Sur la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels

N. Stavroulakis

Dodecanissou 50
152 35 Vrilissia, Attiki - Grèce

RÉSUMÉ. Conformément aux principes de la Relativité Générale, tout changement dans la distribution de matière engendre des effets gravitationnels qui se propagent dans l'espace suivant la loi des géodésiques isotropes. Le premier pas vers la formulation mathématique de ce processus a été accompli par l'introduction de la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels engendrés par les déformations d'une distribution $\Theta(4)$-invariante de matière. Le présent article est destiné à une discussion détaillée des propriétés de cette fonction afin de préparer une étude complète du mouvement des particules test et une approche des difficultés relatives à la notion d'énergie gravitationnel.

ABSTRACT. According to the principles of General Relativity, any change in the distribution of matter generates gravitational effects which are propagated in space in accordance with the law of null geodesics. This process has already been elucidated in the case of a $\Theta(4)$-invariant distribution of matter by the introduction of the propagation function of the gravitational disturbances generated by the deformations of the source. The purpose of the present paper is to provide a detailed discussion of this function in order to prepare a thorough study of the motion of test particles as well as an approach to the difficulties related to the notion of gravitational energy.

I. Introduction

Bien que la Relativité Générale soit censée décrire la propagation de proche en proche de la gravitation, les problèmes qui s'y rattachent ne sont même pas formulés. L'approche traditionnelle consiste à approximer les équations d'Einstein par des équations d'ondes du type classique (équation de d'Alembert) dans des régions où le champ gravitationnel est extrêmement faible et à en conclure entre autres que la gravitation se propage à la vitesse $c \simeq 3 \times 10^{10} cm/sec$. Cette pratique est contestable. La signification physique des approximations locales est douteuse, d'autant plus que le phénomène de propagation des ondes gravitationnelles est un phénomène global : par rapport à une métrique valable uniquement sur un ouvert dont l'adhérence se trouve à l'extérieur des sources, la propagation de la gravitation ne serait même pas concevable. D'autre part l'assertion sur la propagation à la vitesse c n'a, à proprement parler, aucun sens en Relativité Générale. Le calcul de la vitesse nécessite la connaissance du chemin parcouru par l'ébranlement gravitationnel en fonction du temps dans le milieu anisotrope créé par le champ gravitationnel. Or le temps n'est pas celui des horloges synchronisées comme c'est le cas dans l'espace de Minkowski. On ne saurait envisager la synchronisation des horloges dans un champ gravitationnel en état dynamique. C'est pourquoi la vitesse de propagation est une grandeur variable susceptible de prendre des valeurs positives aussi grandes que l'on veut. Cette constatation nous a déjà conduit, dans l'étude des champs gravitationnels $\Theta(4)$-invariants, à substituer à la vitesse de propagation la fonction de propagation qui est à la fois très simple conceptuellement et très riche en informations.

Quelle que soit la situation envisagée, la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels est destinée à jouer un rôle fondamental. Il s'agit d'un élément primordial associé aux métriques spatio-temporelles indépendamment de la validité ou de la non validité des équations d'Einstein. Pour pouvoir établir sa forme mathématique, on doit d'abord se faire une idée du mécanisme de propagation des ébranlements qui sont engendrés par les déformations des sources. Dans une telle démarche, il semble naturel de se laisser guider par la construction de Huyghens qui décrit la propagation de la lumière par la progression de fronts d'ondes le long de rayons définis de façon appropriée. Lorsqu'il s'agit d'un champ $\Theta(4)$-invariant, nous avons déjà identifié les rayons aux géodésiques radiales isotropes et la fonction de propagation des ébranlements à celle de la lumière émise radialement au bord de la source. Mais nous n'avons pas épuisé la totalité des questions qui se posent. D'une part il est nécessaire de clarifier un certain nombre de points essentiels et d'établir avec toute la rigueur mathématique requise divers résultats déjà admis sans démonstration [2]. D'autre part il reste à étudier le rôle de la fonction de propagation dans les équations de mouvement des particules test et dans les problèmes épineux concernant l'énergie gravitationnelle.

Cela dit, quelle que soit la métrique spatio-temporelle, l'établissement de la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels ou électromagnétiques est fondé tout d'abord sur le rôle spécifique de la coordonnée temporelle. Or celui-ci n'est pas défini par rapport à n'importe quel changement de coordonnées. Il ne suffit pas que la signature de la métrique soit respectée. Contrairement aux propriétés des formes quadratiques définies positives ou définies négatives, les coefficiens $a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{33}$ d'une forme quadratique de signature $(+1, -1, -1, -1)$:

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} dx^i dx^j$$

peuvent avoir des signes quelconques. Or, comme L. Landau et E. Lifchitz [1] l'avaient remarqué, pour que le temps local et le temps propre des différents observateurs soient définissables, il faut que l'une des coordonnées, notée x_0, soit de nature temporelle, c'est-à-dire telle que $a_{00} > 0$. Ils avaient aussi constaté que, si cette condition n'est pas satisfaite, le référentiel correspondant n'est pas réalisable par des corps réels, c'est-à-dire que la métrique en question est dépourvue de signification physique. En fait la condition $a_{00} > 0$ est nécessaire mais non pas suffisante pour la caractérisation de la coordonnée temporelle. Considérons, par exemple, les deux formes :

$$(dx_0 + 2dx_1 + 2dx_2 + 2dx_3)^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

et

$$(dx_0 + dx_1 + dx_2 + 2dx_3)^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

qui sont manifestement de signature $(+1, -1, -1, -1)$. Pour la première, on a

$$a_{00} = 1 > 0 \quad , \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 3 > 0,$$

de sorte qu'il n'y a aucune possibilité de distinguer une coordonnée temporelle unique parmi les quatre coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3. En ce qui concerne la deuxième, on a

$$a_{00} = 1 > 0 \quad , \quad a_{11} = a_{22} = 0 \quad , \quad a_{33} = 3 > 0,$$

de sorte qu'il n'y a pas encore de choix possible entre x_0 et x_3. Pour éviter ces ambiguïtés et les paradoxes qui s'en déduisent, on est conduit à poser une condition plus forte que celle proposée par L. Landau et E. Lifchitz :

Pour que la coordonnée temporelle x_0 soit caractérisée par la métrique elle-même, il faut et il suffit que l'on ait :

$$a_{00} > 0 \quad , \quad a_{11} \leq 0 \quad , \quad a_{22} \leq 0 \quad , \quad a_{33} \leq 0$$

Alors les trois autres coordonnées x_1, x_2, x_3 s'introduisent en tant que coordonnées spatiales, et la métrique riemanienne spatiale associée à la métrique spatio-temporelle se détermine aussi sans équivoque pour toute valeur de x_0. Nous ne considérerons que des métriques spatio-temporelles satisfaisant aux conditions précédentes. Toute autre métrique sera dépourvue de signification physique. Il en est ainsi en particulier pour la métrique d'Eddington-Finkelstein et pour la métrique utilisée par J.L. Synge [3] :

$$2f du dv - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

dans une tentative de remédier aux incohérences de la solution de Schwarzschild.

L'établissement de la fonction de propagation nécessite aussi la prise en considération des géodésiques isotropes (ou géodésiques de longueur nulle ou lignes d'univers des photons). Celles-ci ne sont pas étudiées de façon mathématiquement correcte dans tous les traités sur la Relativité Générale, bien que l'établissement de leurs équations ne présente aucune difficulté si l'on a recours à la définition générale des géodésiques.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $x(v) = (x^0(v), x^1(v), x^2(v), x^3(v))$ une courbe définie dans U au moyen d'un certain paramètre v, et

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} dx^i dx^j$$

une métrique spatio-temporelle sur U. Alors la courbe $x(v)$ est une géodésique de la métrique, si son vecteur tangent :

$$\frac{dx(v)}{dv}$$

est colinéaire avec sa dérivée covariante :

$$\frac{D}{dv}\frac{dx(v)}{dv},$$

ce qui donne :

$$\frac{D}{dv}\frac{dx(v)}{dv} = q(v)\frac{dx(v)}{dv},$$

de sorte que, en posant

$$Y^j = \frac{d^2x^j}{dv^2} + \sum_{k,l=0}^{3} \Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{dv}\frac{dx^l}{dv} - q(v)\frac{dx^j}{dv},$$

on obtient les équations des géodésiques sous leur forme générale :

$$Y^0 = 0 \quad , \quad Y^1 = 0 \quad , \quad Y^2 = 0 \quad , \quad Y^3 = 0.$$

Celles-ci conviennent aussi aux géodésiques isotropes pourvu que l'on choisisse $v \neq s$.

Une ligne isotrope (de longueur nulle), qu'elle soit géodésique ou non, est définie par la condition :

$$\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}\frac{dx^i}{dv}\frac{dx^j}{dv} = 0 \quad , \quad v \neq s,$$

qui entraîne d'une part (par dérivation)

$$\sum a_{ij}\frac{dx^i}{dv}\frac{d^2x^j}{dv^2} + \sum \Gamma_{i,kl}\frac{dx^i}{dv}\frac{dx^k}{dv}\frac{dx^l}{dv} = 0,$$

d'autre part

$$\sum a_{ij}Y^j\frac{dx^i}{dv} = \sum a_{ij}\frac{dx^i}{dv}\frac{d^2x^j}{dv^2} + \sum \Gamma_{i,kl}\frac{dx^i}{dv}\frac{dx^k}{dv}\frac{dx^l}{dv},$$

d'où

$$\sum a_{ij}Y^j\frac{dx^i}{dv} = 0,$$

de sorte que, en posant

$$X_j = \sum a_{ij}\frac{dx^i}{dv},$$

on obtient la condition :

$$\sum X_j Y^j = 0,$$

valable pour toute ligne isotrope.

Cela dit, nous allons nous limiter désormais à la métrique spatio-temporelle $\Theta(4)$-invariante, qui représente le champ créé par une distribution $\Theta(4)$-invariante de matière en déformation :

$$\begin{aligned} ds^2 =& (f(\tau,\rho)d\tau + \frac{h(\tau,\rho)}{\rho}(xdx))^2 \\ & - [(\frac{g(\tau,\rho}{\rho})^2 dx^2 + ((l(\tau,\rho))^2 - (\frac{g(\tau,\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}] \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec

$$(\tau,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \quad , \quad \rho = ||x|| \quad , \quad dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad , \quad xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3,$$

et

$$f(\tau,\rho) > 0 \quad , \quad l(\tau,\rho) > 0 \quad , \quad |h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho) \quad , \quad h(\tau,0) = 0 \quad , \quad g(\tau,\rho) > 0 \quad \text{si} \quad \rho > 0 \quad , \quad g(\tau,0) = 0. \tag{1.2}$$

La condition $f(\tau,\rho) > 0$ résulte du caractère temporel de la coordonnée $x_0 = \tau$, comme on l'a vu tout à l'heure. En ce qui concerne les composantes

$$a_{ii}(x_0,x) = ((h(\tau,\rho))^2 - (l(\tau,\rho))^2)\frac{x_i^2}{\rho^2} - (\frac{g(\tau,\rho)}{\rho})^2(1-\frac{x_i^2}{\rho^2}) \;,\; (i=1,2,3),$$

on a effectivement $a_{ii}(x_0,x) \leq 0$, si et seulement si $|h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho)$.

Dans un premier temps nous nous servirons des conditions de validité physique de la métrique (1.1) afin de définir le processus *limite* de propagation radiale, qui se réalise suivant la loi des géodésiques isotropes, et d'introduire la fonction de propagation correspondante. Celle-ci s'identifie à la fonction de propagation des photons émis radialement du bord de la source (en supposant que leur masse au repos soit rigoureusement nulle). Dans la suite nous ferons constamment cette identification et, pour avoir un langage imagé et commode, nous parlerons toujours de la fonction de propagation radiale des photons (ou de la lumière) au lieu de la fonction de propagation du processus limite.

Dans un deuxième temps nous montrerons que la fonction de propagation en question s'identifie à celle des ébranlements gravitationnels et établirons les conditions générales qui assurent sa validité physique.

2. Géodésiques radiales isotropes

Notons $\sigma(\tau)$ le rayon, variable avec le temps, de la sphère limitant la distribution considérée de matière. Alors, d'après nos idées intuitives sur la $\Theta(4)$-invariance, un photon émis radialement de cette sphère suivant un vecteur unitaire $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, à un certain instant t, décrira la demi-droite d_t définie par :

$$x_1 = \beta_1 \rho \quad , \quad x_2 = \beta_2 \rho \quad , \quad x_3 = \beta_3 \rho \quad , \quad (\rho \geq \sigma(t)).$$

Il n'en reste pas moins que cette assertion nécessite une justification mathématiquement rigoureuse. Nous avons donc à établir que les lignes isotropes qui résultent de l'annulation de ds^2 sur des demi-droites radiales issues du bord de la source sont géodésiques. Dans un premier temps notre vérification ne pourra être que locale.

PROPOSITION 2.1. Les deux équations différentielles:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) + l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)} \tag{2.1}$$

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h(\tau,\rho) - l(\tau,\rho)}{f(\tau,\rho)} \tag{2.2}$$

qui s'obtiennent en annulant ds^2 sur une demi-droite d_t définissent des géodésiques isotropes.

Démonstration. Moyennant au besoin une opération du groupe $\Theta(4)$, on peut faire en sorte que d_t se trouve dans le domaine de validité des coordonnées ρ, ϕ, θ, ce qui nous autorise à prendre en considération la métrique transformée :

$$ds^2 = f^2 d\tau^2 + 2fhd\tau d\rho + (h^2 - l^2)d\rho^2 - g^2 d\omega^2$$

par rapport à laquelle :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{31} = 0,\\
&\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{31} = 0,\\
&\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{31} = 0,\\
&\Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{33} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{23} = 0.
\end{aligned}$$

Alors, puisque $\phi = Cte$ et $\theta = Cte$ sur d_t, les équations $Y^2 = 0$ et $Y^3 = 0$ sont identiquement vérifiées, et en outre

$$Y^0 = \frac{d^2\tau}{dv^2} + \Gamma^0_{00}(\frac{d\tau}{dv})^2 + \Gamma^0_{11}(\frac{d\rho}{dv})^2 + 2\Gamma^0_{01}\frac{d\tau}{dv}\frac{d\rho}{dv} - q(v)\frac{d\tau}{dv},$$

$$Y^1 = \frac{d^2\rho}{dv^2} + \Gamma^1_{00}(\frac{d\tau}{dv})^2 + \Gamma^1_{11}(\frac{d\rho}{dv})^2 + 2\Gamma^1_{01}\frac{d\tau}{dv}\frac{d\rho}{dv} - q(v)\frac{d\rho}{dv}.$$

Considérons maintenant une solution $\tau = \xi(\rho)$ de (2.1) et choisissons $v = \rho$. Alors l'équation $Y^1 = 0$ s'écrit :

$$\Gamma^1_{00}(\xi(\rho), \rho)(\xi'(\rho))^2 + \Gamma^1_{11}(\xi(\rho), \rho) + 2\Gamma^1_{01}(\xi(\rho), \rho)\xi'(\rho) = q(\rho)$$

et détermine en conséquence la fonction $q(\rho)$. Il reste à vérifier l'équation $Y^0 = 0$. Or, compte tenu de $Y^1 = Y^2 = Y^3 = 0$ et de l'identité déjà vue :

$$\sum_{j=0}^{3} X_j Y^j = 0$$

qui est valable pour toute ligne isotrope, on a $X_0 Y^0 = 0$ avec

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum a_{0j}\frac{dx^j}{dv} = a_{00}\frac{dx^0}{dv} + a_{01}\frac{dx^1}{dv} \\ &= f^2\frac{d\tau}{d\rho} + fh = f^2(\frac{-h+l}{f}) + fh = fl > 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $Y^0 = 0$.

Cela prouve notre assertion en ce qui concerne (2.1). On raisonne de la même façon pour (2.2) : on vérifie d'abord les équations

$$Y^1 = 0 \quad , \quad Y^2 = 0 \quad , \quad Y^3 = 0,$$

et alors, compte tenu de

$$X_0 = f^2\frac{d\tau}{d\rho} + fh = f^2(\frac{-h-l}{f}) + fh = -fl < 0,$$

il en résulte $Y^0 = 0$.

3.Étude de l'équation (2.1).

Puisque $|h(\tau, \rho)| \leq l(\tau, \rho)$, l'équation (2.1) entraîne $d\tau/d\rho \geq 0$ et définit en conséquence, en vertu de la proposition 2.1, les mouvements des photons qui s'éloignent radialement de la source. Considérons un tel photon émis radialement à l'instant t du bord de la matière. Puisque sa vitesse de fuite, à savoir

$$\frac{f(t, \sigma(t))}{l(t, \sigma(t)) - h(t, \sigma(t))},$$

doit être supérieure à la vitesse radiale $|\sigma'(t)|$ du bord de la source au même instant, il en résulte l'inégalité stricte :

$$\frac{l(t, \sigma(t)) - h(t, \sigma(t))}{f(t, \sigma(t))}\sigma'(t) < 1 \tag{3.1}$$

qui est d'ailleurs trivialement valable pour les valeurs de t pour lesquelles $\sigma'(t) \leq 0$.

Cela dit, notons U l'ouvert $\{(\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2 | \rho > \sigma(\tau)\}$ et T_σ sa frontière $\{(\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2 | \rho = \sigma(\tau)\}$. L'équation (2.1) étant conçue sur le fermé $\overline{U} = U \cup T_\sigma$, seules les restrictions de f, h, l à $\overline{U}$ interviennent dans notre problème. Mais puisque nous cherchons à déterminer les solutions de (2.1) pour des conditions initiales prises sur la frontière T_σ, nous sommes amenés à prolonger la fonction

$$\alpha(\tau, \rho) = \frac{-h(\tau, \rho) + l(\tau, \rho)}{f(\tau, \rho)}$$

en une fonction, notée $\hat{\alpha}(\tau, \rho)$, indéfiniment dérivable sur le demi-plan $\{W = (\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2 | \rho > 0\}$, la restriction de $\hat{\alpha}(\tau, \rho)$ à $\{(\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \rho < \sigma(\tau)\}$ n'ayant en principe aucune signification physique. Nous n'avons pas besoin d'expliciter un prolongement précis, car ses valeurs sur $W - \overline{U}$ ne jouent qu'un rôle intermédiaire et n'interviennet pas dans le résultat final, comme nous le verrons dans un instant.

Cela dit, pour chaque point fixé $(t, \sigma(t)) \in T_\sigma$, l'équation différentielle

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \hat{\alpha}(\tau, \rho)$$

possède une solution locale unique $\tau = \hat{\xi}(t, \rho)$ prenant la valeur t pour $\rho = \sigma(t)$. Notons $]\rho_1(t), \rho_2(t)[$ l'intervalle maximal de définition de cette solution locale.

PROPOSITION 3.1. La condition (3.1) étant partout vérifiée, la courbe intégrale $(\hat{\xi}(t,\rho),\rho)$ rencontre T_σ au seul point $(t,\sigma(t))$. De façon plus précise, l'arc

$$\{(\hat{\xi}(t,\rho),\rho)|\rho_1(t) < \rho < \sigma(t)\}$$

est contenu dans $W - \overline{U}$ et l'arc

$$\{(\hat{\xi}(t,\rho),\rho)|\sigma(t) < \rho < \rho_2(t)\}$$

est contenu dans U. En outre la restriction de $\hat{\xi}(t,\rho)$ à $[\sigma(t),\rho_2(t)[$ est une fonction croissante (mais non nécessairement strictement croissante) de ρ.

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe un nombre réel $\epsilon_1 > 0$ tel que $\epsilon_1 < \sigma(t), \rho_1(t) < \sigma(t) - \epsilon_1$, et que

$$(\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in W - \overline{U}$$

pour tout $\rho \in [\sigma(t) - \epsilon_1, \sigma(t)[$. En effet, si l'on suppose le contraire, on peut trouver une suite de valeurs $\rho_n < \sigma(t)$ tendant vers $\sigma(t)$ et telles que $(\hat{\xi}(t,\rho_n),\rho_n) \notin W - \overline{U}$ ou, ce qui revient au même, $\sigma(\hat{\xi}(t,\rho_n)) \leq \rho_n$. Or cette condition est impossible si $\hat{\xi}(t,\rho_n) = t$, de sorte que $\hat{\xi}(t,\rho_n) \neq t$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\hat{\xi}(t,\rho_n) - t}{\rho_n - \sigma(t)} \cdot \frac{\sigma(\hat{\xi}(t,\rho_n)) - \sigma(t)}{\hat{\xi}(t,\rho_n) - t} \geq 1,$$

et puisque $\xi(t,\sigma(t)) = t$, en passant à la limite pour $\rho_n \to \sigma(t)$, on obtient :

$$\frac{\partial\hat{\xi}(t,\sigma(t))}{\partial\rho} \cdot \sigma'(t) \geq 1$$

ou encore :

$$\frac{-h(t,\sigma(t)) + l(t,\sigma(t))}{f(t,\sigma(t))} \cdot \sigma'(t) \geq 1$$

en contradiction avec (3.1). Cela prouve l'existence du positif ϵ_1 avec la propriété annoncée.

Nous démontrons maintenant que l'arc $\{(\xi(t,\rho),\rho)|\rho_1(t) < \rho < \sigma(t) - \epsilon_1\}$ est aussi contenu dans $W - \overline{U}$ en raisonnant par l'absurde : en cas contraire l'ensemble des valeurs $\rho \in]\rho_1(t), \sigma(t) - \epsilon_1[$ pour lesquelles

$\sigma(\hat{\xi}(t,\rho)) = \rho$ est non vide. Soit ρ_0 la borne supérieure de cet ensemble. Alors $\sigma(\hat{\xi}(t,\rho_0)) = \rho_0$ de sorte que la solution, notée $\phi(t_0,\rho)$, de

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \hat{\alpha}(\tau,\rho)$$

qui prend la valeur $t_0 = \hat{\xi}(t,\rho_0)$ pour $\rho = \rho_0$, coïncide avec $\hat{\xi}(t,\rho)$. D'autre part, pour tout $\rho \in]\rho_0, \sigma(t) - \epsilon_1[$, on a $\sigma(\xi(t,\rho)) > \rho$ et aussi $\hat{\xi}(t,\rho_0) \neq \hat{\xi}(t,\rho)$, car l'égalité $\xi(t,\rho_0) = \xi(t,\rho)$ entraînerait $\rho_0 = \sigma(\hat{\xi}(t,\rho_0)) > \rho$ contrairement au choix de ρ. Cela permet d'écrire

$$\frac{\hat{\xi}(t,\rho_0) - \hat{\xi}(t,\rho)}{\rho_0 - \rho} \cdot \frac{\sigma(\hat{\xi}(t,\rho_0)) - \sigma(\hat{\xi}(t,\rho))}{\hat{\xi}(t,\rho_0) - \hat{\xi}(t,\rho)} \geq 1$$

ou

$$\frac{\phi(t_0,\rho_0) - \phi(t_0,\rho)}{\rho_0 - \rho} \cdot \frac{\sigma(t_0) - \sigma(\phi(t_0,\rho))}{t_0 - \phi(t_0,\rho)} \geq 1,$$

d'où, en faisant tendre ρ vers ρ_0,

$$\frac{\partial \phi(t_0, \sigma(t_0))}{\partial \rho} \sigma'(t_0) \geq 1$$

ou encore

$$\frac{-h(t_0,\sigma(t_0)) + l(t_0,\sigma(t_0))}{f(t_0,\sigma(t_0))} \cdot \sigma'(t_0) \geq 1$$

en contradiction avec (3.1).

En définitive

$$\rho \in]\rho_1(t), \sigma(t)[\longrightarrow (\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in W - \overline{U}.$$

En raisonnant de façon analogue, on démontre que

$$\rho \in]\sigma(t), \rho_2(t)[\longrightarrow (\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in U.$$

Pour cela on établit d'abord l'existence d'un nombre $\epsilon_2 > 0$ tel que

$$\rho \in]\sigma(t), \sigma(t) + \epsilon_2] \longrightarrow (\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in U.$$

Ensuite pour démontrer l'implication

$$\rho \in]\sigma(t) + \epsilon_2, \rho_2(t)[\longrightarrow (\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in U,$$

on raisonne encore par l'absurde en introduisant la borne inférieure de l'ensemble des valeurs $\rho \in]\sigma(t)+\epsilon_2, \rho_2(t)[$ pour lesquelles $\sigma(\hat{\xi}(t,\rho)) = \rho$.

Finalement, compte tenu de $-h(\tau,\rho)+l(\tau,\rho) \geq 0$, la dernière partie de la proposition est évidente.

COROLLAIRE 3.1. La restriction de $\hat{\xi}(t,\rho)$, notée $\xi(t,\rho)$, à l'intervalle $[\sigma(t), \rho_2(t)[$ ne dépend pas du prolongement $\hat{\alpha}(t,\rho)$ de $\alpha(\tau,\rho)$ de sorte qu'elle est la solution unique de (2.1.) dans $\overline{U}$ pour laquelle $\xi(t,\sigma(t)) = t$.

En effet, puisque $\hat{\xi}(t,\sigma(t)) = t$ et $(\hat{\xi}(t,\rho),\rho) \in U$ pour $\rho > \sigma(t)$, la détermination de $\xi(t,\rho)$ sur $[\sigma(t), \rho_2(t)[$ dépend uniquement de la fonction $\alpha(\tau,\rho)$ qui est définie sur $\overline{U}$.

Le résultat précédent est purement local. Or, si la métrique (1.1) n'implique pas la propagation radiale de la lumière sur toute l'étendue de l'espace extérieur à la source, elle ne sera pas acceptable physiquement. En d'autres termes, la solution $\xi(t,\rho)$ de (2.1) doit être telle que $\rho_2(t) = +\infty$. Cela nous amène à imposer aux fonctions f, h, l des conditions supplémentaires :

Outre les conditions (1.2), les fonctions indéfiniment dérivables f, h, l doivent être telles que, quelque soit $t \in \mathbb{R}$, la condition initiale (3.1) soit satisfaite et que la solution $\xi(t,\rho)$ de (2.1) qui prend la valeur t pour $\rho = \sigma(t)$ soit définie sur $[\sigma(t), +\infty[$.

Bien entendu on sera obligé d'imposer à la métrique (1.1) d'autres conditions pourvu qu'elles soient exigées par les problèmes qui seront abordés au fur et à mesure que notre étude avance. En particulier les fonctions f, h, l doivent être telles que l'équation (2.2) donne lieu, elle aussi, à des solutions globales. Cela dit, la solution $\xi(t,\rho)$ de (2.1) étant définie sur $[\sigma(t), +\infty[$, la proposition 3.1 et le corollaire 3.1 assurent que la courbe intégrale

$$\{(\xi(t,\rho),\rho) | \rho > \sigma(t)\}$$

se trouve entièrement dans U, ce qui est l'expression mathématique du fait que le photon émis du bord à l'instant t reste constamment à l'extérieur de la matière.

Si l'on fait t parcourir $\mathbb{R}$, on obtient un feuilletage de $\overline{U}$ par des courbes intégrales de (2.1) issues des points de T_σ. D'autre part la solution globalement définie $\xi(t,\rho)$ est indéfiniment dérivable sur $\overline{U}$. Pour ce qui concerne en particulier ses dérivées partielles premières sur T_σ,

$$\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\sigma(t)} = \frac{\partial \xi(t,\sigma(t))}{\partial \rho}$$

est une dérivée à droite, tandis que

$$\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial t}\Big|_{\rho=\sigma(t)} = \frac{\partial \xi(t,\sigma(t))}{\partial t}$$

peut être aussi bien une dérivée à droite qu'une dérivée à gauche. En fait

$$\frac{\partial \xi(t,\sigma(t))}{\partial t}$$

est définie normalement dans $\overline{U}$ lorsque $\sigma(t)$ est un maximum relatif de σ, mais sa définition directe dans $\overline{U}$ n'est pas possible en général lorsque $\sigma(t)$ est un minimum relatif de σ. Cette situation ne pose aucun problème, car toutes ces dérivées sont toujours définissables au moyen de passages à la limite dans $\overline{U}$, leurs valeurs étant identiques aux valeurs correspondantes des dérivées de la solution $\hat{\xi}(t,\rho)$ qui prolonge $\xi(t,\rho)$.

La prise en considération des solutions globales des équations différentielles (2.1) et (2.2) permet de mieux comprendre la nécessité de la condition

$$|h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho)$$

qui a été d'abord introduite afin d'assurer le caractère temporel de la coordonnée $x_0 = \tau$. Sa négation conduirait à des paradoxes qu'il est facile de mettre en évidence en considérant les trois cas ci-après :

a) Si $h(\tau,\rho) > l(\tau,\rho)$ pour tout $\rho \geq \sigma(\tau)$, toute solution de (2.1) ou de (2.2) possède une dérivée strictement négative et définit en conséquence le mouvement d'un photon se dirigeant radialement vers la source. Les photons s'éloignant radialement de la source sont inexistants pour la métrique.

b) De même si l'on a $-h(\tau,\rho) > l(\tau,\rho)$ pour tout $(\tau,\rho) \in \overline{U}$, les photons se dirigeant radialement vers la source sont inexistants pour la métrique.

c) Supposons finalement que la condition $|h(\tau,\rho)| \leq l(\tau,\rho)$ soit satisfaite uniquement sur un ouvert strictement contenu dans U, ce qui permet de considérer une solution $\tau = \xi(\rho)$ de (2.1) telle que le signe de $\xi'(\rho)$ ne soit pas constant. Soient, pour fixer les idées,

$$\begin{aligned}
&\xi'(\rho) > 0 \quad \text{sur un intervalle} \quad [\rho_1, \rho_2[,\\
&\xi'(\rho_2) = 0,\\
&\xi'(\rho) < 0 \quad \text{sur un intervalle} \quad]\rho_2, \rho_3],
\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de

$$h(\xi(\rho_2), \rho_2) = l(\xi(\rho_2), \rho_2),$$

permet, en diminuant si besoin l'intervalle $[\rho_1, \rho_3]$, de supposer $h(\tau, \rho) > 0$ sur le pavé $[\xi(\rho_1), \xi(\rho_3)] \times [\rho_1, \rho_3]$. La fonction $\xi(\rho)$ étant strictement croissante sur $[\rho_1, \rho_2]$, elle définit le mouvement d'un photon s'éloignant radialement de la source sur l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ de la demi-droite considérée. Naturellement $\xi(\rho)$ doit définir le mouvement du même photon pour $\rho > \rho_2$, mais alors celui-ci parcourt l'intervalle $[\rho_2, \rho_3]$ en effectuant un mouvement vers le passé. Pour éviter ce paradoxe, on est obligé d'accepter que la restriction de $\xi(\rho)$ à $[\rho_2, \rho_3]$ définit le mouvement d'un autre photon se dirigeant vers la source, et que le mouvement du premier photon est défini par une solution $\hat{\xi}(\rho)$ de (2.2) sur $[\rho_2, \rho_3]$. Or cette hypothèse introduit une discontinuité de la dérivée $d\tau/d\rho$ pour $\rho = \rho_2$ et de plus, compte tenu de $h(\tau, \rho) > 0$, la dérivée

$$\hat{\xi}'(\rho) = -\frac{h(\hat{\xi}(\rho), \rho) + l(\hat{\xi}(\rho), \rho)}{f(\hat{\xi}(\rho), \rho)}$$

est strictement négative, ce qui donne encore lieu au mouvement d'un photon se dirigeant vers la source.

En conclusion il n'y a aucun moyen de définir les mouvements des photons, si la condition $|h(\tau, \rho)| \leq l(\tau, \rho)$ n'est pas partout respectée sur $\overline{U}$.

REMARQUE. L'équation (2.1) est liée au déformations de la source et aux effets gravitationnels qui en résultent. Par contre l'équation (2.2) ne joue aucun rôle dans la détermination du champ gravitationnel. Si l'on choisit, par exemple, $h = -l$ ce qui est une détermination en principe possible de h, l'équation (2.2) se réduit à $d\tau = 0$, ce qui donne $\tau = Cte$. Par conséquent la coordonnée temporelle représente alors le temps défini par le passage de photons venant de "l'infini" et n'a en conséquence aucun rapport avec les effets gravitationnels engendrés par la distribution considérée de matière.

4. Fonction de propagation radiale de la lumière

La possibilité d'introduire la fonction de propagation radiale de la lumière repose sur le fait que le temps t sur la sphère limitant la source figure en tant que paramètre dans la solution générale $\xi(t, \rho)$ de (2.1).

PROPOSITION 4.1. La fonction $\xi(t,\rho)$, $(t,\rho)\in\overline{U}$, *satisfait partout aux conditions :*

$$\frac{\partial\xi(t,\rho)}{\partial t}>0 \quad , \quad \frac{\partial\xi(t,\rho)}{\partial\rho}\geq 0,$$

dont la première permet de résoudre par rapport à t *l'équation* $\tau=\xi(t,\rho)$ *et d'obtenir ainsi l'instant* t *d'émission radiale d'un photon en fonction de l'instant* τ *de son passage par la sphère* $||x||=\rho$ *:*

$$t=\pi(\tau,\rho) \quad , \quad (\pi(\tau,\sigma(\tau))\equiv\tau).$$

La fonction $\pi(\tau,\rho)$ *ainsi définie sur* $\overline{U}$ *satisfait partout aux conditions :*

$$\frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial\tau}>0 \quad , \quad \frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial\rho}\leq 0$$

Démonstration. La condition $\partial\xi(t,\rho)/\partial\rho\geq 0$ est évidente (cf. proposition 3.1). D'autre part la dérivation de l'identité $\xi(t,\sigma(t))=t$ donne

$$\frac{\partial\xi(t,\sigma(t))}{\partial t}+\frac{\partial\xi(t,\sigma(t))}{\partial\rho}\sigma'(t)=1$$

ou encore

$$\frac{\partial\xi(t,\sigma(t))}{\partial t}+\frac{-h(t,\sigma(t))+l(t,\sigma(t))}{f(t,\sigma(t))}\sigma'(t)=1,$$

d'où, compte tenu de (3.1), $\partial\xi(t,\sigma(t))/\partial t>0$ quel que soit $t\in\mathbb{R}$.

Il reste à prouver que, pour toute valeur fixée $t_0\in\mathbb{R}$ et pour toute valeur fixée $\rho_0>\sigma(t_0)$, on a

$$\frac{\partial\xi(t_0,\rho_0)}{\partial t}>0.$$

Or $\rho_0>\sigma(t_0)$ entraîne l'existence d'un segment

$$[\xi(t_0,\rho_0),\xi(t_0,\rho_0)+\epsilon_1]\times\{\rho_0\} \quad , \quad \epsilon_1>0,$$

contenu dans U. Soit $\xi(t_1,\rho)$ la solution de (2.1) qui définit la courbe intégrale passant par $(\xi(t_0,\rho_0)+\epsilon_1,\rho_0)$. Puisque celle-ci ne rencontre pas la courbe intégrale définie par la solution $\xi(t_0, \rho)$, on a nécessairement $t_0 < t_1$. Le même raisonnement montre que si

$$t_0 < t' < t" < t_1 \quad , \qquad \text{alors} \quad \xi(t_0, \rho_0) < \xi(t', \rho_0) < \xi(t", \rho_0) < \xi(t_1, \rho).$$

En d'autres termes la fonction $\xi(t, \rho_0)$ est strictement croissante sur $[t_0, t_1]$, d'où en particulier

$$\frac{\partial \xi(t_0, \rho_0)}{\partial t} > 0,$$

ce qui prouve notre assertion.

En ce qui concerne la dernière partie de l'énoncé, la dérivation de l'identité $\xi(\pi(\tau, \rho), \rho) \equiv \tau$ donne :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \pi}{\partial \tau} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \pi}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = 0, \tag{4.1}$$

d'où les conditions relatives aux dérivées partielles de $\pi(\tau, \rho)$.

Nous venons d'établir la condition

$$\frac{\partial \xi(t, \rho)}{\partial t} > 0$$

moyennant le feuilletage de $\overline{U}$ par des courbes intégrales de (2.1). En fait cette condition traduit la signification physique de $\xi(t, \rho)$: Si $t_1 < t_2$, les photons émis à l'instant t_2 atteignent la sphère $||x|| = \rho$ plus tard que ceux émis à l'instant t_1, c'est-à-dire que $\xi(t_1, \rho) < \xi(t_2, \rho)$, d'où la croissance stricte de $\xi(t, \rho)$ par rapport à t.

La fonction $\pi(\tau, \rho)$ de la proposition 4.1 est, par rapport à (1.1), la fonction de propagation radiale de la lumière. Sa connaissance permet de calculer la vitesse de propagation (ou la vitesse des photons).

PROPOSITION 4.2. Si un photon émis radialement du bord de la source traverse la sphère $||x|| = \rho$ à l'instant τ, alors sa vitesse radiale à cet instant est égale à

$$-\frac{\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \tau}{\partial \pi(\tau, \rho)/\partial \rho}.$$

Démonstration. Puisque, d'après (2.1),

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h + l}{f} = \frac{\partial \xi(t, \rho)}{\partial \rho},$$

la vitesse du photon est égale à

$$\frac{d\rho}{dt} = (\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial \rho})^{-1}.$$

Or, d'après (4.1),

$$\frac{\partial \xi(t,\rho)}{\partial \rho} = -(\frac{\partial \pi(t,\rho)}{\partial \rho}) \cdot (\frac{\partial \pi(t,\rho)}{\partial \tau})^{-1},$$

d'où l'expression annoncée de la vitesse.

REMARQUE. Appliquée à la fonction de propagation classique $\tau - \rho/c$, la formule précédente donne la vitesse c.

On sait déjà que la fonction $t = \pi(\tau, \rho)$ ou sa réciproque $\tau = \xi(t, \rho)$ définit un difféomorphisme $\overline{U} \to \overline{U}$ se réduisant à l'identité sur la frontière de $\overline{U}$. La transformée de (1.1) par ce difféomorphisme s'obtient en y remplaçant τ par $\xi(t, \rho)$, ce qui donne *la forme canonique*, pour laquelle $h = l$:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(f_1(t,\rho)dt + \frac{l_1(t,\rho)}{\rho}(xdx)\right)^2 \\ &- \left[(\frac{g_1(t,\rho)}{\rho})^2 dx^2 + \left((l_1(t,\rho))^2 - (\frac{g_1(t,\rho)}{\rho})^2\right)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bien entendu on retrouve la forme générale si l'on y remplace t par $\pi(\tau, \rho)$. En d'autres termes toute métrique $\Theta(4)$-invariante à l'extérieur de la matière résulte d'une métrique canonique si l'on y substitue à la coordonnée temporelle t une fonction de propagation convenablement choisie.

PROPOSITION 4.3. Par rapport à la métrique canonique, la fonction de propagation radiale de la lumière se réduit à la coordonnée temporelle et la vitesse de propagation est infinie.

Nous voyons que, par rapport aux métriques spatio-temporelles générales, la vitesse de la lumière n'est pas bornée et peut même prendre la valeur $+\infty$. La propagation de la lumière n'est pas caractérisée par la constante c, mais par le principe des géodésiques isotropes. Par rapport aux mêmes métriques, la vitesse d'une particule de masse au repos non nulle n'est pas non plus bornée, mais ne peut pas atteindre la valeur $+\infty$.

En dépit d'une opinion persistante, la Relativité Générale, contrairement à la Relativité Restreinte, n'impose pas la limite c (ou n'importe quelle autre limite) aux vitesses des particules. Par conséquent la réalisation de vitesses supérieures à c est en principe possible dans le cadre de cette théorie. Si leur existence se confirme par l'observation, alors on aura simplement affaire à des situations où la métrique de Minkowski est inopérante.

5. Fonction de propagation des ébranlements gravitationnels

Soient $\sigma(\tau)$ et $\zeta(\tau)$ respectivement le rayon et le rayon de courbure de la sphère limitant la matière. Nous savons déjà [2] que l'ébranlement gravitationnel pour le champ extérieur s'identifie au couple de leurs dérivées $(\sigma'(\tau), \zeta'(\tau))$ et sa propagation se manifeste par une déformation de proche en proche de la métrique spatio-temporelle.

Prenant comme métrique de référence la métrique canonique (4.2), nous allons comparer la loi de propagation de l'ébranlement gravitationnel émis à un certain instant t à la loi de propagation de la lumière émise radialement au même instant. Or, la vitesse de la lumière étant infinie (cf. proposition 4.3), la vitesse de propagation radiale de l'ébranlement est forcément inférieure ou égale à celle de la lumière. Par conséquent, l'instant d'émission étant t, l'instant d'arrivée de la lumière sur n'importe quelle sphère $||x|| = \rho$ est aussi t, tandis que l'instant d'arrivée τ de l'ébranlement sur une sphère $||x|| = \rho$ sera supérieur ou égal à t.

D'après une étude antérieure [2], moyennant certaines hypothèses qui s'introduisent de façon naturelle, on peut établir l'égalité des deux fonctions de propagation, c'est-à-dire que $\tau = t$, sans faire aucun appel aux équations d'Einstein. Vu l'importance de ce résultat, nous allons l'établir de nouveau en nous fondant sur des raisonnements différents.

Notons $e(\tau, \rho)$ la fonction de propagation des ébranlements par rapport à (4.2), ce qui signifie que

$$t = e(\tau, \rho)$$

est l'instant d'émission de l'ébranlement qui atteint la sphère $||x|| = \rho$ à l'instant τ. Il en résulte en particulier $e(t, \sigma(t)) \equiv t$. D'autre part la fonction $e(\tau, \rho)$ doit être strictement croissante par rapport à τ pour des raisons physiques : les ébranlements gravitationnels donnent lieu à une succession de fronts d'ondes qui avancent dans un ordre déterminé. En d'autres termes, si $t_1 < t_2$ et $t_1 = e(\tau_1, \rho)$, $t_2 = e(\tau_2, \rho)$, on aura aussi $\tau_1 < \tau_2$, ce qui se traduit par la condition

$$\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \tau} > 0 \quad \text{pour tout} \quad (\tau,\rho) \in \overline{U}.$$

PROPOSITION 5.1. Si l'ébranlement atteint la sphère $||x|| = \rho$ à l'instant τ, alors sa vitesse de propagation radiale à cet instant est égale à :

$$-\frac{\partial e(\tau,\rho)/\partial \tau}{\partial e(\tau,\rho)/\partial \rho}$$

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 4.2 : Puisque $\partial e(\tau,\rho)/\partial\tau > 0$, l'équation $t = e(\tau,\rho)$ se résout par rapport à τ : $\tau = \psi(t,\rho)$, et alors l'instant d'émission t étant fixé, la vitesse de propagation radiale sera donnée par

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\tau}{d\rho}} = \frac{1}{\frac{\partial \psi(t,\rho)}{\partial \rho}}.$$

D'autre part en dérivant l'identité $e(\psi(t,\rho),\rho) \equiv t$ par rapport à ρ, on obtient

$$\frac{\partial e}{\partial \tau}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial e}{\partial \rho} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\partial\psi(t,\rho)/\partial\rho} = -\frac{\partial e(\tau,\rho)/\partial\tau}{\partial e(\tau,\rho)/\partial\rho},$$

ce qui donne l'expression annoncée de la vitesse.

Puisque la vitesse d'avancement des ébranlements doit être positive, la dérivée partielle $\partial e(\tau,\rho)/\partial\rho$ est négative ou nulle. Or, d'après l'identité

$$\frac{\partial e}{\partial \tau}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial e}{\partial \rho} = 0,$$

on a $\partial e/\partial\rho \leq 0$ si et seulement si $\partial\psi/\partial\rho \geq 0$, ce qui est physiquement évident. Cela dit, en vertu de la condition $\partial e(\tau,\rho)/\partial\tau > 0$, la transformation $t = e(\tau,\rho)$ définit un difféomorphisme $\overline{U} \to \overline{U}$ qui transforme la métrique canonique (4.2) en une autre métrique $\Theta(4)$-invariante qui s'obtient en y remplaçant t par $e(\tau,\rho)$:

$$\begin{aligned} ds^2 =& \Big(f_2(\tau,\rho)d\tau + \frac{h_2(\tau,\rho)}{\rho}(xdx)\Big)^2 \\ &- \Big[(\frac{g_2(\tau,\rho)}{\rho})^2 dx^2 + ((l_2(\tau,\rho))^2 - (\frac{g_2(\tau,\rho)}{\rho})^2\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\Big] \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec

$$f_2(\tau,\rho) = f_1(e(\tau,\rho),\rho)\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \tau},$$
$$h_2(\tau,\rho) = f_1(e(\tau,\rho),\rho)\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho} + l_1(e(\tau,\rho),\rho),$$
$$l_2(\tau,\rho) = l_1(e(\tau,\rho),\rho) \quad , \quad g_2(\tau,\rho) = g_1(e(\tau,\rho),\rho).$$

D'après (1.2), les conditions de validité physique de la métrique (5.1) entraînent

$$f_2(\tau,\rho) > 0 \quad , \quad |h_2(\tau,\rho)| \leq l_2(\tau,\rho),$$

ce qui nous donne de nouveau les conditions déjà vues :

$$\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \tau} > 0 \quad , \quad \frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho} \leq 0.$$

Il en résulte en particulier :

$$h_2(\tau,\rho) = -f_1(e(\tau,\rho),\rho)|\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho}| + l_1(e(\tau,\rho),\rho),$$

de sorte que la condition $|h_2(\tau,\rho)| \leq l_2(\tau,\rho)$ est finalement satisfaite si l'on a en outre :

$$f_1(e(\tau,\rho),\rho)|\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho}| - l_1(e(\tau,\rho),\rho) \leq l_1(e(\tau,\rho),\rho)$$

ou, ce qui revient au même,

$$|\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho}| \leq \frac{2l_1(e(\tau,\rho,\rho)}{f_1(e(\tau,\rho),\rho)}.$$

PROPOSITION 5.2. Si la métrique (5.1) est physiquement valable, alors la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels est identique à celle de la lumière émise radialement du bord de la source.

Démonstration. On constate d'abord que les fonctions de propagation de l'ébranlement par rapport aux métriques (4.2) et (5.1) sont identiques. En effet, $t = e(\tau,\rho)$ est par hypothèse, relativement à (4.2), l'instant d'émission de l'ébranlement qui atteint la sphère $||x|| = \rho$ à l'instant τ. D'autre part, puisque la métrique (5.1) est conçue relativement à la coordonnée temporelle τ, la fonction $e(\tau,\rho)$ a la même signification par rapport à (5.1).

Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{-h_2(\tau,\rho) + l_2(\tau,\rho)}{f_2(\tau,\rho)}$$

qui définit le mouvement des photons s'éloignant radialement de la source. Compte tenu des expressions de f_2, h_2, l_2, elle s'écrit :

$$\frac{d\tau}{d\rho} = -\frac{\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho}}{\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \tau}}$$

ou encore

$$\frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial e(\tau,\rho)}{\partial \rho} d\rho = 0,$$

ce qui donne $e(\tau,\rho) = Cte$ et puisque $e(t,\sigma(t)) = t$, $e(\tau,\rho)$ est la fonction de propagation radiale de la lumière par rapport à (5.1). Mais $e(\tau,\rho)$ est aussi la fonction de propagation des ébranlements par rapport à (5.1), d'après ce que nous venons de voir, d'où l'identité des deux fonctions de propagation relativement à (5.1), donc aussi relativement à toute transformée admissible de (5.1).

COROLLAIRE 5.2. Les deux métriques (4.2) et (5.1) sont identiques.

Démonstration. Puisque (5.1) résulte de (4.2) moyennant la transformation $t = e(\tau,\rho)$, on retrouve (4.2) à partir de (5.1) en utilisant la transformation inverse $\tau = \psi(t,\rho)$, de sorte que, par rapport à (4.2), $\psi(t,\rho)$ est l'instant de passage par la sphère $||x|| = \rho$ d'un photon émis radialement à l'instant t. Par conséquent $\psi(t,\rho) = t$, donc aussi $e(\tau,\rho) = \tau = t$, d'où l'identité des deux métriques.

L'hypothèse de la propagation 5.2 s'impose de façon naturelle, et c'est pourquoi nous ne ferons plus de distinction entre les deux fonctions de propagation.

Considérons de nouveau la métrique canonique (4.2) en omettant l'indice 1 pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} ds^2 =& (f(t,\rho)dt + \frac{l(t,\rho)}{\rho}(xdx))^2 \\ &- [(\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2 dx^2 + ((l(t,\rho))^2 - (\frac{g(t,\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nous savons déjà que toute métrique $\Theta(4)$-invariante résulte de (5.2) en y remplaçant t par une fonction de propagation convenablement choisie $\pi(\tau,\rho)$ qui doit satisfaire toujours aux conditions générales

$$\pi(\tau,\sigma(\tau))=\tau \quad , \quad \frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau}>0 \quad , \quad \frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}\leq 0. \tag{5.3}$$

Convenons d'appeler la fonction $\pi(\tau,\rho)$ *universellement valable*, si la métrique qui résulte de (5.2) en y faisant $t=\pi(\tau,\rho)$ est apte à rendre compte de la totalité des effets gravitationnels d'une distribution de matière $\Theta(4)$-invariante. Alors les conditions (5.3) n'étant pas suffisantes pour la validité physique de $\pi(\tau,\rho)$, on est conduit à poser la question suivante :

Est-ce qu'on peut y ajouter des conditions supplémentaires rendant la fonction $\pi(\tau,\rho)$ universellement valable ?

Si l'on impose la condition stricte :

$$\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}=0 \quad \text{quel que soit} \quad (\tau,\rho)\in\overline{U},$$

alors, en vertu de (5.3), on en déduit $\pi(\tau,\rho)\equiv\tau$, c'est-à-dire que l'on retrouve la fonction de propagation associée à la métrique canonique, qui joue un rôle exceptionnel à cause de sa clarté conceptuelle et de sa simplicité. C'est pourquoi on est en droit de croire que $\pi(\tau,\rho)\equiv\tau$ est une fonction de propagation universellement valable. Mais s'il s'agit de conditions n'entraînant pas l'annulation de la dérivée

$$\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}$$

sur $\overline{U}$, il sera plus difficile de présumer la réponse à la question posée. Toutefois le problème soulevé ne peut être abordé de façon adéquate que dans le cadre de la solution générale des équations d'Einstein. Or, puisque le présent article se limite à des résultats généraux valables pour toute métrique $\Theta(4)$-invariante susceptible d'avoir une signification physique indépendamment des déterminations spécifiques du tenseur métrique, nous allons présenter uniquement un petit nombre de conditions nécessaires pour la validité physique d'une fonction de propagation.

Cela dit, nous allons nous occuper surtout des propriétés de $\pi(\tau,\rho)$ pour les grandes valeurs de ρ ou, en d'autres termes, du comportement asymptotique de $\pi(\tau,\rho)$. Celui-ci dépend du comportement asymptotique de la métrique qui est toujours supposée stationnaire et pseudo-euclidienne à "l'infini". En fait la métrique ne peut pas être pseudo-euclidienne à l'infini si elle contient la constante cosmologique, et c'est pourquoi celle-ci sera supposée nulle dans la suite. On sait bien qu'il ne s'agit pas là d'une restriction véritable, car la constante cosmologique n'influe pratiquement pas sur les effets gravitationnels dans une vaste région autour de la source.

L'expression générale de la forme $\Theta(4)$-invariante stationnaire et pseudo-euclidienne dépend de fonctions arbitraires de sorte que le choix de la "métrique à l'infini" n'est pas clair a priori. Dans ce genre de problèmes, on se laisse guidé d'habitude par des considérations de simplicité en restant naturellement dans le cadre de la cohérence logique.

Considérons d'abord la forme générale de la métrique canonique stationnaire et pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = (cdt + \frac{g'(\rho)}{\rho}(xdx))^2 - [(\frac{g(\rho)}{\rho})^2 dx^2 + ((g'(\rho))^2 - (\frac{g(\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}] \tag{5.4}$$

qui dépend d'une fonction arbitraire $g(\rho)$, supposée positive et indéfiniment dérivable.

Est-ce qu'on peut accepter (5.4) comme approximation asymptotique de (5.2) ?

Nous pensons que la réponse est non pour deux raisons :

Premièrement les diverses déterminations possibles de $g(\rho)$ ne sont pas toutes valables physiquement.

Deuxièmement les déterminations de $g(\rho)$ qui sont susceptibles de correspondre à des situations physiques, doivent être définies par des conditions appropriées. En particulier le problème de l'approximation asymptotique se pose aussi pour la métrique (5.4) elle-même.

Cette dernière remarque nous amène à admettre que la métrique spatiale dans (5.4) tend vers la métrique euclidienne dx^2 lorsque $\rho \to +\infty$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{g(\rho)}{\rho} = \lim_{\rho\to+\infty} g'(\rho) = 1,$$

d'où la forme asymptotique :

$$ds^2 = (cdt + \frac{xdx}{\rho})^2 - dx^2 \tag{5.5}$$

qui se rattache directement à la métrique de Minkowski. Notons à ce propos que la valeur c ne représente plus la vitesse de la lumière par rapport à (5.5), mais une constante héritée de cette métrique.

Lorsque la métrique (5.4) est physiquement valable, elle peut être considérée comme première approximation stationnaire et pseudo-euclidienne de (5.2) pour les grandes valeurs de ρ. Nous sommes ainsi amenés à introduire (5.5) comme approximation asymptotique de (5.2), ce qui entraîne

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{f(t,\rho)}{c}=1 \quad , \quad \lim_{\rho\to+\infty} l(t,\rho)=1 \quad , \quad \lim_{\rho\to+\infty}\frac{g(t,\rho)}{\rho}=1,$$

la convergence étant supposée uniforme par rapport à la coordonnée temporelle t, considérée comme paramètre parcourant $\mathbb{R}$. De façon plus précise il faut écrire

$$f(t,\rho)=c+\eta_1(t,\rho) \quad , \quad l(t,\rho)=1+\eta_2(t,\rho) \quad , \quad \frac{g(t,\rho)}{\rho}=1+\eta_3(t,\rho), \tag{5.6}$$

les fonctions $\eta_1(t,\rho),\eta_2(t,\rho),\eta_3(t,\rho)$, ainsi que toutes leurs dérivées tendant uniformément vers zéro lorsque $\rho\to+\infty$.

Venons maintenant au problème de l'approximation asymptotique, par une forme stationnaire pseudo-euclidienne, de la métrique générale

$$\begin{aligned} ds^2 =&\Big(\hat f(\tau,\rho)d\tau+\frac{\hat h(\tau,\rho)}{\rho}(xdx)\Big)^2 \\ &-\Big[(\frac{\hat g(\tau,\rho)}{\rho})^2dx^2+((\hat l(\tau,\rho))^2-(\frac{\hat g(\tau,\rho)}{\rho})^2)\frac{(xdx)^2}{\rho^2}\Big] \end{aligned} \tag{5.7}$$

qui s'obtient en remplaçant t par une fonction de propagation $\pi(\tau,\rho)$ dans (5.2), de sorte que

$$\begin{aligned} \hat f(\tau,\rho)&=f(\pi(\tau,\rho),\rho)\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau}, \\ \hat h(\tau,\rho)&=f(\pi(\tau,\rho),\rho)\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}+l(\pi(\tau,\rho),\rho), \\ \hat l(\tau,\rho)&=l(\pi(\tau,\rho),\rho) \quad , \quad \hat g(\tau,\rho)=g(\pi(\tau,\rho),\rho). \end{aligned}$$

Alors, en vertu de (5.6), on peut écrire

$$f(\pi(\tau,\rho),\rho)=c+\hat\epsilon_1(\tau,\rho) \ \ , \ \ \hat l(\tau,\rho)=1+\hat\epsilon_2(\tau,\rho) \ \ , \ \ \frac{\hat g(\tau,\rho)}{\rho}=1+\hat\epsilon_3(\tau,\rho),$$

les fonctions $\hat{\epsilon}_1(\tau,\rho)$, $\hat{\epsilon}_2(\tau,\rho)$, $\hat{\epsilon}_3(\tau,\rho)$, ainsi que toutes leurs dérivées tendant uniformément vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$.

Or la métrique asymptotique doit être stationnaire et pseudo-euclidienne.

Considérons d'abord la condition de stationnarité. Pour qu'elle soit satisfaite, il faut que les dérivées

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau} \quad , \quad \frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho}$$

soient approximées, pour les grandes valeurs de ρ, par des fonctions de ρ, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau} = \alpha_1(\rho) + \epsilon_1(\tau,\rho) \quad , \quad \frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho} = \alpha_2(\rho) + \epsilon_2(\tau,\rho), \qquad (5.8)$$

les fonctions $\epsilon_1(\tau,\rho), \epsilon_2(\tau,\rho)$, ainsi que toutes leurs dérivées tendant uniformément vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$.

Cela dit, l'introduction de la métrique asymptotique est fondée sur l'hypothèse suivante :

Il existe une valeur positive ρ_1 suffisamment grande telle que, sur la région $\{x \in \mathbb{R}^3 | ||x|| > \rho_1\}$, l'influence des fonctions

$$\hat{\epsilon}_1(\tau,\rho) \quad , \quad \hat{\epsilon}_2(\tau,\rho) \quad , \quad \hat{\epsilon}_3(\tau,\rho) \quad , \quad \epsilon_1(\tau,\rho) \quad , \quad \epsilon_2(\tau,\rho)$$

sur les effets gravitationnels soit négligeable.

Dans ces conditions la métrique générale (5.7) peut être remplacée pratiquement, pour $\rho > \rho_1$, par la forme stationnaire :

$$ds^2 = (c\alpha_1(\rho)d\tau + (1 + c\alpha_2(\rho))\frac{xdx}{\rho})^2 - dx^2 \qquad (5.9)$$

PROPOSITION 5.3. Si le temps propre, par rapport à (5.2), des observateurs très éloignés de la source reste asymptotiquement invariant par l'introduction d'une fonction de propagation $\pi(\tau,\rho)$, alors il existe une valeur $\rho_1 > \sigma(t)$ telle que, pour $\rho > \rho_1$, la métrique générale (5.7) puisse être remplacée physiquement par la forme

$$ds^2 = (cd\tau + (1 - c\alpha(\rho))\frac{xdx}{\rho})^2 - dx^2 \qquad (5.10)$$

$\alpha(\rho)$ étant une fonction indéfiniment dérivable satisfaisant aux conditions

$$0 \leq \alpha(\rho) \leq \frac{2}{c} \quad \text{pour} \quad \rho > \rho_1.$$

Démonstration. Puisque (5.9) est une vraie métrique spatio-temporelle, elle possède la signature requise, de sorte que $\alpha_1(\rho) > 0$. Mais alors, comme le montre un calcul facile, elle est pseudo-euclidienne si et seulement si la fonction $\alpha_1(\rho)$ se réduit à une constante, d'où la condition

$$\alpha_1(\rho) = c_1 = Cte.$$

D'autre part l'hypothèse de l'énoncé signifie que le temps propre relativement à (5.9) reste invariant pour $\rho > \rho_1$, ce qui entraîne $c_1 = 1$.

Finalement si l'on pose $\alpha_2(\rho) = -\alpha(\rho)$ pour $\rho > \rho_1$, la condition générale

$$|h(\tau, \rho)| \leq l(\tau, \rho) \quad \text{(cf (1.2))}$$

s'écrit maintenant $|1 - c\alpha(\rho)| \leq 1$, d'où

$$0 \leq \alpha(\rho) \leq \frac{2}{c}.$$

Nous pensons que l'hypothèse de la proposition précédente s'impose pour des raisons physiques, et c'est pourquoi nous acceptons désormais la métrique (5.10) comme forme asymptotique de toute métrique $\Theta(4)$-invariante susceptible d'avoir une signification physique.

COROLLAIRE 5.3. Le comportement asymptotique, pour $\rho \to +\infty$, de toute fonction de propagation $\pi(\tau, \rho)$ physiquement valable est défini par les conditions :

$$\frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \tau} = 1 + \epsilon_1(\tau, \rho) \quad , \quad \frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \rho} = -\alpha(\rho) + \epsilon_2(\tau, \rho)$$

avec $0 \leq \alpha(\rho) \leq 2/c$ à partir d'une certaine valeur $\rho_1 > \sigma(t)$, les fonctions $\epsilon_1(\tau, \rho)$ et $\epsilon_2(\tau, \rho)$ ainsi que toutes leurs dérivées tendant uniformément vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$.

Cela résulte aussitôt de (5.8), car $\alpha_1(\rho) = 1$ et en outre $\alpha_2(\rho) = -\alpha(\rho)$ pour $\rho > \rho_1$.

L'énoncé précédent nous autorise-t-il à envisager une approximation asymptotique de $\pi(\tau, \rho)$ par la fonction de propagation associée à (5.10) ?

Bien que naturelle à première vue, cette question n'a, à proprement parler, aucun sens. En effet, la métrique (5.10) n'étant pas liée à la source, il n'est pas possible de lui associer une fonction de propagation. Tout ce qu'on peut faire en se basant sur (5.10) est de considérer un processus fictif de propagation radiale de lumière à partir de la sphère $||x|| = \rho_1$ et de lui associer ensuite la fonction de propagation correspondante, à savoir

$$\pi_1(\tau, \rho) = \tau - \int_{\rho_1}^{\rho} \alpha(u)du \quad , \quad \rho \geq \rho_1.$$

Mais on ne saurait affirmer que la différence

$$\pi(\tau, \rho) - \pi_1(\tau, \rho)$$

converge vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$. D'autre part, la valeur ρ_1 n'ayant rien de spécifique, le même raisonnement permet d'associer à (5.10) une telle "fonction de propagation" pour toute valeur fixée $\rho_2 > \rho_1$:

$$\pi_2(\tau, \rho) = \tau - \int_{\rho_2}^{\rho} \alpha(u)du \quad , \quad \rho \geq \rho_2.$$

Or si les fonctions

$$\pi(\tau, \rho) - \pi_1(\tau, \rho) \quad \text{et} \quad \pi(\tau, \rho) - \pi_2(\tau, \rho)$$

tendent toutes les deux vers zéro lorsque $\rho \to +\infty$, il en sera de même de leur différence

$$(\pi(\tau, \rho) - \pi_2(\tau, \rho)) - (\pi(\tau, \rho) - \pi_1(\tau, \rho)) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \alpha(u)du$$

et puisque celle-ci est indépendante de ρ, on aura

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \alpha(u)du = 0,$$

ce qui est possible uniquement lorsque la fonction $\alpha(\rho)$ est identiquement nulle.

Cela dit, bien que les fonctions de la forme $\tau - \psi(\rho)$ ne soient pas utilisables, en général, comme approximations asymptotiques de fonctions de propagation, toutes les fonctions de propagation qui conviennent aux états stationnaires sont globalement de cette forme, comme nous allons l'établir.

Bien entendu, durant un état stationnaire, il n'y a pas de propagation d'ébranlements gravitationnels, mais de toute façon la fonction de propagation est toujours définie par rapport au processus de propagation radiale des photons (ou, mieux, par rapport au processus limite de propagation radiale) et possède en conséquence un sens précis. En fait le rôle de la fonction de propagation ne se borne pas à définir les instants d'émission des ébranlements gravitationnels. Lorsque ceux-ci disparaissent, elle continue toujours d'assurer le lien physique, qui est fondé sur le processus limite de propagation, entre les différents temps locaux par rapport auxquels tout état du champ est conçu.

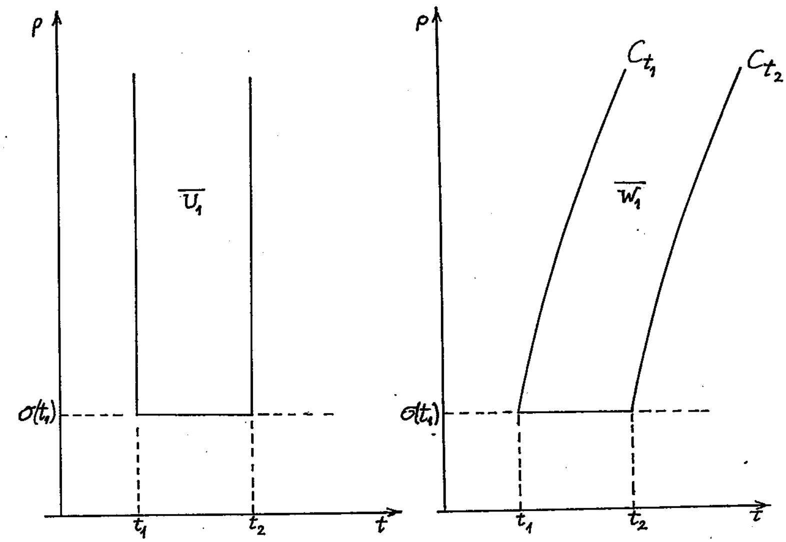

Figure 1.

Pour fixer les idées, rapportons-nous maintenant à la métrique canonique (5.2) et considérons un intervalle maximal de stationnarité $[t_1, t_2]$. Alors

$$\sigma(t) = \sigma(t_1) = \sigma(t_2) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_1, t_2]$$

et en outre les fonctions f, l, g dépendent uniquement de ρ sur le fermé :

$$\overline{U}_1 = \{(t,\rho) \in \mathbb{R}^2 | t_1 \leq t \leq t_2 \quad , \quad \rho \geq \sigma(t_1)\}.$$

Soit $\overline{W}_1$ le transformé de $\overline{U}_1$ par le difféomorphisme défini par une fonction de propagation $t = \pi(\tau,\rho)$ ou, ce qui revient au même, par sa réciproque $\tau = \xi(t,\rho)$. Alors $\overline{W}_1$ est feuilleté par les courbes :

$$C_t = \{(\tau,\rho) \in \mathbb{R}^2 | \tau = \xi(t,\rho) \quad , \quad \rho \geq \sigma(t)\},$$

t parcourant $[t_1, t_2]$, de sorte que, en particulier, sa frontière est la réunion des courbes C_{t_1}, C_{t_2} et du segment $\{(\tau,\rho) \in \mathbb{R}^2 | t_1 \leq \tau \leq t_2 \quad , \quad \rho = \sigma(t_1)\}$.

PROPOSITION 5.4. Soit $[t_1, t_2]$ un intervalle maximal de stationnarité de la métrique canonique (5.2). Alors toute fonction de propagation $\pi(\tau,\rho)$ physiquement valable est telle que sa restriction au fermé $\overline{W}_1$ soit de la forme :

$$\pi(\tau,\rho) = \tau - \psi(\rho),$$

avec $\psi(\sigma(t_1)) = 0$, $\psi'(\rho) \geq 0$ sur $[\sigma(t_1), +\infty[$, et en outre $0 \leq \psi'(\rho) \leq 2/c$ à partir d'une certaine valeur de ρ.

Démonstration. Puisque les fonctions f, l, g dépendent uniquement de ρ lorsque t parcourt $[t_1, t_2]$, la transformation $t = \pi(\tau,\rho)$ ne modifie pas les fonctions l et g qui définissent la métrique spatiale. En ce qui concerne les deux autres fonctions

$$\hat{f}(\tau,\rho) = f(\rho)\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau} \quad , \quad \hat{h}(\tau,\rho) = f(\rho)\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho} + l(\rho),$$

elles dépendent de τ si les dérivées partielles

$$\frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\tau} \quad , \quad \frac{\partial\pi(\tau,\rho)}{\partial\rho}$$

en font autant. Alors les observateurs sur chaque sphère $||x|| = \rho > \sigma(t_1)$ constatent l'existence d'un champ non stationnaire lorsque τ parcourt l'intervalle

$$[\xi(t_1,\rho), \xi(t_2,\rho)].$$

Or les états stationnaires du champ dans le référentiel *matériel* considéré, qui est défini par la source stationnaire elle-même, c'est-à-dire par une source n'émettant pas d'ébranlements gravitationnels pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, sont des états objectifs, de sorte qu'il n'est pas concevable *physiquement* de pouvoir les transformer en états dynamiques en jouant sur le choix de la fonction de propagation. C'est pourquoi les dérivées partielles en question doivent être indépendantes de τ, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau} = \psi_1(\rho) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho} = \psi_2(\rho) \quad \text{sur} \quad \overline{W}_1.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau}\right) = \psi_1'(\rho) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho}\right) = 0,$$

d'où $\psi_1(\rho) = c_1 = Cte$. D'autre part, d'après la proposition 5.3, les fonctions $\hat{f}(\tau,\rho)$ et $f(\rho)$ tendent toutes les deux vers c lorsque $\rho \to +\infty$, de sorte que l'on a identiquement

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \tau} = 1,$$

ce qui donne :

$$\pi(\tau,\rho) = \tau - \psi(\rho)$$

avec $\psi'(\rho) \geq 0$ en vertu de la condition générale

$$\frac{\partial \pi(\tau,\rho)}{\partial \rho} \leq 0.$$

En ce qui concerne la condition $\psi(\sigma(t_1)) = 0$, elle résulte de l'identité

$$\pi(t, \sigma(t)) \equiv t.$$

Finalement, d'après la proposition 5.3, on a

$$\psi'(\rho) \leq \frac{2}{c}$$

à partir d'une certaine valeur de ρ.

REMARQUE. Une détermination particulière de $\psi(\rho)$ s'obtient en prenant :

$$\psi'(\rho) = \frac{l(\rho)}{f(\rho)} \quad , \qquad \text{ce qui donne} \quad \psi(\rho) = \int_{\sigma(t_1)}^{\rho} \frac{l(u)}{f(u)} du.$$

Alors :

$$\hat{h}(\rho) = f(\rho)\frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \rho} + l(\rho) = 0,$$

de sorte que la métrique stationnaire qui en résulte est statique. Selon L. Landau et E. Lifchitz [1], celle-ci permet la synchronisation des horloges.

Cependant dans le cas général où l'on a affaire à un état dynamique du champ gravitationnel, on ne peut pas définir une fonction de propagation $\pi(\tau, \rho)$ telle que la fonction

$$\hat{h}(\tau, \rho) = f(\tau, \rho)\frac{\partial \pi(\tau, \rho)}{\partial \rho} + l(\tau, \rho)$$

soit partout nulle. La synchronisation des horloges est alors impossible.

Références

[1] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Moscou, 1970.

[2] N. Stavroulakis, *Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale (deuxième partie)*, Ann. Fond. L. de Broglie, vol. 13, n° 1, pp. 7-42 (Errata : Page 15, ligne 9, au lieu de : $f(\xi(t, \rho), \rho)$, écrire :

$$f(\xi(t, \rho), \rho)\frac{\partial \xi(t, \rho)}{\partial t}.$$

Page 15, ligne 21, au lieu de : marquée, écrire : marqué. Page 25, ligne 14, au lieu de : sont nulles, écrire : sont non nulles. Page 36, 1ère ligne, écrire $1/c$ avant l'intégrale triple).

[3] J.L. Synge, Annali di Matematica pura ed applicata, **98**, 239-55, 1974.

(Manuscrit reçu le 4 mars 1993)