

Panorama : Fractals et posets en relativité *

N. LYGERŌS

Département de Mathématiques Université LYON-I
43 bd. du 11 nov.1918, 69122 Villeurbanne Cedex

*C'est seulement la théorie qui décide de ce
qui peut être observé.*

Albert Einstein

RÉSUMÉ : Réflexion sur l'utilisation, à l'aide d'ordinateurs, en Relativité, de deux sortes d'êtres mathématiques: les Fractals - ensembles "continus" dont la dimension de Hausdorff est supérieure à la dimension topologique -, et les Posets - ensembles "discrets" munis d'un ordre partiel - afin d'étudier l'espacetemps.

ABSTRACT : Thought on the use in Relativity with the help of computers of two kinds of mathematical beings: Fractals - "smooth" sets whose Hausdorff dimension is greater than the topological dimension -, and Posets - "discrete" sets provided with a partial order - in order to study spacetime.

1ère partie: Espacetemps fractal

1. Heisenberg : Principe d'incertitude

La présentation de ce paragraphe m'a été suggérée par Roland Berger. On trouvera une démonstration analogue dans Landau & Lifchitz [1].

Soit x une fonction de l'espace de Schwartz $S(\mathbf{R})$, à valeurs réelles - on dira que x est un signal réel - normée dans $L^2(\mathbf{R})$. Le spectre du signal est:

$$\hat{x}(v) = \int_{\mathbf{R}} x(t) e^{-2\pi i vt} dt$$

* Séminaire présenté à la Fondation Louis de Broglie le 16 décembre 1991

Alors \hat{x} est encore dans $S(\mathbf{R})$ et normée dans $L^2(\mathbf{R})$. On a donc pour mesures de probabilités $|x(t)|^2$ et $|\hat{x}(v)|^2$; soient $\sigma(|x|^2)$ et $\sigma(|\hat{x}|^2)$ leurs écarts-types respectifs, on a alors la relation suivante:

$$\sigma(|x|^2)\sigma(|\hat{x}|^2) \geq \frac{1}{4\pi}$$

que l'on démontre à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$\left| \int fg \right|^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$$

appliquée à $tx(t)$ et $x'(t)$, on a donc:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left| \int_{\mathbf{R}} tx(t)x'(t)dt \right|^2}_{= 1/4 \quad (\text{intégration par parties et } x(t) \text{ normée})} &\leq \int_{\mathbf{R}} t^2 x^2(t) dt \int_{\mathbf{R}} x'(t)^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |\hat{x}'(v)|^2 dv \quad (\text{Parseval}) \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}} v^2 (\hat{x}(v))^2 dv \end{aligned}$$

L'implication principale de cette relation est les inégalités d'Heisenberg. Soient

$$Q = x \quad \text{et} \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

les opérateurs sur $L^2(\mathbf{R})$ respectivement associés à la position et à l'impulsion. Ils sont hermitiens (donc $(Q\varphi, \psi) = (\varphi, Q\psi)$ pour φ, ψ dans le domaine de Q ; idem pour P) et leurs domaines contiennent l'espace de Schwartz.

Pour $\varphi \in S(\mathbf{R})$ fixé tel que $\|\varphi\| = 1$ on pose pour moments: $m_Q = (Q\varphi, \varphi)$ et $m_P = (P\varphi, \varphi)$, ainsi que $\sigma_Q = \|(Q - m_Q)\varphi\|$ et $\sigma_P = \|(P - m_P)\varphi\|$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose $\psi = (Q + i\lambda P)\varphi$, on a:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= ((Q + i\lambda P)\varphi, (Q - i\lambda P)\varphi) \\ &= ((Q - i\lambda P)(Q + i\lambda P)\varphi, \varphi) \\ &= ((Q^2 - i\lambda PQ + i\lambda QP + \lambda^2 P^2)\varphi, \varphi) \\ &= ((Q^2 + i\lambda[Q, P] + \lambda^2 P^2)\varphi, \varphi) \\ &= \|Q\varphi\|^2 + \lambda^2 \|P\varphi\|^2 + i\lambda([Q, P]\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

or $[Q, P] = +i\hbar I$ donc $\|\psi\|^2 = \lambda^2 \|P\varphi\|^2 - \hbar\lambda + \|Q\varphi\|^2 \geq 0$. Donc le discriminant doit être négatif et donc $\hbar^2 - 4\|P\varphi\|^2\|Q\varphi\|^2 \leq 0$. Or $Q' = Q - m_Q$ et $P' = P - m_P$ sont aussi des opérateurs hermitiens tels que $[Q', P'] = i\hbar I$ donc $\sigma_Q \sigma_P \geq \hbar/2$.

Ce résultat (dû à H. Weyl) qui donne la valeur minimale du produit est plus intéressant (du moins pour notre étude) que les relations d'Heisenberg qui donnent l'ordre du produit.

2. Feynman: Trajectoire quantique

Dans son approche de la mécanique quantique Feynman [2] s'intéresse à l'encontre des habitudes à la notion de trajectoire. Pour cela il utilise la relation de commutation qu'il applique à des mesures de positions, x_k , séparées par un intervalle de temps constant ϵ :

$$\left[m \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} x_k \right] - \left[x_k m \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right] = \frac{\hbar}{i} [1]$$

Les crochets signalent que l'on a affaire à des matrices. Il considère alors les termes

$$\left[x_k m \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right] \text{ et } \left[x_{k+1} m \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right]$$

et remarque qu'ils diffèrent l'un de l'autre d'un ordre ϵ puisqu'ils représentent la même quantité mesurée en deux temps consécutifs ainsi il a le droit de faire une substitution dans la relation de commutation et obtient:

$$\left[m \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} (x_k - x_{k+1}) \right] = \frac{\hbar}{i} [1]$$

ou encore

$$\left[\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2 \right] = \frac{i\hbar}{m\epsilon} [1].$$

Il en déduit que la moyenne du carré de la vitesse devient infinie lorsque ϵ tend vers 0. Donc la trajectoire quantique d'une particule est une courbe continue mais non différentiable. Ce qui est une idée vraiment neuve. En effet l'interprétation conventionnelle du principe d'incertitude avait induit en erreur les scientifiques qui voyaient là une remise en cause de la notion de trajectoire. Alors que Feynman en suivant un autre chemin

hors des sentiers battus nous a montré que la trajectoire d'un quantum existe bel et bien mais qu'elle est d'une extrême complexité.

Cependant, il ne faudrait pas croire, comme l'affirme Stavroulakis dans [3], que:

”la notion de trajectoire (quantique) en tant que ligne mathématique est une abstraction fondée sur l'existence de points matériels, ce qui me semble une idée purement métaphysique. Les particules sont nécessairement étendues et déformables [fait qu'il a élégamment démontré dans le cadre de la relativité générale, voir par exemple [4]] de sorte que la caractérisation de leur mouvement par des lignes mathématiques est une approximation grossière qui reflète les faiblesses de nos théories.”

Car le fractal que nous allons considérer - obtenu en passant à l'infini - ne représente que la trajectoire du barycentre de la particule; la ”trajectoire réelle” de la particule étant obtenu par un lissage du fractal de l'ordre de la taille de la particule en tenant compte des résultats des diagrammes de Feynman.

3. Abbott & Wise: Démonstration fractale

Cependant il a fallu attendre l'apparition de la notion de fractal que l'on doit à Mandelbrot [5] pour que l'idée novatrice de Feynman soit véritablement étudiée. A partir du moment où l'on s'est rendu compte que la trajectoire quantique d'une particule était un fractal il devint naturel de calculer sa dimension. C'est dans ce cadre que Abbott et Wise [6] ont obtenu la valeur 2. Voici l'idée de cette démonstration fractale. On considère la fonction d'onde de la particule que l'on calcule sur X avec une résolution Δx , on a:

$$\Psi_{\Delta x}(X) = \frac{(\Delta x)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} f\left(\frac{|p|\Delta x}{\hbar}\right) e^{ipx/\hbar}$$

où p est l'impulsion et f convenablement choisie. Soit $\langle \Delta l \rangle$ le chemin moyen parcouru pendant Δt alors:

$$\langle \Delta l \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} d^3 x |x| \cdot |\Psi_{\Delta x}(x, \Delta t)|^2.$$

Soit $\langle \Delta L \rangle = n \langle \Delta l \rangle (\Delta x)^{D-1}$ la longueur fractale de la trajectoire après n observations. Sans perdre la généralité du résultat on peut

transformer la fonction $f(|p|\Delta x/\hbar)$, on la notera simplement $F(y)$, et en remplaçant x par $a\Delta x$ on a:

$$\langle \Delta L \rangle = \langle \Delta p \rangle \left| \frac{t}{m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3y |F(y)|^2 \right| \frac{\langle \Delta p \rangle}{|\langle \Delta p \rangle|} + \frac{\hbar a}{2|\langle \Delta p \rangle| |\Delta x|} \Delta x^{D-1}$$

Or au niveau quantique:

$$\frac{\hbar}{\Delta x |\langle \Delta p \rangle|} \gg \frac{\langle \Delta p \rangle}{|\langle \Delta p \rangle|}$$

on a

$$\langle \Delta L \rangle \sim \langle \Delta p \rangle \left| \frac{t}{m} \int_{\mathbf{R}^3} d^3y |F(y)|^2 \right| \frac{\hbar a}{2|\langle \Delta p \rangle|} \Delta x^{D-2}$$

Pour que $\langle \Delta L \rangle$ soit indépendant de Δx , ceci afin d'avoir une trajectoire intrinsèque, la dimension est nécessairement égale à deux.

A présent nous allons examiner les différentes tentatives effectuées pour exploiter le fait que la trajectoire quantique d'une particule est un fractal de dimension deux.

4. Ord: Temps imaginaire

Le premier qui a eu l'idée d'utiliser l'outil fractal pour unifier les conceptions contradictoires de la Mécanique Quantique et de la Relativité fut Ord [7]. L'idée essentielle que nous retiendrons de son travail est la suivante: Une particule se déplace suivant une trajectoire fractale de dimension deux car les "géodésiques" de l'espace-temps sont elles-mêmes des fractals de dimension deux. Pour étudier cette idée il utilise comme modèle la courbe de Peano-Moore (voir figure) [8].

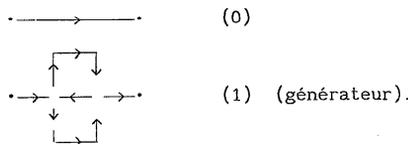


Figure 1.

Elle a l'avantage d'être simple et de donner des résultats qualitativement parlant.

Soit ℓ_n la longueur d'un segment pour la $n^{\text{ième}}$ itération et L_n la longueur suivant la trajectoire, de la figure obtenue. On a :

$$\ell_n = \ell_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{et} \quad L_n = \ell_0 \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{1-D}.$$

Soit v_n la vitesse apparente: $v_n = v_0(\ell_n/\ell_0)^{1-D}$, ici on a bien sûr $D = 2$. Calculons la vitesse moyenne à la première itération:

$$\langle v_1 \rangle = \frac{1}{9}[4.(v_1) + (-v_1) + 4.(0)] = \frac{v_1}{3} = v_0$$

et par récurrence on montre que $\langle v_n \rangle = v_0$. Agissons de même pour la moyenne de la vitesse carrée on obtient:

$$\langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{9}[4.(v_1)^2 + (-v_1)^2 + 4.(0)^2] = \frac{5}{9}v_1^2 = 5v_0.$$

De façon plus générale on montre:

$$\langle v_n^2 \rangle = 5 \left(\frac{v_0}{3}\right)^2 \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{2(1-D)}.$$

Considérons à présent l'écart-type:

$$\begin{aligned} \sigma(\langle v_n^2 \rangle) &= \langle (v_n - \langle v_n \rangle)^2 \rangle^{1/2} \geq \frac{\sqrt{5}}{3}v_0 \left(\left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{2(1-D)} - 1 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{\sqrt{5}}{3}v_0 \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{1-D} \end{aligned}$$

Posons $\Delta v_n = \sigma(\langle v_n^2 \rangle)$ et $\Delta x_n = \ell_n$, on a:

$$\Delta v_n \Delta x_n \geq \frac{\sqrt{5}}{3}v_0 \frac{\ell_0}{\ell_n} \ell_n \quad (\text{car } D = 2)$$

donc

$$\Delta v_n \Delta x_n \geq \frac{\sqrt{5}}{3}v_0 \ell_0.$$

On obtient donc une inégalité analogue à celle d'Heisenberg. Seulement notre particule a la propriété aucunement réaliste d'avoir une vitesse infinie. La solution que propose Ord est d'introduire un temps imaginaire. Cette opération borne effectivement la vitesse de la particule; son ennui est de rendre nécessaire le plongement dans \mathbf{R}^5 - trois dimensions pour l'espace et deux pour le temps. Bien que les calculs qui en découlent soient élégants, ils ne méritent tout de même pas la dépense d'une dimension. Signalons pour finir que cette idée est analogue à celle qui résoud le paradoxe de Zénon!

5. Cherbit: Généralisation de la vitesse

Voici maintenant une démarche plus classique pour résoudre le problème de la vitesse infinie. Selon Cherbit [9] ce problème reflète que notre notion de vitesse est inadéquate et donc une façon simple d'y remédier est de modifier la définition de la vitesse. Plus exactement il faudrait la généraliser. Si l'on possède une mentalité fractale (voir [10]) on a tôt fait de comprendre que cette idée ne manque pas de charme. En effet la représentation géométrique que nous avons de la vitesse est celle de la tangente à la courbe de positions. Nous obtenons ainsi une information locale sur la courbe par l'intermédiaire de la dérivabilité. Seulement lorsqu'il s'agit de fractal cette dernière notion est absente. Aussi au lieu de chercher une tangente à la courbe il serait plus judicieux de chercher une courbe tangente à la courbe. Dans le travail de Cherbit il s'agit de polynômes; ce qui le conduit à la définition suivante de α -vitesse:

$$v_\alpha = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(t+x) - f(t)}{x^\alpha} \quad \text{où } \alpha \in]0; 1]$$

où le α est défini par l'intermédiaire de la dimension locale. Du point de vue géométrique la procédure est simple: elle permet de mesurer l'angle de la cassure locale d'une courbe. De plus dans ce cadre-là il est facile de définir la dimension de l'espace dans lequel on travaille puisque elle est tout simplement égale à la valeur maximale de la dimension locale.

Malheureusement cette idée de α -vitesse n'est applicable qu'à des courbes à cassures, disons simples. Entre autres les courbes générées par des itérations géométriques, comme celle de Von Koch [11] ou plus simple encore [12] où localement on peut avoir un angle. Seulement en ce qui concerne l'espacetemps physique toutes les trajectoires de dimension 2

sont permises et l'on ne peut pas a priori exclure des courbes analogues à celle de Weierstrass [13] . Finalement l'apport de Cherbit est autre que celui que l'on attendait car il provient en fait de l'interrogation suivante: "l'objet (ici la trajectoire) est-il fractalisé par l'univers auquel il appartient ou bien est-il fractalisé par l'analyse de l'observateur?"

La question est d'autant plus judicieuse que nous travaillons dans le but d'unifier les deux théories qui représentent chacune un aspect de la question. Faut-il quantifier la relativité ou géométriser le quantique?

6. Nottale: Dérivée non standard

A partir de l'étude de Nottale & Schneider [14] et surtout Nottale [15] on observe une évolution dans l'attitude des chercheurs qui travaillent sur l'hypothèse de l'espace-temps fractal, ils la prennent au sérieux. La meilleure preuve est qu'il a fallu attendre Nottale pour prendre conscience qu'il était nécessaire de définir un fractal de façon intrinsèque et non au travers de l'espace euclidien dans lequel il est plongé. En ayant en tête cette idée il devient naturel de paramétriser le fractal considéré. Seulement par définition une courbe fractale a une longueur infinie, plus exactement il y a toujours une longueur infinie entre deux points distincts de la courbe. L'idée évidente qui vient alors à l'esprit est d'utiliser - pour une certaine catégorie de fractals - les itérés successifs. Bien que cela ne donne pas la solution finale, cette méthode a le mérite d'obtenir l'expression formelle de ce que l'on cherche. Malheureusement le passage à l'infini fait perdre toute l'information contenue dans la formule obtenue à partir des itérés. C'est là qu'intervient l'analyse non standard (voir [16]).

En effet celle-ci permet de garder l'information même à l'infini. Par exemple la longueur de la courbe de Von Koch est égale à $(4/3)^N$ où N est un entier illimité, alors qu'elle est considérée comme infinie en analyse classique. L'innovation principale de Nottale est la définition d'une dérivée fractale non standard. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette construction puisque notre ignorance du formalisme non standard nous l'exclut. Nous mentionnons donc uniquement son idée: partant de la paramétrisation du fractal considéré, à l'aide d'une variable curviligne on intersecte le fractal par une droite perpendiculaire au segment initial sur lequel on a appliqué le générateur du fractal et on dénombre le nombre de points d'intersection. La dérivée fractale est égale au cardinal de cet ensemble - du genre de poussière de Cantor. Et ce cardinal est bien un nombre non standard, plus précisément un réel illimité.

Tout serait parfait si la théorie n'avait pas de compte à rendre à la réalité. Cependant ce n'est pas le cas. Ainsi le travail de Nottale tout à fait respectable pour les premiers diagrammes de Feynman [17] devient désuet pour les diagrammes qui tiennent compte de la polarisation du vide (voir [18]) et qui sont nécessaires pour expliquer les valeurs expérimentales:

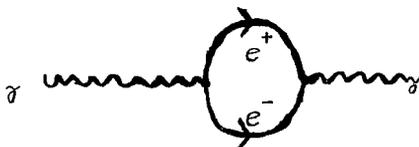


Figure 2.

En effet la présence de boucles rend impossible la paramétrisation linéaire.

2ème partie: Espacetemps causal

1. Bombelli, Lee, Meyer & Sorkin: Ensemble causal

On appelle poset (partially ordered set) un ensemble P muni d'un ordre partiel. Lorsqu'il a n éléments et r relations de comparaison, c'est encore un graphe simple à n sommets et r arêtes, orienté et transitif. On obtient son dual en inversant le sens des arêtes, et un conjugué en enlevant les r arêtes et en orientant transitivement les $(n(n-1)/2 - r)$ autres arêtes. Quant à sa dimension elle est égale au nombre minimum d'extensions linéaires dont il représente l'intersection. On dit qu'un poset est représentable par n -sphères si l'on peut lui associer une famille de n -sphères munie de l'ordre partiel d'inclusion dont les relations entre les éléments s'identifient avec celles que définit le poset.

Tout commence par des questions presque métaphysiques posées par Riemann [19] , que l'on pourrait qualifier d'impertinentes tellement elles sont fondamentales: pour quelle raison existe-t-il une métrique spatiale? pourquoi a-t-elle une signature Lorentzienne? et pourquoi l'espacetemps a-t-il lui-même une structure topologique et différentiable qui permette d'y définir un champ métrique?

Bombelli et al. [20] remarquent qu'un début de réponse aux questions riemanniennes est suggéré par le fait que la structure causale d'un espacetemps classique parvient à déterminer presque intégralement sa

géométrie. Ordinairement l'on pense à l'espacetemps comme à une variété topologique dotée d'une structure différentiable sur laquelle est définie la métrique. Alors l'ordre causal est vu comme dérivant des cônes de lumière. Pourtant l'on pourrait procéder autrement: étant donné un espacetemps vérifiant les conditions de causalité, et suffisamment lisse, on ne retient de toute sa structure que l'information contenue dans la relation d'ordre.

Aussi Bombelli et al. postulent qu'un volume fini de l'espacetemps contient seulement un nombre fini d'éléments et l'on peut donc mesurer sa taille en les comptant. Ils parviennent ainsi au fait que la structure sous-jacente à l'espacetemps est un ensemble causal. Ce qui les a conduit à cette idée ce n'est pas tellement sa simplicité mais plutôt sa potentialité à éclairer les questions sus-mentionnées. Et pour cause cela leur permet déjà d'affirmer que la métrique est Lorentzienne puisque aucune signature autre que $(- + + \dots +)$ n'a de cônes de lumière à deux nappes desquels dérive l'ordre causal.

Ensuite afin de montrer la relation qui existe entre l'espacetemps vu d'une part comme un ensemble causal et d'autre part comme un continuum, ils se placent dans la situation où l'on a un ensemble causal contenant beaucoup d'éléments et à propos duquel l'on peut savoir à quelle variété munie d'une métrique il ressemble lorsqu'il est observé à grande échelle. Alors ils prouvent qu'un ensemble causal a une structure suffisamment riche pour posséder toutes les propriétés géométriques que l'on attribue au continuum de l'espacetemps. Dorénavant nous allons nous restreindre à l'espacetemps de Minkowski dans le but de faciliter la formalisation nécessaire de ces idées.

2. Brightwell & Winkler: Ordres de sphères

Pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, soit $C = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ une collection finie de n -sphères dans \mathbf{R}^{n+1} . En notant $S_i \leq S_j$ lorsque S_i est un sous-ensemble de la boule fermée \bar{S}_j de frontière S_j , ils définissent un ordre partiel sur C . On considère l'ensemble de tous ces ordres (à isomorphie près). Soit M une variété de l'espacetemps, si M est isomorphe à \mathbf{R}^{n+1} on a pour la causalité: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, t_x) \leq y = (y_1, y_2, \dots, y_n, t_y)$ si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^k (y_i - x_i)^2\right) \leq c(t_y - t_x)$ où c représente la vitesse de la lumière.

L'ensemble des points qui sont au-dessus d'un point x dans l'ordre de causalité forme un demi-cône dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions avec une ligne de symétrie parallèle à l'axe du temps. Son intersection avec

l'hyperplan $t = t_0$, pour $t_0 \geq t_x$, a comme frontière la $(n - 1)$ -sphère $S(x, t_x)$ avec pour centre $(x_1, x_2, \dots, x_n, t_0)$ et pour rayon $c(t_0 - t_x)$. Et si $t_0 \geq t_y$ alors $x < y$ si et seulement si $S(y, t_0) \subset \bar{S}(x, t_0)$. Comme l'on peut toujours prendre la coordonnée de l'hyperplan du temps de façon à ce qu'elle soit plus grande que la coordonnée temporelle de chaque ensemble fini de points, les sous-ordres finis de l'ordre de causalité sont exactement les duaux des ordres de $(n - 1)$ -sphères.

Se pose alors la question de savoir si tout poset peut se plonger dans la structure causale de l'espacetemps. Si ce dernier est galiléen la réponse est trivialement négative puisque le poset suivant n'est pas plongeable. On voit ainsi que 3 éléments suffisent.



Par contre pour l'espacetemps de Minkowski la réponse n'est pas évidente et c'est le mérite de Brightwell et Winkler de l'avoir déterminée. Ils ont même fait mieux [21]. En effet ils ont réussi à montrer que pour tout entier n il existe un poset à $(2^{n+2} - 2)$ éléments représentable par n -sphères mais non par des $(n - 1)$ -sphères, et ceci à l'aide seulement de considérations élémentaires et d'un lemme géométrique de Radon [22]. Plus exactement les points du poset $P_{(2n+2-2)}$ considéré sont identifiés avec les sous-ensembles propres de $\{1, 2, \dots, n + 2\}$ et donc $P_{(2n+2-2)} = \{A \subseteq \{1, 2, \dots, n + 2\} : 1 \leq \text{Card}A \leq n + 1\}$, avec $A \leq B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $\text{Card}A = 1$ ou $\text{Card}B = n + 1$. On en déduit entre autres l'existence explicite d'un poset à 14 éléments qui n'est pas représentable par cercles:

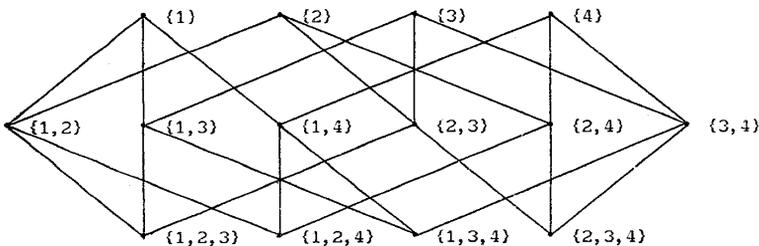


Figure 3.

ou celle d'un poset à 30 éléments non représentable par sphères pour en revenir à l'espacetemps de Minkowski.

A présent l'on peut préciser notre problématique; puisque l'on sait que l'espacetemps de Minkowski n'est pas d'une complexité causale

infinie, il s'agit maintenant de mesurer cette complexité en calculant quel est le nombre minimal d'éléments nécessaires à un poset pour ne pas pouvoir être plongé dans la structure causale de l'espace-temps de Minkowski. Dans un premier temps nous allons examiner le problème de la représentabilité par cercles c'est-à-dire dans le cas où l'espace-temps n'a que deux dimensions spatiales.

3. Uruttia: Polygonalité

En fait dans son article [23] Uruttia étudie un problème plus général à savoir l'aspect de la géométrie euclidienne qui concerne les relations d'inclusion sur des familles de points, de cercles, de triangles, de carrés et de polygones de façon générale. Il pourrait sembler au lecteur que cette étude générale ne soit rien de plus qu'une digression. Cependant les résultats prouvés par Uruttia apparemment éloignés de notre problème ont des conséquences dévastatrices sur toute approche intuitive. En effet il a réussi à montrer que tout poset est représentable par polygones convexes dans le plan!

Par ailleurs l'on sait que tout poset de dimension inférieure ou égale à deux est représentable par intervalles et donc aussi par cercles; mais il n'existe pas de résultat analogue en dimension trois. Par contre Uruttia a démontré que tout poset de dimension trois est représentable par polygones réguliers à n côtés pour n supérieur ou égal à trois. Résultat tout simplement stupéfiant car du point de vue de la polygonalité l'on peut se rapprocher arbitrairement près d'un cercle à l'aide d'un polygone régulier dont le n est grand cependant ce n'est pas pour autant que l'on sait répondre à la question de savoir si un poset de dimension trois est représentable par cercles.

Malgré tout, ces résultats incitent à conjecturer et c'est ce qu'a fait Uruttia, que la réponse est positive. De plus une argumentation basée sur la notion de nombre de croisements d'un poset (qui est le plus petit nombre m tel que le poset soit représentable par des fonctions réelles dans $[0,1]$ dont les graphes se coupent deux à deux en au plus m points) suscite la conjecture suivante énoncée par Sidney, Sidney et Uruttia [24] : l'exemple de Brightwell et Winkler à 14 éléments est le plus petit poset non représentable par cercles.

Ainsi, bien que la singulière difficulté des cercles ne soit toujours pas élucidée, les résultats partiels qui d'une certaine manière se complètent, la cernent de plus en plus près. Et puis de toute façon une résolution

immédiate aurait été fort surprenante puisque le calcul seul de la dimension, si elle est supérieure ou égale à trois, est déjà un problème NP-complet comme l'a montré Yannakakis [25].

On se trouve alors dans une situation idéale pour l'intervention des ordinateurs - ce qui était loin d'être évident au départ de notre étude. Il est d'ailleurs intéressant de constater le cheminement de notre problème à travers les différents domaines de la pensée: question métaphysique sur l'univers, puis problème physique sur l'espace-temps, puis conjecture mathématique sur la structure, et enfin théorème informatique.

L'approche utilisée bien que naïve est la seule à avoir donné des résultats, elle consiste à énumérer les posets à isomorphie près et à tester ensuite leur représentabilité grâce à l'utilisation par l'ordinateur de tous les théorèmes connus dans ce domaine. En théorie il faudrait effectuer cette procédure pour tous les posets ayant au plus 13 éléments seulement nous allons voir dans les deux paragraphes qui suivent que l'énumération est déjà à elle seule un défi. Et ce n'est donc qu'au dernier paragraphe de notre article que nous allons revenir à la représentabilité.

4. Möhring: Graphes de comparabilité

Les graphes de comparabilité sont des graphes non orientés qui représentent la relation de comparabilité des ordres partiels. Ils constituent un intermédiaire important entre les graphes et les ordres partiels aussi bien pour des recherches théoriques sur leur structure que pour le développement de méthodes algorithmiques efficaces sur des problèmes d'optimisation. Dans l'appendice de son article [26], Möhring présente une liste des nombres de graphes et de posets ayant de 1 à 9 éléments. (Il y a aussi ceux de 10, mais ils sont faux!) Ces nombres ont été obtenus à partir du catalogue de Read-Wormland de tous les graphes non isomorphes à au plus 10 éléments, en appliquant les techniques algorithmiques qu'il décrit dans son article.

Ainsi le nombre de posets non isomorphes a été obtenu en prenant tous les graphes de comparabilité, en générant toutes les orientations transitives des graphes de comparabilité et en sélectionnant exactement une orientation transitive de chaque classe d'isomorphie.

De cette façon il a pu améliorer le résultat de Wright [27] qui avait calculé "à la main" en 1972 $P_7 = 2045$, et celui de Das [28] qui avait obtenu sur machine en 1977 $P_8 = 16999$, en estimant exactement en 1984 $P_9 = 183231$. Par ailleurs il aura fallu attendre 6 ans (!) avant de

se rendre compte que la valeur qu'il donnait de P_{10} était fautive, et c'est à deux informaticiens que l'on doit cette correction.

5. Culberson & Rawlins: Poset des posets

Cette fois la recherche dans ce domaine va avancer grâce à l'élaboration du premier algorithme spécifique aux posets qui s'appuie sur des considérations simples sur la structure du poset des posets. Plus précisément Culberson et Rawlins [29] ont décidé de parcourir en profondeur d'abord, le poset des posets non isomorphes deux à deux, avec une génération superflue locale, mais élaguée non localement. Ensuite d'améliorer cet élagage par l'affaiblissement du test d'isomorphie qui devient un test d'abritement, impliquant ainsi une réduction de l'ensemble des posets à comparer au poset nouvellement produit. Enfin de réduire la génération superflue locale par une infiltration globale du test d'abritement dans la génération.

Ils ont pu ainsi, grâce à cette nouvelle méthode, obtenir non seulement la valeur $P_{10} = 2567284$ mais aussi celle de $P_{11} = 46749427$.

Cependant les estimations du temps de calcul nécessaire à la détermination de P_{12} , montrent que cette dernière est hors de portée avec cette méthode - plus exactement il faudrait 2000 heures.

Il faut donc inventer autre chose!

6. Chaunier & Lygerōs: Mentalité fractale

C'est donc une approche complètement différente que nous avons utilisée. Elle est entre autres fondée sur une idée qui tire son origine euristique de la théorie des fractals [5] ! Voici comment se présente notre algorithme [30], [31] :

On décide de générer tous les posets dans un ordre quelconque, avec une génération superflue globale, élaguée ponctuellement par le test de canonicité:

* $(a_{1,n}, a_{1,n-1}, \dots, a_{1,1}, a_{2,n}, \dots, a_{n,1})$ est maximal pour l'ordre lexicographique de $\{0, 1\}^{n^2}$ en attribuant le plus grand poids à $a_{1,n}$.

où les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'incidence du poset. Ensuite on améliore cet élagage par la réduction du nombre des permutations à considérer:

* La suite $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ est décroissante, où $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

* Pour la canonicité, il est inutile de permuter l'indice i avec d'autres indices que ceux de sa classe dans $A_i, \forall i$.

où A_i est la partition des indices $1, 2, \dots, n$ réunissant j et j' dans une même classe si et seulement si $d_j = d_{j'}$ et $\forall k < i, a_{kj} = a_{kj'}$.

* Il est inutile de permuter l'indice i avec les indices k de sa classe dans A_i qui ont des lignes identiques $(a_{ij})_{1 \leq j \leq n} = (a_{kj})_{1 \leq j \leq n}$.

Et enfin on réduit la génération superflue globale par une infiltration globale du test de canonicité dans la génération:

* (a_{ij}) est plus que triangulaire supérieure, i.e. $\forall k, \ell / d_k = d_{k+\ell-1}$, les $\ell(\ell+1)/2$ coefficients a_{ij} , $k \leq i \leq j < k + \ell$, sur et au-dessus de la diagonale sont également nuls.

* $\forall i$, et $\forall j < j'$ dans une même classe de A_i , on a $a_{ij} \leq a_{ij'}$.

* $\forall i < k$ dans une même classe de A_i , leur ligne vérifie pour l'ordre lexicographique:

$$(a_{i,n}, a_{i,n-1}, \dots, a_{i,1}) \geq (a_{k,n}, a_{k,n-1}, \dots, a_{k,1}).$$

C'est donc l'implémentation de cet algorithme qui nous a permis de calculer la valeur de $P_{12} = 1104891746$ [32]. Le test de canonicité permet le calcul simultané du groupe d'automorphismes, et le fait que l'algorithme commence par définir la suite (d_i) permet un partitionnement fin des calculs qui autorise:

- l'interruption et la reprise des calculs sans sauvegarde (sauf de la relation ou de la suite des degrés),
- la vérification partielle des calculs,
- et surtout la distribution du travail sur plusieurs machines.

C'est grâce à ces avantages que nous avons entrepris le calcul de P_{13} en janvier 1992 sur 9 stations de travail et obtenu après 6 mois les résultats complets suivants, selon le nombre r de relations:

r	P_{13}^r			P_{13}^r			P_{13}^r			P_{13}^r				
0	1	20	36	606	102	40	1	805	816	407	60	6	096	379
1	1	21	63	090	851	41	1	633	935	577	61	3	796	733
2	3	22	103	573	457	42	1	446	444	433	62	2	320	757
3	7	23	162	384	152	43	1	253	457	366	63	1	391	478
4	19	24	243	809	985	44	1	063	880	995	64		817	624
5	47	25	351	390	204	45		884	825	225	65		470	396
6	133	26	487	237	576	46		721	452	090	66		264	558
7	354	27	651	206	672	47		576	924	933	67		145	258
8	1	014	28	840	404	152	48	452	654	555	68		77	647
9	2	874	29	1	048	785	819	49	348	576	046	69	40	260
10	8	305	30	1	267	416	540	50	263	545	083	70	20	165
11	23	513	31	1	484	925	018	51	195	684	307	71	9	660
12	65	215	32	1	688	672	630	52	142	728	742	72	4	391
13	173	481	33	1	865	878	896	53	102	283	393	73	1	862
14	441	249	34	2	005	172	954	54	72	028	601	74		714
15	1	062	532	35	2	097	659	160	55	49	849	120	75	241
16	2	419	194	36	2	138	021	170	56	33	906	587	76	66
17	5	194	267	37	2	124	818	344	57	22	666	616	77	12
18	10	529	510	38	2	060	635	454	58	14	891	283	78	1
19	20	169	973	39	1	951	423	800	59	9	613	263		

total: $P_{13}=33$ 823 827 452

Figure 4.

A présent que nous avons vu que la première partie de notre approche a abouti revenons à la deuxième, c'est-à-dire la représentabilité. Sur ce point il nous faut bien l'avouer le stade de notre recherche n'est pas aussi spectaculaire que pour l'énumération. En effet nous avons seulement réussi à démontrer et ce grâce à l'ordinateur le résultat partiel suivant:

Théorème: *Tous les posets d'au plus 7 éléments sont représentables par cercles [33].*

Démonstration: Pour $n \leq 3$ il est facile de voir que tous les posets obtenus ont un conjugué et grâce au:

Théorème (Dushnik, Miller [34]): $(P \text{ a un ordre conjugué}) \Leftrightarrow (\dim P \leq 2)$
 on sait qu'ils sont tous représentables. Pour $n = 4$ et $n = 5$ il suffit d'appliquer:

Théorème (Hiraguchi [35]): $\forall P / \text{Card } P \geq 4, \dim P \leq \frac{1}{2} \text{Card } P.$

Pour $n = 6$, après avoir utilisé le théorème de Dushnik et Miller et considéré que le dual d'un ordre représentable par cercles l'est lui-même, il suffit d'étudier deux posets pour montrer qu'ils sont représentables par cercles. Et enfin pour $n = 7$ cette méthode ne laisse que 49 posets, sur les 2045 possibles, à étudier qui après un travail fastidieux s'avèrent tous représentables par cercles [36]. \square

C'est ainsi que s'achève notre présentation de deux nouveaux courants de pensée, points de vue de la relativité susceptibles une fois développés d'éclairer la microphysique. D'où l'absence de conclusion synthétique puisque tout reste à faire!

Je tiens à remercier mon ami Claude Chaunier pour les nombreuses conversations que nous avons eues autour de ces deux nouvelles approches de la relativité.

Références

1ère partie

- [1] L. Landau & E. Lifchitz: *Physique théorique, tome 3, Mécanique Quantique*. Mir, 3ème édition, (p.61), 1988.
- [2] R. Feynman & A. Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mc Graw-Hill, (p.176), 1965.
- [3] N. Stavroulakis: lettre no.2 (17.5.91) de la correspondance Stavroulakis-Lygerös.
- [4] N. Stavroulakis: *Mathématiques et trous noirs*. Gazette des Mathématiciens (31), 119-132, 1986.
- [5] B. Mandelbrot: *Les objets fractals*. Flammarion, 1ère édition, 1975.
- [6] L. Abbott & M. Wise: *Dimension of a quantum-mechanical path*. Am. J. Phys. **49** (1), 37-39, 1981.
- [7] G. Ord: *Fractal space-time: a geometric analogue of relativistic quantum mechanics*. J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 1869-1884, 1983.
- [8] G. Peano: *Sur une courbe qui remplit une aire plane*. Mathematische Annalen 36, 157-160, 1890.
- [9] Cherbit: *Dimension locale, quantité de mouvement et trajectoires*. in *Fractals*, Masson, 340-352, 1987.
- [10] N. Lygerös: *Mentalité fractale*. Revue de l'Irem de Lyon (STNT) (6), 39-46, mai 1991.
- [11] H. von Koch: *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction élémentaire*. Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik 1, 681-704, 1904.
- [12] N. Lygerös: *Exemple d'une courbe ni classique ni fractale*. Gazette des Mathématiciens (49), 71-74, juin 1991.
- [13] F. Weierstrass: *Über kontinuierliche functionen eines rullen arguments die für keinen werth des letzteren einen bestimmter differential quotienten besitzen*. Mathematische Werke II, 71-74, 1872.
- [14] L. Nottale & J. Schneider: *Fractals and non standard analysis*. J. Math. Phys. **25** (5), 1296-1300, May 1984.
- [15] L. Nottale: *Fractals and the quantum theory of spacetime*. Intern. Jour. of Modern Physics A **4** (19), 5047-5117, 1989.
- [16] F. Diener & G. Reeb: *Analyse non standard*. Hermann, 1989.
- [17] R. Feynman: *Statistical Mechanics*. Axtof Lectures, W.A. Benjamin, (p.192-197), 1972.
- [18] R. Feynman: *QED*. Princeton University Press, (p.163-173), 1985.

2ème partie

- [19] G.F.B. Riemann, in *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, H. Weyl éd., Springer-Verlag, Berlin, 1919.
- [20] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer & R.D. Sorkin: *Space-time as a causal set*. Phys.Rev.Letters **59** (5), 521-524, august 1987.
- [21] G. Brightwell & P. Winkler: *Sphere orders*. Order**6**, 235-240, 1989.
- [22] J. Radon: *Mengen Konvexer Kenthalten*. Math.Ann. **83**, 113-115, 1921.
- [23] J. Urrutia: *Partial orders and euclidean geometry*. in *Algorithms and orders*, Kluwer Academic Publishers, 387-434, 1989.
- [24] J.B. Sidney, S.J. Sidney & J.Urrutia: *Circle orders, N-gon orders and the crossing number*. Order **5**, 1-10, 1988.
- [25] M. Yannakakis: *The complexity of the partial order dimension problem*. SIAM J.Alg.Disc.Math. **3**, 351-358, 1982.
- [26] R.H. Möhring: *Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs*. in *Graph and Order*, I. Rival éd., Reidel, Dordrecht, 41-101, 1985.
- [27] J. Wright: *Cycle indicators of certain classes of types of quasi-orders or topologies*. Ph.D.Dissertation, U. of Rochester, 1972.
- [28] S.K. Das: *A machine representation of finite T_0 topologies*. J. Assoc. Comp.Machinery **24** (4), 676-692, 1977.
- [29] J.C. Culberson & J.E. Rawlins: *New results from an algorithm for counting posets*. Order **7**, 361-374, 1991.
- [30] C. Chaunier & N. Lygerōs: *Progrès dans l'énumération des posets*. C.R.A.Sc.(Paris), t.234, série A, p.691-694, mai 1992.
- [31] C. Chaunier & N. Lygerōs: *Le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments*. soumis pour publication à Theoretical Computer Science.
- [32] N. Lygerōs: *The number of unlabeled posets with 12 elements*. Abstracts of the A.M.S., p.287 no.92T-06-28, mars 1992.
- [33] R. Fraïssé & N. Lygerōs: *Petits posets: dénombrement, représentabilité par cercles et, "compenseurs"*. C.R.A.Sc.(Paris), série A t.313 (7), 417-420, 1991.
- [34] B. Dushnik & E.W. Miller: *Partially ordered sets*. Amer.J.Math. **63**, 600-610, 1941.
- [35] T. Hiraguchi: *On the dimension of partially ordered sets*. Sci. Rep. Kanazawa Univ. **1**, 77-94, 1955.
- [36] N. Lygerōs: *Calculs exhaustifs sur les posets d'au plus 7 éléments*. Singularité **2** (4), 10-24, 1991.