

Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène

C. DAVIAU

Fondation Louis de Broglie
23, Quai de Conti 75006 Paris

RÉSUMÉ. On étudie les solutions de l'équation linéaire de Dirac dans le cas de l'atome d'hydrogène à partir d'une méthode de séparation des variables. On compare les résultats obtenus à la méthode de résolution classique basée sur les opérateurs de moments cinétiques. Les deux méthodes sont mises en oeuvre pour résoudre une équation non linéaire. Dans le cas le plus simple, on prouve qu'il y a bien quantification de l'énergie, avec exactement les mêmes niveaux d'énergie.

ABSTRACT. The solutions of the linear Dirac equation are built, in the case of the hydrogen atom, from a method of variables separation. We compare the results with the classical ones, got from kinetic momentum operators. The two ways are used to solve a non-linear Dirac equation. In the simpler case, we prove that the energy is quantized, with exactly the classical levels.

La première raison du succès de la mécanique quantique est qu'elle a pu rendre compte parfaitement des spectres atomiques. Ceci a été effectué d'abord à partir de l'équation de Schrödinger, puis de manière remarquablement précise par l'équation de Dirac. Celle-ci donne le bon nombre d'états, les bons niveaux d'énergie, à l'effet Lamb près, la bonne structure des raies. L'équation de Dirac est relativiste et du premier ordre, alors que l'équation de Schrödinger n'est pas relativiste, et est du second ordre dans les coordonnées d'espace.

Les équations de Schrödinger et de Dirac sont linéaires. La linéarité, en physique, est la plupart du temps obtenue comme approximation d'une loi non linéaire. Et Louis de Broglie [1] a donné des arguments solides sur le caractère nécessairement non linéaire des équations de propagation des ondes de la mécanique ondulatoire. Mais trouver une telle

équation non linéaire est d'autant plus une gageure que la quantification des niveaux d'énergie, dans l'atome d'hydrogène, sort de la linéarité des équations.

Nous avons précédemment proposé une équation non linéaire susceptible de remplacer l'équation de Dirac et nous en avons commencé l'étude [2 à 5]. L'étude des ondes planes montre que la conjugaison de charge se fait sans changement du signe de l'énergie et qu'il n'y a pas d'ondes à énergie négative, ce qui est tout à fait conforme à l'expérience. La résolution de l'équation, dans le cas du potentiel coulombien de l'atome d'hydrogène, déjà difficile pour l'équation linéaire de Dirac, est beaucoup compliquée par la non linéarité. Cette résolution est poursuivie ici, d'une part en examinant en détail comment procède la résolution de l'équation linéaire, d'autre part en calculant complètement les solutions du système radial dans un cas simple, où une telle résolution analytique est possible.

1. Sur la résolution de l'équation linéaire

Les calculs qui vont suivre pourraient être effectués dans le formalisme usuel de la théorie de Dirac, mais ce serait au prix d'une grande complexité. Et les résultats obtenus ici l'ont été grâce à l'utilisation d'un point de vue différent. On utilise ici l'algèbre de Clifford d'espace-temps, avec la représentation matricielle usuelle :

$$\begin{aligned}
 (\gamma^0)^2 &= I_4; (\gamma^j)^2 = -I_4, j = 1, 2, 3; \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \mu \neq \nu \\
 \gamma^0 &= \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \gamma_{ij} &= \gamma_i \gamma_j; \hat{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Avec cette représentation matricielle, le ψ de Dirac, matrice unicolonne, est exactement la colonne de gauche du Ψ élément pair de l'algèbre d'espace-temps, de la forme :

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}; \Phi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}; \Phi_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 & \bar{\psi}_4 \\ \psi_4 & -\bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \\
 \psi &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}; \Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\
 \Psi &= a + b\gamma_{10} + c\gamma_{20} + d\gamma_{30} + e\gamma_{21} + f\gamma_{23} + g\gamma_{13} + h\hat{i} \\
 \psi_1 &= a + ie; \psi_2 = -g - if; \psi_3 = d + ih; \psi_4 = b + ic
 \end{aligned} \tag{2}$$

En algèbre d'espace-temps, l'équation de Dirac prend la forme suivante, due à Hestenes [6 à 12] :

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial\Psi\gamma_{21} &= m_0c\Psi\gamma_0 + \frac{e}{c}A\psi \\
 \partial &= \gamma^\mu\partial_\mu; \quad A = \gamma^\mu A_\mu
 \end{aligned} \tag{3}$$

où A est le vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. L'équation non linéaire que nous avons proposée et dont nous avons commencé l'étude précédemment s'obtient en modifiant uniquement le terme de masse :

$$\begin{aligned}
 \hbar\partial\Psi\gamma_{21} &= m_0c\Psi\gamma_0e^{\beta\hat{i}} + \frac{e}{c}A\psi \\
 \tilde{\Psi} &= \gamma_0\Psi^\dagger\gamma_0 = a - b\gamma_{10} - c\gamma_{20} - d\gamma_{30} - e\gamma_{21} - f\gamma_{23} - g\gamma_{13} + h\hat{i} \\
 \Psi\tilde{\Psi} &= \Omega_1 + \Omega_2\hat{i} = \rho e^{\beta\hat{i}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les deux invariants relativistes et où β est l'angle d'Yvon-Takabayasi.

Pour l'atome d'hydrogène, la résolution de l'équation de Dirac a été obtenue en utilisant les équations antérieures de Schrödinger et de Pauli. Mais il a fallu transposer car les opérateurs du moment cinétique L de la théorie de Schrödinger ne sont plus des constantes du mouvement. Ce sont uniquement les opérateurs du moment cinétique total J qui sont des constantes du mouvement en théorie de Dirac. La théorie de Schrödinger permet de diagonaliser simultanément le hamiltonien H et les opérateurs L_3 et L^2 : il existe des vecteurs propres ψ tels que :

$$H\psi = E\psi; \quad L_3\psi = m\psi; \quad L^2\psi = l(l+1)\psi \tag{5}$$

Les valeurs de l sont uniquement des entiers naturels, et m ne peut prendre que les valeurs $-l, \dots, l-1, l$. L'étude générale des opérateurs présentant les relations de commutation des moments cinétiques, c'est à dire des opérateurs de l'algèbre de Lie du groupe des rotations, prouve que si ψ est un vecteur propre de J_3 et J^2 , c'est à dire si :

$$J_3\psi = m\psi; \quad J^2\psi = j(j+1)\psi \quad (6)$$

alors m et j sont tous deux, soit entiers, soit demi-impairs, et que m ne peut prendre que les valeurs $-j, \dots, j-1, j$.

La résolution de l'équation pour le potentiel coulombien à symétrie sphérique utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x^1 = x &= r \sin \theta \cos \varphi; & x^2 = y &= r \sin \theta \sin \varphi; & x^3 = z &= r \cos \theta \\ \partial_1 = \partial_x &= \sin \theta \cos \varphi \partial_r + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \\ \partial_2 = \partial_y &= \sin \theta \sin \varphi \partial_r + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \\ \partial_3 = \partial_z &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \end{aligned} \quad (7)$$

On utilisera ici, outre les opérateurs de moment cinétique, une autre méthode de résolution, due à H. Krüger [13]. Il introduit :

$$\vec{r} = x\gamma_{10} + y\gamma_{20} + z\gamma_{30} = rS\gamma_{30}S^{-1}; \quad S = e^{-\frac{\varphi}{2}\gamma_{21}} e^{-\frac{\theta}{2}\gamma_{13}} \quad (8)$$

Il pose :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{r\sqrt{\sin \theta}} S; & \underline{\partial} &= \gamma_{10}\partial_1 + \gamma_{20}\partial_2 + \gamma_{30}\partial_3 \\ \partial' &= \gamma_{30}\partial_r + \gamma_{10}\frac{1}{r}\partial_\theta + \gamma_{20}\frac{1}{r\sin \theta}\partial_\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

ce qui donne :

$$\underline{\partial} = \Omega\partial'\Omega^{-1} \quad (10)$$

Ceci permet d'obtenir la séparation des variables t et φ des variables r et θ en posant :

$$\begin{aligned}\Psi &= \Omega \Psi_1 e^{(m\varphi - \frac{E'}{\hbar}t)\gamma_{13}} \underline{U} \\ \underline{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_{32}); \quad \Psi_1 = \Psi_1(r, \theta)\end{aligned}\tag{11}$$

L'équation de Dirac linéaire (3) se réduit, pour un potentiel coulombien, à:

$$\begin{aligned}E\Psi_1 + (\gamma_{30}\partial_r + \gamma_{10}\frac{1}{r}\partial_\theta)\Psi_1\gamma_{13} - \frac{m}{r\sin\theta}\gamma_{20}\Psi_1 + \frac{Z\alpha}{r}\Psi_1 &= M\gamma_0\Psi_1\gamma_0 \\ \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}; \quad M = \frac{m_0c}{\hbar}; \quad E = \frac{E'}{\hbar c}\end{aligned}\tag{12}$$

tandis que l'équation de Dirac non linéaire (4) se réduit à :

$$\begin{aligned}E\Psi_1 + (\gamma_{30}\partial_r + \gamma_{10}\frac{1}{r}\partial_\theta)\Psi_1\gamma_{13} - \frac{m}{r\sin\theta}\gamma_{20}\Psi_1 + \frac{Z\alpha}{r}\Psi_1 &= M\gamma_0\Psi_1\gamma_0 e^{\beta\hat{i}} \\ \Psi_1\tilde{\Psi}_1 = \rho_1 e^{\beta\hat{i}}\end{aligned}\tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ne contiennent que des dérivées du premier ordre. Par ailleurs la méthode de calcul de Krüger ne fait pas que séparer les variables, elle simplifie aussi le calcul des opérateurs J . En algèbre d'espace-temps, où la multiplication de ψ par i se traduit par la multiplication de Ψ par γ_{21} à droite, les opérateurs J prennent la forme :

$$\begin{aligned}J_1\Psi &= \left(d_1 + \frac{1}{2}\gamma_{32}\right)\Psi\gamma_{12}; \quad d_1 = y\partial_z - z\partial_y \\ J_2\Psi &= \left(d_2 + \frac{1}{2}\gamma_{13}\right)\Psi\gamma_{12}; \quad d_2 = z\partial_x - x\partial_z \\ J_3\Psi &= \left(d_3 + \frac{1}{2}\gamma_{21}\right)\Psi\gamma_{12}; \quad d_3 = x\partial_y - y\partial_x\end{aligned}\tag{14}$$

Et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\sin \varphi \partial_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi \partial_\varphi \\
d_2 &= \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \partial_\varphi \\
d_3 &= \partial_\varphi
\end{aligned} \tag{15}$$

$$J_3(\Omega\Psi\underline{U}) = -\Omega\partial_\varphi\Psi\gamma_{13}\underline{U} \tag{16}$$

$$J^2(\Omega\Psi\underline{U}) = \Omega \left(-\frac{1}{4}\Psi + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \gamma_{21} \partial_\varphi \Psi - \partial_{\theta\theta}^2 \Psi + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi\varphi}^2 \Psi \right) \underline{U} \tag{17}$$

Donc l'équation aux valeurs propres de J_3 donne :

$$\begin{aligned}
J_3(\Omega\Psi\underline{U}) = m(\Omega\Psi\underline{U}) &\Leftrightarrow -\partial_\varphi\Psi\gamma_{13} = m\Psi \\
&\Leftrightarrow \Psi = \Psi(r, \theta, t)e^{m\varphi\gamma_{13}}
\end{aligned} \tag{18}$$

Aussi les solutions de la forme (11), obtenues en séparant les variables, sont vecteurs propres de J_3 avec la valeur propre m , et inversement tout vecteur propre de J_3 sépare la variable φ des variables t, r, θ . De plus (11) indique que, si m était entier, le changement de φ en $\varphi + 2\pi$ changerait de signe Ψ . L'onde de Dirac n'a donc de valeur définie que si m et j sont demi-impairs, ce qui était attendu pour expliquer la structure des raies.

En utilisant (17) et (18), on voit que, pour toute solution de la forme (11), Ψ est vecteur propre de J^2 si et seulement si Ψ_1 vérifie :

$$\partial_{\theta\theta}^2 \Psi_1 + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Psi_1 - m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \gamma_{21} \Psi_1 \gamma_{13} = 0 \tag{19}$$

Or cette équation est du second ordre, alors que l'équation (13) est du premier ordre. Il ne peut donc être question de mettre l'opérateur J^2 directement dans l'équation (13) comme on met l'opérateur L^2 dans le laplacien de l'équation de Schrödinger. Il faut utiliser une équation du premier ordre compatible avec l'équation du second ordre (19). Ceci est fait, dans la résolution classique, en considérant l'opérateur :

$$K = \gamma_0(1 + 2LS) \quad (20)$$

dont on démontre qu'il commute avec H , J_3 et J^2 , donc qui peut être diagonalisé simultanément avec ces opérateurs. Avec les notations précédentes, on a :

$$K = \begin{pmatrix} 1 - id & 0 \\ 0 & -1 + id \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} d_3 & d_1 - id_2 \\ d_1 + id_2 & -d_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi' \\ \chi' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Phi' = (1 - id)\Phi; \quad \chi' = (-1 + id)\chi \quad (22)$$

Soient alors Ψ et Ψ' les éléments pairs dont les colonnes de gauche sont respectivement :

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \psi' = \begin{pmatrix} \Phi' \\ \chi' \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\Psi' = K\Psi = \gamma_0[\Psi - (d_1\gamma_{32} + d_2\gamma_{13} + d_3\gamma_{21})\Psi]\gamma_0 \quad (23)$$

En utilisant la forme générale (2) d'un élément pair de l'algèbre d'espace-temps, on peut écrire :

$$\Psi_1 = \underline{a} + \underline{b}\gamma_{10} + \underline{c}\gamma_{20} + \underline{d}\gamma_{30} + \underline{e}\gamma_{21} + \underline{f}\gamma_{23} + \underline{g}\gamma_{13} + \underline{h}\hat{i} \quad (24)$$

où les \underline{a} , \underline{b} , ..., \underline{h} sont des fonctions à valeur réelle de r et θ . L'équation (19), c'est à dire la condition pour que Ψ soit vecteur propre de J^2 avec la valeur propre $j(j+1)$, équivaut au système :

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{a} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{a} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{f} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{f} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{f} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{a} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{b} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{b} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{h} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{h} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{h} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{b} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{c} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{c} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{d} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{d} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{d} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{c} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{e} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{e} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{g} \\
0 &= \partial_{\theta\theta}^2 \underline{g} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \underline{g} + m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \underline{e}
\end{aligned} \tag{25}$$

On peut remarquer que ce système se divise en 4 sous-systèmes indépendants et identiques. On a :

$$D = d_1 \gamma_{32} + d_2 \gamma_{13} + d_3 \gamma_{21} = \left(\gamma_{21} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \gamma_{32} e^{\varphi \gamma_{21}} \right) \partial_\varphi + \gamma_{13} e^{\varphi \gamma_{21}} \partial_\theta \tag{26}$$

Soit $-\kappa$ la valeur propre de l'opérateur K . On obtient :

$$\begin{aligned}
K\Psi = -\kappa\Psi &\Leftrightarrow \gamma_0(\Psi - D\Psi)\gamma_0 = -\kappa\Psi \\
&\Leftrightarrow D\Psi = \Psi + \kappa\gamma_0\Psi\gamma_0
\end{aligned} \tag{27}$$

Pour calculer $D\Psi$ avec la forme (11), on notera que :

$$\partial_\varphi \Omega = -\frac{1}{2} \gamma_{21} \Omega ; \quad \partial_\theta \Omega = -\frac{1}{2 \sin \theta} \Omega e^{\theta \gamma_{13}} \tag{28}$$

$$D\Psi = \left(\gamma_{21} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\gamma_{32}e^{\varphi\gamma_{21}}\right)\partial_{\varphi}\Psi + \gamma_{13}e^{\varphi\gamma_{21}}\partial_{\theta}\Psi \quad (29)$$

Donc on a (27) si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \Psi_1 + \kappa\gamma_0\Psi_1\gamma_0 \\ &= \Omega^{-1} \left[\left(\gamma_{21} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\gamma_{32}e^{\varphi\gamma_{21}} \right) \left(-\frac{1}{2}\gamma_{21}\Omega\Psi_1 + m\Omega\Psi_1\gamma_{13} \right) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_{13}e^{\varphi\gamma_{21}}\Omega \left(-\frac{1}{2\sin\theta}e^{\theta\gamma_{13}}\Psi_1 + \partial_{\theta}\Psi_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Et comme on a :

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}\gamma_{21} \left(-\frac{1}{2} \right) \gamma_{21}\Omega &= \frac{1}{2} \\ \Omega^{-1}\gamma_{21}\Omega &= e^{\theta\gamma_{13}}\gamma_{21} \\ \Omega^{-1}\gamma_{32}e^{\varphi\gamma_{21}}\gamma_{21}\Omega &= \gamma_{13} \\ \Omega^{-1}\gamma_{32}e^{\varphi\gamma_{21}}\Omega &= e^{\theta\gamma_{13}}\gamma_{32} \\ \Omega^{-1}\gamma_{13}e^{\varphi\gamma_{21}}\Omega &= \gamma_{13} \end{aligned}$$

l'équation (30) équivaut à :

$$\Psi_1 + \kappa\gamma_0\Psi_1\gamma_0 = \Psi_1 - \frac{m}{\sin\theta}\gamma_{32}\Psi_1\gamma_{13} + \gamma_{13}\partial_{\theta}\Psi_1$$

c'est à dire équivaut à :

$$\partial_{\theta}\Psi_1 = \frac{m}{\sin\theta}\gamma_{12}\Psi_1\gamma_{13} - \kappa\gamma_{13}\gamma_0\Psi_1\gamma_0 \quad (31)$$

On peut vérifier aisément que cette relation redonne l'équation du second ordre (19) si, et seulement si :

$$\kappa^2 = \left(j + \frac{1}{2} \right)^2$$

Avec (24) l'équation (31) équivaut au système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_{\theta}\underline{a} &= \frac{m}{\sin\theta}\underline{f} + \kappa\underline{g} \quad ; \quad \partial_{\theta}\underline{f} = \frac{m}{\sin\theta}\underline{a} - \kappa\underline{e} \\ \partial_{\theta}\underline{e} &= \frac{m}{\sin\theta}\underline{g} + \kappa\underline{f} \quad ; \quad \partial_{\theta}\underline{g} = \frac{m}{\sin\theta}\underline{e} - \kappa\underline{a} \\ \partial_{\theta}\underline{d} &= \frac{m}{\sin\theta}\underline{c} + \kappa\underline{b} \quad ; \quad \partial_{\theta}\underline{c} = \frac{m}{\sin\theta}\underline{d} - \kappa\underline{h} \\ \partial_{\theta}\underline{h} &= \frac{m}{\sin\theta}\underline{b} + \kappa\underline{c} \quad ; \quad \partial_{\theta}\underline{b} = \frac{m}{\sin\theta}\underline{h} - \kappa\underline{d} \end{aligned} \quad (32)$$

Remarquons que ce système n'est ni le seul, ni le plus simple des systèmes du premier ordre donnant (25) au second ordre. En portant (31) dans l'équation (12) on obtient :

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right) \Psi_1 + \gamma_{30} \partial_r \Psi_1 \gamma_{13} + \frac{\kappa}{r} \gamma_3 \Psi_1 \gamma_{013} = M \gamma_0 \Psi_1 \gamma_0 \quad (33)$$

Ce qui équivaut au système : (34)

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right) \underline{a} - \partial_r \underline{b} + \frac{\kappa}{r} \underline{b} &= 0; & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right) \underline{b} + \partial_r \underline{a} + \frac{\kappa}{r} \underline{a} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right) \underline{e} + \partial_r \underline{c} - \frac{\kappa}{r} \underline{c} &= 0; & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right) \underline{c} - \partial_r \underline{e} - \frac{\kappa}{r} \underline{e} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right) \underline{g} + \partial_r \underline{d} - \frac{\kappa}{r} \underline{d} &= 0; & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right) \underline{d} - \partial_r \underline{g} - \frac{\kappa}{r} \underline{g} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right) \underline{f} - \partial_r \underline{h} + \frac{\kappa}{r} \underline{h} &= 0; & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right) \underline{h} + \partial_r \underline{f} + \frac{\kappa}{r} \underline{f} &= 0 \end{aligned}$$

Pour obtenir la séparation des variables r et θ , il suffit que les fonctions liées dans (32) aient la même partie radiale et que les fonctions liées dans (34) aient la même partie angulaire. On est donc amené à poser :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= aA; \quad \underline{e} = aB; \quad \underline{f} = aC; \quad \underline{g} = aD \\ \underline{b} &= -bA; \quad \underline{c} = bB; \quad \underline{h} = -bC; \quad \underline{d} = bD \\ a &= a(r); \quad b = b(r); \quad A = A(\theta); \quad B = B(\theta); \quad C = C(\theta); \quad D = D(\theta) \end{aligned} \quad (35)$$

Le système angulaire (32) devient alors :

$$\begin{aligned} A' &= \frac{m}{\sin \theta} C + \kappa D \\ B' &= \frac{m}{\sin \theta} D + \kappa C \\ C' &= \frac{m}{\sin \theta} A - \kappa B \\ D' &= \frac{m}{\sin \theta} B - \kappa A \end{aligned} \quad (36)$$

tandis que le système radial (34) donne :

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right) a + b' - \kappa \frac{b}{r} = 0; \quad \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right) b - a' - \kappa \frac{a}{r} = 0 \quad (37)$$

C'est le système radial classique de la théorie de Dirac, dont l'étude fournit la formule de Sommerfeld des niveaux d'énergie :

$$E = M \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{k + \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

où k est le degré des polynômes en facteur dans les fonctions radiales a et b .

Comme la méthode précédente, basée sur l'utilisation de l'opérateur K , est inutilisable pour l'équation non linéaire (4), reprenons la méthode de séparation des variables de Krüger. Si l'on pose :

$$\Psi_1 = \hat{i}\eta g + \gamma_{30}\eta f; \quad \eta = \eta(r); \quad f = f(\theta); \quad g = g(\theta) \quad (39)$$

l'équation (12) devient :

$$\begin{aligned} & \hat{i} \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \eta g + \gamma_{30}\eta' g \gamma_{13} + \gamma_{10} \frac{1}{r} \eta g' \gamma_{13} - \frac{m}{r \sin \theta} \gamma_{10} \eta f + M \gamma_0 \eta g \gamma_0 \right] \\ & + \gamma_{30} \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \eta f + \gamma_{30}\eta' f \gamma_{13} - \gamma_{10} \frac{1}{r} \eta f' \gamma_{13} - \frac{m}{r \sin \theta} \gamma_{10} \eta g + M \gamma_0 \eta f \gamma_0 \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

donc si f et g sont solutions du système angulaire :

$$\begin{aligned} -g' \gamma_{13} + \frac{m}{\sin \theta} f &= \kappa g \\ f' \gamma_{13} + \frac{m}{\sin \theta} g &= \kappa f \end{aligned} \quad (41)$$

et si f et g commutent avec γ_0 et γ_{13} , on obtient :

$$\begin{aligned} & \hat{i} \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \eta + \gamma_{30}\eta' \gamma_{13} - \gamma_{10} \frac{\kappa}{r} \eta + M \gamma_0 \eta \gamma_0 \right] g \\ & + \gamma_{30} \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \eta + \gamma_{30}\eta' \gamma_{13} - \gamma_{10} \frac{\kappa}{r} \eta + M \gamma_0 \eta \gamma_0 \right] f = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Donc pour que Ψ_1 soit solution de (12), il suffit que η soit solution de l'équation radiale :

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\eta + \gamma_{30}\eta'\gamma_{13} - \gamma_{10}\frac{\kappa}{r}\eta + M\gamma_0\eta\gamma_0 = 0 \quad (43)$$

En [3] on prenait au départ f et g sous la forme la plus générale possible :

$$f = A + B\gamma_{13} \quad ; \quad g = C + D\gamma_{13} \quad (44)$$

mais par la suite on prenait implicitement $D = A$ et $C = B$, c'est à dire :

$$f = A + B\gamma_{13} \quad ; \quad g = B + A\gamma_{13} \quad (45)$$

Pour l'équation linéaire on peut prendre η de la forme :

$$\eta = a + b\gamma_{10} \quad (46)$$

et l'équation radiale (43) équivaut au système :

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M\right)a - b' - \kappa\frac{b}{r} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M\right)b + a' - \kappa\frac{a}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

qui est le système classique (37) dans lequel on a permuté a et b . Donc on obtient là aussi la formule des niveaux d'énergie et le bon nombre d'états de nombre quantique principal n . En fait on a ici :

$$\partial_\theta\Psi_1 = \frac{m}{\sin\theta}\gamma_{12}\Psi_1\gamma_{13} - \kappa\gamma_{13}\gamma_0\Psi_1\gamma_0 \quad (48)$$

c'est à dire que Ψ est vecteur propre de l'opérateur K . Les solutions définies par (39), (45) et (46), qui comportent deux fonctions radiales et deux fonctions angulaires, font parties des vecteurs propres de l'opérateur K , et correspondent aux solutions de (35) dans lesquelles on se restreint à $D = -B$ et $C = A$. Ainsi il y a coïncidence exacte entre les fonctions d'onde du calcul classique et celles que l'on obtient avec la méthode de Krüger de séparation des variables. Or ceci est extrêmement intéressant pour l'équation non linéaire (4). En effet, pour celle-ci η doit être pris sous la forme :

$$\eta = a + b\gamma_{10} + c\gamma_{32} + d\hat{i} \quad (49)$$

tandis que les fonctions angulaires et le système angulaire (41) ne changent pas. On obtient à la place de l'équation radiale (43) :

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right) \eta + \gamma_{30} \eta' \gamma_{13} - \gamma_{10} \frac{\kappa}{r} \eta + M \gamma_0 \eta \gamma_0 e^{\beta i} = 0 \quad (50)$$

qui donne avec (49) le système radial :

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M \frac{\Omega_1}{\rho}\right) a + M \frac{\Omega_2}{\rho} d - b' - \kappa \frac{b}{r} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M \frac{\Omega_1}{\rho}\right) b - M \frac{\Omega_2}{\rho} c + a' - \kappa \frac{a}{r} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} + M \frac{\Omega_1}{\rho}\right) c - M \frac{\Omega_2}{\rho} b + d' - \kappa \frac{d}{r} &= 0 \\ \left(E + \frac{Z\alpha}{r} - M \frac{\Omega_1}{\rho}\right) d + M \frac{\Omega_2}{\rho} a - c' - \kappa \frac{c}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

On obtient les solutions classiques et le système radial classique en linéarisant l'équation, c'est à dire en annulant l'angle β et les fonctions radiales c et d , ce qui ramène (51) à (47). Or le Ψ obtenu avec la forme (49) de η et les mêmes fonctions angulaires que pour l'équation linéaire ne vérifie plus l'équation (31), c'est à dire n'est plus vecteur propre de l'opérateur K , mais vérifie toujours (25), c'est à dire est vecteur propre de J^2 . L'utilisation de l'opérateur K apparaît donc comme un accident heureux qui a permis d'obtenir des solutions qui sont exactement les linéarisées des solutions de l'équation (4). C'est exactement ce qu'il faut trouver si l'on part du principe que l'équation (4) est la bonne.

Ajoutons que la coïncidence de la résolution classique et de celle issue de la séparation des variables est encourageante pour le calcul, à partir de l'équation non linéaire, des autres effets prévus par la théorie de Dirac comme les règles de sélection ou les facteurs de Landé.

2. Résolution de l'équation non linéaire dans un cas simple

La résolution de l'équation non linéaire (4) comporte une partie angulaire simple, parce qu'identique à celle de l'équation linéaire de Dirac, et une partie radiale non linéaire, donc très difficile à résoudre exactement. En [3] a été effectuée une résolution numérique, qui permet de voir certains aspects du problème mais qui ne peut être aussi démonstrative

qu'une résolution analytique exacte. Nous allons voir ici qu'il est possible de résoudre exactement l'équation radiale non linéaire dans le cas le plus simple.

La raison principale pour laquelle les résultats avec l'équation non linéaire sont proches de ceux de la théorie linéaire est que, pour celle-ci, dans le plan d'équation $z = 0$, l'angle β d'Yvon-Takabayasi est identiquement nul pour toutes les solutions des équations angulaires, modulo π , tandis que, pour l'équation non linéaire, il y a également une simplification notable dans ce plan, où l'on obtient (voir (4-89) de [3]) :

$$\Omega_1 = \frac{k}{r^2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) ; \quad \Omega_2 = \frac{2k}{r^2}(bc - ad) \quad (52)$$

où k est une constante positive. Posons alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b) ; & w &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b - a) \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c + d) ; & s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d - c) \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ; & \vec{m} &= \begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) &= wu + sv = \vec{m} \cdot \vec{n} = \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| \cos(\vec{m}, \vec{n}) \\ bc - ad = wv - us &= \det(\vec{m}, \vec{n}) = \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| \sin(\vec{m}, \vec{n}) \\ \Omega_1 &= \frac{2k}{r^2} \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| \cos(\vec{m}, \vec{n}) ; & \Omega_2 &= \frac{2k}{r^2} \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| \sin(\vec{m}, \vec{n}) \\ \rho = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} &= \frac{2k}{r^2} \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| ; & \beta &= (\vec{m}, \vec{n}) \\ \frac{\Omega_1}{\rho} &= \cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{wu + sv}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{w^2 + s^2}} ; \\ \frac{\Omega_2}{\rho} &= \sin(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{wv - us}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{w^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (54)$$

Pour simplifier les notations dans le système radial, on effectue habituellement le changement de variable :

$$x = Mr \quad ; \quad \varepsilon = \frac{E}{M} \quad (55)$$

qui transforme le système radial (51) en :

$$\begin{aligned}
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} + \frac{\Omega_1}{\rho} \right) a + \frac{\Omega_2}{\rho} d - b' - \frac{\kappa}{x} b &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} - \frac{\Omega_1}{\rho} \right) b - \frac{\Omega_2}{\rho} c + a' - \frac{\kappa}{x} a &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} + \frac{\Omega_1}{\rho} \right) c - \frac{\Omega_2}{\rho} b + d' - \frac{\kappa}{x} d &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} - \frac{\Omega_1}{\rho} \right) d + \frac{\Omega_2}{\rho} a - c' - \frac{\kappa}{x} c &= 0
 \end{aligned} \tag{56}$$

En ajoutant et retranchant ces équations on obtient :

$$\begin{aligned}
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) (a + b) + \frac{\Omega_1}{\rho} (a - b) + \frac{\Omega_2}{\rho} (d - c) + (a - b)' - \frac{\kappa}{x} (a + b) &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) (a - b) + \frac{\Omega_1}{\rho} (a + b) + \frac{\Omega_2}{\rho} (d + c) - (a + b)' + \frac{\kappa}{x} (a - b) &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) (c + d) + \frac{\Omega_1}{\rho} (c - d) + \frac{\Omega_2}{\rho} (a - b) - (c - d)' - \frac{\kappa}{x} (c + d) &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) (c - d) + \frac{\Omega_1}{\rho} (c + d) - \frac{\Omega_2}{\rho} (a + b) + (c + d)' + \frac{\kappa}{x} (c - d) &= 0
 \end{aligned} \tag{57}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) u - \frac{\Omega_1}{\rho} w + \frac{\Omega_2}{\rho} s - w' - \frac{\kappa}{x} u &= 0 \\
 - \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) w + \frac{\Omega_1}{\rho} u + \frac{\Omega_2}{\rho} v - u' - \frac{\kappa}{x} w &= 0 \\
 \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) v - \frac{\Omega_1}{\rho} s - \frac{\Omega_2}{\rho} w + s' - \frac{\kappa}{x} v &= 0 \\
 - \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) s + \frac{\Omega_1}{\rho} v - \frac{\Omega_2}{\rho} u + v' - \frac{\kappa}{x} s &= 0
 \end{aligned} \tag{58}$$

Or on a, dans le plan d'équation $z = 0$:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Omega_1}{\rho}w + \frac{\Omega_2}{\rho}s &= \frac{-(wu + sv)w + (wv - us)s}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{w^2 + s^2}} = -u\sqrt{\frac{w^2 + s^2}{u^2 + v^2}} \\
\frac{\Omega_1}{\rho}u + \frac{\Omega_2}{\rho}v &= \frac{(wu + sv)u + (wv - us)v}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{w^2 + s^2}} = w\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{w^2 + s^2}} \\
-\frac{\Omega_1}{\rho}s - \frac{\Omega_2}{\rho}w &= \frac{-(wu + sv)s - (wv - us)w}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{w^2 + s^2}} = -v\sqrt{\frac{w^2 + s^2}{u^2 + v^2}} \\
\frac{\Omega_1}{\rho}v - \frac{\Omega_2}{\rho}u &= \frac{(wu + sv)v - (wv - us)u}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{w^2 + s^2}} = s\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{w^2 + s^2}}
\end{aligned} \tag{59}$$

Donc le système radial, dans ce plan, s'écrit exactement :

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x}\right)u - u\sqrt{\frac{w^2 + s^2}{u^2 + v^2}} - w' - \frac{\kappa}{x}u &= 0 \\
-\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x}\right)w + w\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{w^2 + s^2}} - u' - \frac{\kappa}{x}w &= 0 \\
\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x}\right)v - v\sqrt{\frac{w^2 + s^2}{u^2 + v^2}} + s' - \frac{\kappa}{x}v &= 0 \\
-\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x}\right)s + s\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{w^2 + s^2}} + v' - \frac{\kappa}{x}s &= 0
\end{aligned} \tag{60}$$

Il est malheureusement encore très difficile de résoudre ce système dans le cas général. Dans la résolution de l'équation linéaire, on effectue un développement en série des fonctions radiales, et l'on prouve que l'intégrabilité des fonctions d'onde n'est possible que si les développements en série sont en fait limités à des polynômes de degré k , ce qui fournit le dernier nombre quantique de la formule de Sommerfeld (38). Le cas le plus simple est celui où ces polynômes sont de degré 0, c'est à dire sont réduits à des constantes. C'est dans ce cas particulier que nous allons résoudre exactement le système (60). Ce cas particulier correspond aux états $1s1/2$; $2p3/2$; $3d5/2$; ... où l'on peut prendre :

$$\begin{aligned}
u &= u_0 e^{-ax} x^g & ; & & v &= v_0 e^{-ax} x^g \\
w &= w_0 e^{-ax} x^g & ; & & s &= s_0 e^{-ax} x^g
\end{aligned} \tag{61}$$

u_0, v_0, w_0, s_0, a et g étant des constantes. On obtient:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) u_0 - u_0 \sqrt{\frac{w_0^2 + s_0^2}{u_0^2 + v_0^2}} - \left(-aw_0 + g \frac{w_0}{x} \right) - \frac{\kappa}{x} u_0 \right] e^{-ax} x^g = 0 \\ & \left[- \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) w_0 + w_0 \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{w_0^2 + s_0^2}} - \left(-au_0 + g \frac{u_0}{x} \right) - \frac{\kappa}{x} w_0 \right] e^{-ax} x^g = 0 \\ & \left[\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) v_0 + v_0 \sqrt{\frac{w_0^2 + s_0^2}{u_0^2 + v_0^2}} + \left(-as_0 + g \frac{s_0}{x} \right) - \frac{\kappa}{x} v_0 \right] e^{-ax} x^g = 0 \\ & \left[- \left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x} \right) s_0 + s_0 \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{w_0^2 + s_0^2}} + \left(-av_0 + g \frac{v_0}{x} \right) - \frac{\kappa}{x} s_0 \right] e^{-ax} x^g = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Et ceci donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon u_0 - u_0 \sqrt{\frac{w_0^2 + s_0^2}{u_0^2 + v_0^2}} + aw_0 &= 0; & Z\alpha u_0 - gw_0 - \kappa u_0 &= 0 \\ -\varepsilon w_0 + w_0 \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{w_0^2 + s_0^2}} + au_0 &= 0; & -Z\alpha w_0 - gu_0 - \kappa w_0 &= 0 \\ \varepsilon v_0 + v_0 \sqrt{\frac{w_0^2 + s_0^2}{u_0^2 + v_0^2}} - as_0 &= 0; & Z\alpha v_0 + gs_0 - \kappa v_0 &= 0 \\ -\varepsilon s_0 + s_0 \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{w_0^2 + s_0^2}} - av_0 &= 0; & -Z\alpha s_0 - gv_0 - \kappa s_0 &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

On n'obtiendra de solution non nulle que si les déterminants sont nuls :

$$0 = \begin{vmatrix} Z\alpha - \kappa & -g \\ g & Z\alpha + \kappa \end{vmatrix} = Z^2\alpha^2 - \kappa^2 + g^2 \tag{64}$$

donc on a, pour les mêmes raisons de convergence que dans la théorie linéaire :

$$g = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2} \tag{65}$$

Nous avons supposé implicitement ici que les solutions de l'équation non linéaires sont proches de celles de l'équation linéaire, ce qui ne marche

évidemment que si c et d sont petits par rapport à a et b , et non l'inverse, donc on doit prendre, comme dans la théorie linéaire, $\kappa < 0$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{Z\alpha - \kappa}{g} u_0 = u_0 \sqrt{\frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha}} \\ s_0 &= -\frac{Z\alpha - \kappa}{g} v u_0 = -v_0 \sqrt{\frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha}} \end{aligned} \quad (66)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{w_0^2 + s_0^2}{u_0^2 + v_0^2} &= \frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha} \\ u_0 \left[\varepsilon - (1-a) \sqrt{\frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha}} \right] &= 0 \\ w_0 \left[-\varepsilon + (1+a) \sqrt{\frac{\kappa + Z\alpha}{\kappa - Z\alpha}} \right] &= 0 \\ \varepsilon &= (1-a) \sqrt{\frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha}} = (1+a) \sqrt{\frac{\kappa + Z\alpha}{\kappa - Z\alpha}} \end{aligned} \quad (67)$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{1-a} &= \sqrt{\frac{\kappa - Z\alpha}{\kappa + Z\alpha}} = \frac{a+1}{\varepsilon} \\ \varepsilon^2 &= 1 - a^2 \\ a &= \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (68)$$

comme dans la théorie linéaire. Posons :

$$N = \sqrt{\frac{\kappa + Z\alpha}{\kappa - Z\alpha}} \quad (69)$$

On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon N &= 1 - a = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ \varepsilon &= \frac{2N}{N^2 + 1} = \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\kappa^2}} \end{aligned} \quad (70)$$

C'est à dire :

$$E = M\sqrt{1 - \frac{Z^2\alpha^2}{\kappa^2}} \quad (71)$$

Or cette formule est exactement la formule de Sommerfeld (38) avec $k = 0$. Ce résultat est intéressant car il prouve, au moins partiellement, qu'il y a bien quantification des énergies pour l'équation non linéaire (4), ce qu'il est possible de voir plus ou moins bien avec une résolution numérique dans le cas général. La coïncidence exacte des niveaux d'énergie avec ceux de la théorie linéaire n'est pas surprenante puisque nous nous sommes placés ici dans le cas le plus favorable, celui où l'angle d'Yvon-Takabayasi est partout petit. Elle est néanmoins intéressante car elle prouve que, dans ce cas, la correction relativiste par rapport à la théorie de Schrödinger est la même que celle qui résulte de la théorie linéaire de Dirac.

Pour les autres niveaux d'énergie, seule une intégration numérique a pu être effectuée [3]. Elle indique des résultats qualitativement différents entre les états $2s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$ dont la théorie linéaire prévoit des niveaux identiques, mais qui sont en fait séparés par l'effet Lamb. Il serait donc extrêmement intéressant de pouvoir calculer exactement les niveaux d'énergie correspondant à partir de l'équation non linéaire (4). C'est malheureusement un problème fort difficile.

Références

- [1] Louis de Broglie : La réinterprétation de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1971
- [2] C. Daviau & G. Lochak : Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire. (Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 16 n°1 1991)
- [3] C. Daviau : Equation de Dirac non linéaire, thèse de doctorat de l'Université de Nantes, 5 mars 1993
- [4] C. Daviau : Linear and Nonlinear Dirac Equation, Found. of Phys. Vol. 23, n°11 1993.
- [5] C. Daviau : Remarques sur une équation de Dirac non linéaire (Annales de la Fondation Louis de Broglie, **19**, n°4, 1994)
- [6] D. Hestenes : Space-Time Algebra (Gordon & Breach, New York 1966)
- [7] D. Hestenes : Real Spinor Fields. (Journal of Mathematical Physics, Vol. 8 n°4 1967)
- [8] D. Hestenes : Local observables in the Dirac theory. (Journal of Mathematical Physics, Vol 14 n°7 1973)
- [9] D. Hestenes : Proper particle mechanics. (Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10 1974)

- [10] D. Hestenes : Proper dynamics of a rigid point particle. (Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10 1974)
- [11] D. Hestenes : Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory (Journal of Mathematical Physics, Vol. 16 n°3 1975)
- [12] D. Hestenes : A unified language for Mathematics and Physics & Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics (JSR Chisholm & AK Common eds, Reidel, Dordrecht,1986)
- [13] H. Krüger : New solutions of the Dirac equation for central fields (D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, The Electron 49-81, Kluwer Academic Publishers 1991)

(Manuscrit reçu le 15 juin 1994)