 2$$

soit maintenant

$$F_{\alpha\beta} \tag{26}$$

le tenseur champ-électromagnétique : c'est une 2-forme et en appliquant les résultats précédents, en particulier les relations (22) et (24) avec

$$p = 2$$

on voit qu'à la 2-forme $F_{\alpha\beta}$ correspond le 2-spineur

$$\Psi = \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta F_{\alpha\beta} \tag{27}$$

Dans les relations utilisées (22) et (24), pour

$$p = 2$$

nous avons

$$\rho_1 = \alpha \quad ; \quad \rho_2 = \beta \tag{28}$$

Les relations (22) et (24) montrent que dans le cas envisagé l'isomorphisme S est tel que

$$S = \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta \tag{29}$$

Or A. Lichnerowicz établit ensuite [10, p. 78, 79 ; par 32] une relation entre l'opérateur de Dirac

$$P$$

et les opérateurs

$$d \quad \text{et} \quad \delta$$

sur les formes

$$\alpha^{(p)}$$

Evaluons pour la p-forme $\alpha^{(p)}$

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p} \tag{30}$$

Les indices $\rho_1\ldots\rho_p$ sont tous différents. Distinguons les termes où l'indice α ne prend aucune des valeurs de la permutation

$$(\rho_1\ldots,\rho_p)$$

et ceux où il prend l'une de ces valeurs

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\Sigma_{\alpha\neq\rho_1\ldots\rho_p}\gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p}$$

$$-\frac{1}{(p-1)!}\gamma^{\rho_2}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)\alpha}_{\rho_2\ldots\rho_p} \tag{31}$$

les indices $\alpha, \rho_1 \dots \rho_p$ étant supposés distincts, on a, en introduisant le tenseur d'antisymétrisation de Kronecker

$$\gamma^\alpha \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} = \frac{1}{(p+1)!} \varepsilon^{\alpha\rho_1 \dots \rho_p}_{\lambda_0 \dots \lambda_p} \gamma^{\lambda_0} \dots \gamma^{\lambda_p} \tag{32}$$

En substituant cette expression dans le premier terme du second membre de (31) il vient

$$\begin{aligned} PS\alpha^{(p)} = & \frac{1}{(p+1)!} \gamma^{\lambda_0} \dots \gamma^{\lambda_p} (d\alpha^{(p)})_{\lambda_0 \dots \lambda_p} \\ & - \frac{1}{(p-1)!} \gamma^{p_2} \dots \gamma^{\rho_p} \nabla_\alpha \alpha^{(p)\alpha}_{\rho_2 \dots \rho_p} \end{aligned} \tag{33}$$

soit

$$PS\alpha^{(p)} = Sd\alpha^{(p)} + S\delta\alpha^{(p)} \tag{34}$$

Par linéarité on obtient ainsi la formule

$$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \tag{35}$$

Considérons donc les relations ainsi établies entre P et d et δ soit

$$PS\alpha^{(p)} = Sd\alpha^{(p)} + S\delta\alpha^{(p)} \tag{36}$$

ou

$$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \tag{37}$$

Dans le cas du 2-spineur que nous avons envisagé, solution de l'équation (16) ou (21), la forme α est une 2-forme qui s'écrit

$$F_{\alpha\beta} \tag{38}$$

Nous pouvons donc écrire en tenant compte de (29)

$$S\alpha = SF_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \tag{39}$$

Or d'après (27)

$$\Psi = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\alpha\beta} \tag{40}$$

Donc

$$S\alpha = SF_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta F_{\alpha\beta} \tag{41}$$

soit

$$S\alpha = \Psi \tag{42}$$

Dans le cas considéré, l'opérateur de Dirac s'écrit

$$P = \gamma^\alpha \partial_\alpha \tag{43}$$

(On peut du reste prendre la forme généralisée $P = \gamma^\alpha \nabla_\alpha$).

D'autre part l'équation (16) s'écrit

$$P\Psi = \gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \tag{44}$$

Or d'après (42) nous avons

$$P\Psi = PS\alpha = PSF_{\alpha\beta} \tag{45}$$

(44) peut alors s'écrire

$$PSF_{\alpha\beta} = 0 \tag{46}$$

En tenant compte de la relation fondamentale (37), nous pouvons maintenant écrire

$$PSF_{\alpha\beta} = S(dF_{\alpha\beta} + \delta F_{\alpha\beta}) = 0 \tag{47}$$

Nous en déduisons d'après (47)

$$dF_{\alpha\beta} + \delta F_{\alpha\beta} = 0 \tag{48}$$

ce qui implique nécessairement

$$dF_{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \delta F_{\alpha\beta} = 0 \tag{49}$$

Nous avons ainsi justifié rigoureusement l'identification faite précédemment [14].

Références

[1] M. Molski, J. Phys. A : Math. Gen. **24** (1991) 5063-5083.
[2] M. Molski, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993) 1765-1774.
[3] J.P. Vigier et R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège **52** (5) (1983).
[4] R. Dutheil, Ann. Fond. L. de Broglie, **15**, 4 (1990).

[5] R. Dutheil, *Théorie de la Relativité et Mécanique quantique dans la région du genre espace*, Ed. Derouaux-Ordina, Liège (1989). R. Dutheil, Ann. Fond. L. de Broglie, **15**, 4 (1990).
[6] J. Kogut and L. Susskind, Physics Reports, Phys. Lett. L, **8**, 75 (1973).
[7] R. Dutheil and al, *Recent developments in gravitation*, World Scientific Proceedings in the Relativity Meeting of Barcelona, Sept 1989, p. 423.
[8] R. Gilmore, *Lie groups, Lie Algebra and some their applications*, Wiley, New York (1974).
[9] G. Petiau, Académie Roy. Belge, C, Sc. math. Mémoires, 2e série, t. 16, n°2, 118 pages (Thèse Sc. math. Paris, 1936).
[10] A. Lichnerowicz, Bull. Soc. Math. France **92**, p. 11 à 100 (1964).
[11] A. Enders and G. Nimtz, J. Phys. 1 France 2 (1992) pp. 1693-1698.
[12] R.Y. Chiao, Phys. Rev. A **48**, R 34 (1993).
[13] Dutheil R., Ann. Fond. L. de Broglie, **17**, n°2, p.135, (1992).
[14] Dutheil R., Bull. Soc. r. Sc. Liège, **53** (5), pp. 293-316 (1984).
[15] Dutheil R., Bull. Soc. r. Sc. Liège, **53** (3-4), pp. 129-142 (1984).

Cet article est la refonte d'une communication présentée par J.Cl. Pecker à la société royale des sciences de Liège.
(R. Dutheil, Bull. Soc. Roy. sc. Liège, **53**, 1984, 129-142.)