Variables aléatoires à valeurs ± 1, paramètres cachés et séparabilité en physique quantique

A. Tortrat

Laboratoire de probabilités,
Université Paris VI, Place Jussieu, Paris*

RÉSUMÉ. Nous essayons de clarifier, d'un point de vue essentiellement probabiliste, ces deux questions de physique quantique, à travers quelques uns des très nombreux travaux les concernant, de 1935 à 1984.

ABSTRACT. We try to clarify, from a probabilistic point of view, the two questions of hidden variables and separability in quantum physics, surveying some of the numerous papers with regard to these between 1935 and 1984.

1. *Lemme 1* Soient X, Y, Z trois variables aléatoires (v.a.) à valeurs ± 1. Par définition, elles représentent trois grandeurs simultanément *définies* par un état ω décrivant un espace Ω muni d'une probabilité P (en fait on peut réduire Ω à un Ω_0 à huit points, P étant transportée sur cet espace réduit). Alors

i) les nombres $p = P\{YZ = 1\}$, $q = P(ZX = 1)$, $r = P(XY = 1)$ vérifient les quatre relations suivantes

$$|p-q| \leq \overline{r} \stackrel{\text{def}}{=} 1-r \quad , \quad |q-r| \leq \overline{p} \quad , \quad |r-p| \leq \overline{q} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow p+q \leq r+1 \quad , \quad q+r \leq p+1 \quad , \quad r+p \leq q+1 \tag{2}$$

$$\text{et} \quad p+q+r \geq 1 \tag{3}$$

Deux des relations (1) impliquent la 3ème, car elles assurent (2).

* Adresse personnelle: 85 rue de Paris, F-92190 Meudon.

ii) Inversement si les nombres ≥ 0 et $\leq 1, p, q, r$, qui ne concernent que les lois [1] des couples $(X,Y),(Y,Z)$ et (Z,X), vérifient (1) et (3), il existe une loi P sur Ω_0 (i.e. une loi conjointe pour X,Y,Z), et on peut supposer que les trois lois des couples susdits sont symétriques p.r. à 0 :

$$P(X=Y=1)=P(X=Y=-1)=r/2$$

de même avec $\overline{r}/2$, ... (six égalités). C'est en particulier imposer des moyennes $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}\,Y, \mathbf{E}\,Z$ nulles, et les lois des couples définies par p,q,r. P est unique (et existe) si on lui impose d'être symétrique (p.r. à 0), sinon elle peut conserver un degré de liberté.

iii) Puisque $\mathbf{E}\,XY$ (moyenne de XY) égale $2r-1$, les inégalités (1) s'expriment aussi

$$(\mathbf{E}\,XY - \mathbf{E}\,XZ) \leq 1 - \mathbf{E}\,YZ \ldots \tag{4}$$

C'est la forme qu'utilise Bell dans [1], mais exprimée en termes de trois covariances (mesurables par approche statistique), telle $-\mathbf{E}\,XY = \mathbf{E}\,\overline{A}_1\overline{B}_2$ écrite $P(a,b)$, a et b désignant les vecteurs de réglage d'appareils (de Stern Gerlach) de mesure de composantes de spin de deux particules d'un même couple (cf. 2.3 ci-après).

Dans le cas des couples symétriques, (2) sous la forme

$$\frac{r}{2} \leq \frac{\overline{p}}{2} + \frac{q}{2} \tag{4'}$$

est utilisée dans [10], avec $\overline{p}/2 = P(Y=1, Z=-1) \ldots$. Les identifications de [1] sont les mêmes que celles de [10] (cf. 2.3 et 4.3 ci-après).

Preuve de (3). Puisque $S = XY + YZ + ZX$ prend une valeur < 0 (alors $= -1$) seulement quand un terme de S est < 0, et qu'il y en a alors exactement deux tels, $\mathbf{E}\,S \geq -1$ est évident et $\mathbf{E}\,S = 2(p+q+r)-3$ assure (3).

La preuve de (4) (donc celle de (1)) est celle de Bell. Notons que le calcul était bien effectué sur trois fonctions $A(a,\lambda), A(b,\lambda), A(c,\lambda)$ homologues (avec λ pour ω) de nos trois $X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)$:

$$\mathbf{E}\,XY - \mathbf{E}\,XZ = \mathbf{E}\,XY - \mathbf{E}\,XZY^2 = \mathbf{E}\,XY(1-ZY) \quad ,$$

[1] Loi égale, en abrégé, loi de probabilité. Nous utiliserons ce mot loi (cf. le paragraphe 2) au pluriel, pour des lois diverses et partielles, dérivant ou non d'une probabilité P qui, elle, est globale et unique.

$$\text{en module} \quad \leq \mathbf{E}\,(1 - YZ) = 1 - \mathbf{E}\,YZ$$

Preuve de ii) Notons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les $P\{Z = 1|.\}$ conditionnées par les évènements $(X = Y = 1), (X = 1, Y = -1), (X = -1, Y = 1), (X = Y = -1)$, respectivement de probabilités $r/2$ pour les extrêmes, $\overline{r}/2$ pour les deux autres.

La loi du triplet, ainsi définie, doit vérifier que les couples (X, Z) et (Y, Z) ont bien les lois symétriques définies par q et p. On obtient de suite (les (1), ...(5) sont propres à cette preuve)

$$q = r\alpha + \overline{r}\beta \quad , \quad p = r\alpha + \overline{r}\gamma \tag{1}$$

$$\text{et} \quad q = \overline{r\gamma} + r\overline{\delta} \quad , \quad p = \overline{r}\beta + r\delta \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow (1) \quad \text{et} \quad r(\alpha + \delta) + \overline{r}(\beta + \gamma) = 1. \tag{3}$$

Il est licite pour cette preuve (permutant X et Y) de supposer $q \leq p$. Il est nécessaire que

$$\overline{r}\beta = q - r\alpha \quad \text{et} \quad \overline{r}\gamma = p - r\alpha \in [0, r], \quad \text{soit}$$

$$p - \overline{r} \leq r\alpha \leq q \quad \text{et} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{4}$$

L'hypothèse $0 \leq p - q \leq \overline{r}$ implique $p - \overline{r} \leq q$ et assure une solution au moins à (4). Faut-il encore que celle-ci assure

$$r\delta = 1 - \overline{r}(\beta + \gamma) - r\alpha = 1 - (p + q - 2r\alpha) = r\alpha + 1 - (p + q) \in [0, r], \tag{5}$$

soit en tout ((4) et (5))

$$(p + r - 1) \wedge (p + q - 1) \leq r\alpha \leq q \wedge (p + q + r - 1) \quad , \qquad \text{et} \quad 0 \leq r\alpha \leq r.$$

Si $q \leq r$ c'est $p + r - 1 \leq q$ et $p + q + r - 1$, et la plus petite valeur de $r\alpha$ est 0 ou $p + r - 1 \leq r$,
Si $q \geq r$ c'est $p + q - 1 \leq q$ et $p + q + r - 1$, et la plus petite valeur de $r\alpha$ est $\leq r$ *si* $p + q \leq r + 1$.

La preuve sera complète si nous constatons que la solution symétrique dans l'espace existe, unique, car c'est $\alpha = \overline{\delta}$, $\beta = \overline{\gamma}$. Or $\alpha + \delta = 1$ implique $\beta + \gamma = 1$, et $p + q = 2r\alpha + \overline{r}$, donc $\alpha = (p + q + r - 1)/2r \leq 1$, vu $p + q \leq r + 1$. Alors les ensembles $X = 1$ et $X = -1$ se correspondent par cette symétrie, d'où $\mathbf{E}\,X = \mathbf{E}\,Y = \mathbf{E}\,Z = 0$.

Lemme 2 (cf.[8],[14]). Prenant quatre v.a. X, X', Y, Y' avec X', Y' homologues de $A(a', \lambda), A(b', \lambda)$, et posant

$$S = X(Y - Y') + X'(Y + Y')$$

On a, (5') étant un renforcement de (5) (Clauser et associés dans [8])

$$|\mathbf{E}\, X(Y - Y')| + |\mathbf{E}\, X'(Y + Y')| \leq 2$$

donc
$$|\mathbf{E}\, S| \leq 2 \tag{5}$$

Preuve.

$$|\mathbf{E}\, X(Y - Y')| \leq 2P(YY' = -1) \quad \text{car} \quad X(Y - Y') = 0 \quad \text{si} \quad YY' = 1.$$

De même $|\mathbf{E}\, X'(Y + Y')| \leq 2P(YY' = 1)$, et on a bien le membre de gauche de (5') ≤ 2.

2. Toute la longue controverse que nous voudrions ici réduire (partiellement) à sa plus simple expression, concerne des dérivations de (4) et (5) par des substitutions souvent mal explicitées, concernant de subtiles et complexes expériences de mécanique quantique (M.Q.).

2.1. Nous parlerons maintenant, au lieu de $X, Y, Z, \ldots$, de grandeurs physiques à valeurs réelles (d'un certain système S) notées $A, B, \ldots, A_i$ ou R, *simultanément définies* par l'état ω de S, et dites "grandeurs au sens de la physique classique".

Ces grandeurs dont les valeurs simultanées définissent ω sont dites des paramètres cachés (car les mesures habituelles ne les atteignent pas). ω est un "collectif d'individus à caractéristiques bien déterminées" ([4] p.13), ou (p.27) "les individus sont sans dispersion pour toutes les grandeurs qui les caractérisent", "les dispersions n'apparaissent que pour le collectif dans son ensemble". Louis de Broglie appelle les ω des états élémentaires. Il est clair qu'il faut adjoindre à Ω, une probabilité P, jouant le même rôle qu'en mécanique classique quand une telle "loi du hasard" résulte de l'impossibilité de connaître tous les paramètres des particules élémentaires. P, qui dépend en général du temps est associé à la fonction d'onde $\varphi(t)$ ci-après.

La mesure éventuelle de ces grandeurs regarde la M.Q. Ces mesures sont difficiles à manier car souvent on ne peut en ajouter deux (même si cela a un sens en physique classique). Nous les noterons $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$ quand il s'agit des grandeurs $A, B, \ldots$. Elles sont associées à des opérateurs linéaires hermitiques $\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots$, définis et à valeurs dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ [2] des fonctions à valeurs complexes des coordonnées spatiales $q_1, \ldots q_k$ (des éléments de S) de carré du module intégrable p.r. à l'élément de volume dv de $\prod_1^K R_k$ ($R =$ droite réelle). L'état de S n'est plus ω, mais un élément φ de $\mathcal{H}$, dit fonction d'onde de S, et évoluant avec le temps suivant l'équation de Schrö dinger. On a $||\varphi|| = 1$ et $|\varphi|^2$ est la densité de probabilité de ces variables d'espace (p.r. à dv).

Notons provisoirement $\Omega_0 = \prod_1^K R_k$ l'espace dit "de configuration", muni de sa loi $|\varphi|^2 dv$. Aux coordonnées q_k correspondent les opérateurs $\psi \to q_k\psi$ définis sur une partie dense de $\mathcal{H}$. Ils n'ont pas de spectre discret (cf. ci-après) et la théorie quantique leur attribue, comme à toute autre grandeur $\overline{A}$, une loi dans R, image de $|\varphi|^2 dv$ pour l'application $\omega_0 \to q_k(\omega_0)$. Ces opérateurs commutent entre eux, trivialement, comme les grandeurs correspondantes fonctions de ω_0.

L'hypothèse d'existence d'états élémentaires ω, *plus fins* que ω_0 (clairement ω s'applique sur ω_0) répond, en particulier, au désir d'étendre cette commutativité à toutes les grandeurs (de pouvoir prendre l'intersection de deux évènements $\overline{A} \in \Delta$, $\overline{B} \in \Delta'$, Δ, Δ' intervalles de R, par exemple). Cela est impossible avec les $\overline{A}$ associés aux opérateurs $\tilde{A}$. C'est pourquoi, *par convention* (essentielle) nous éviterons de parler de probabilité pour le cadre quantique. $\tilde{A}$ définit la loi ou répartition des valeurs possibles de $\overline{A}$, lors d'une mesure.

Pour une grandeur quantifiée, ce sont les valeurs propres a_n de $\tilde{A}$: il existe une base – orthonormée – $\{\varphi_i\}$ de $\mathcal{H}$, telle que $\tilde{A}\varphi_i = a_i\varphi_i$ (a_i réels, avec répétitions possibles) et aux a_i sont attachés des poids $|c_i|^2$ avec $\varphi = \sum_1^\infty c_i\varphi_i$.

Pour une grandeur telle que $\overline{Q}_k$ (avec l'opérateur multiplicatif $\tilde{K}_k$ susdit), à spectre continu, on n'a connaissance, avant une mesure que de la densité image de $|\varphi|^2 dv$ dite ci-dessus. Une mesure effective modifiera l'état quantique φ, comme pour une grandeur quantifiée pour laquelle φ devient un des φ_i (si les valeurs propres correspondantes sont toutes distinctes).

---

[2] $\mathcal{H}$ peut ne pas être ainsi défini, ce qui demeure ce sont les "opérateurs hilbertiens" associés aux composantes de spin (à valeyrs ± 1), seules grandeurs physiques considérées dans la suite de ce § 2.

Ainsi on ne connaît que des lois, dans R, ou dans R^I s'il s'agit de la représentation de I valeurs $\overline{A}_i$ simultanément mesurables, c.a.d. si les opérateurs $\tilde{A}_i$ commutant deux à deux. Alors il existe un opérateur $\tilde{R}$ attaché à ce groupe $\{\tilde{A}_i\}$, tel que $\tilde{A}_i = f_i(\tilde{R})$. Une telle fonction de $\tilde{R}$ est définie par la "décomposition" de l'unité de R (cf.[15],p.125). C'est dire que si les lois conjointes des $(\overline{A}_i, \overline{A}_j)$ existent, celle de $\{\overline{A}_i\}$ dans $\prod_1^I R_i$ existe.

Dans [15], Von Neumann nous garde bien de parler de $\overline{A}+\overline{B}$ si $\tilde{A}\tilde{B} \neq \tilde{B}\tilde{A}$, bien que $\tilde{A} + \tilde{B}$ soit toujours défini, ait un sens comme opérateur, hermitique. Nous pourrions dire que $\tilde{A} + \tilde{B}$ est attaché à la grandeur $A+B$ qui existe par définition (si elle a un *sens* physique), sans que cela nous serve à rien, $\overline{A+B}$, définie par $\tilde{A}+\tilde{B}$ n'ayant pas de lien avec $\overline{A}+\overline{B}$. On ne peut en particulier ajouter les "espérances mathématiques" de ces grandeurs, donner un sens à $\mathbf{E}\,(\overline{A}+\overline{B}) = \mathbf{E}\,\overline{A} + \mathbf{E}\,\overline{B}$, on doit s'interdire cette écriture, le couple $(\overline{A}, \overline{B})$ n'ayant pas de loi.

Les probabilistes ont l'habitude de bâtir toute théorie, ou tout problème, sur un espace (Ω, P) en un certain sens unique. P définit en tout cas un seul opérateur $PX = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$ (ou $\int XdP$) sur les éléments X intégrables, tels les fonctions 1_E indicatrices d'un évènement E, partie de Ω.

Par contre nous utiliserons la notation $\mathbf{E}\,(.)$ de la moyenne $\mathbf{E}\,A = \int A(\omega)dP$ de la grandeur A, aussi pour $\overline{A}$, par exemple $\mathbf{E}\,\overline{A} = \sum |c_i|^2 a_i$. L'écriture $\mathbf{E}\,(\overline{A}+\overline{B}) = \mathbf{E}\,\overline{A} + \mathbf{E}\,\overline{B}$ a un sens si la loi du couple $(\overline{A}, \overline{B})$ existe, mais on ne pourra écrire

$$\mathbf{E}\,\overline{AC} + \mathbf{E}\,\overline{BC} = \mathbf{E}\,\overline{C}(\overline{A}+\overline{B}) \quad (\text{par exemple } 0 \text{ si } \quad \overline{A}+\overline{B} = 0),$$

si un des couples $(\overline{A}, \overline{C}), (\overline{B}, \overline{C})$ est illicite. Sinon on a vu que la loi du triplet $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ existe.

La séparation de A et $\overline{A}$ qui (à notre connaissance) n'est jamais faite, est *la clef des confusions* et débats que nous allons examiner très concrètement.

Il nous semble que les différences mathématiques et de signification physique ($A(\omega)$ est l'effet d'un postulat, d'un désir, d'une idéalisation) qui viennent d'être explicitées justifient amplement cette séparation, tandis que la physique classique pouvait mieux, identifier une grandeur et sa mesure.

Remarques. P est ce que Louis de Broglie (p.12 de [4]) appelle probabilité objective (et cachée, p.13 de [7]). Les probabilités actuelles et prévues de ce même [7] ne sont que des probabilités partielles. La première correspond à la modification de l'état φ par la mise en place d'un appareil de mesure des impulsions qui sépare des trains d'ondes. Avant cette mise en place, les lois quantiques, calculables, étaient "prévues", non encore "actuelles".

Comme pour toute v.a., $\overline{A}$ désigne aussi bien le résultat (aléatoire) d'une mesure de A, que la mesure "potentielle", avant qu'elle soit effectuée, c'est-à-dire une loi de répartition. Le terme de v.a. ne fait pas référence à un Ω global, seulement à la loi (ou répartition) de $\overline{A}$ dans R. Dans le cas d'un couple commutant $(\overline{A}, \overline{B})$, raisonnant sur la loi conjointe, nous n'aurons pas à envisager les changements d'état que provoquent des mesures, même pour considérer des lois conditionnelles telles que $(\overline{B}|\overline{A} = a)$.

2.2. Liens possibles entre P et les diverses lois quantiques

Concernant des grandeurs spatiales, la séparation de A et $\overline{A}$ pourrait ne pas s'imposer, n'apparaître que comme une réduction de l'espace de base de ces v.a., puisque, on l'a noté, Ω s'applique sur Ω_0 et que $\overline{A}$ peut être considérée comme une v.a. sur Ω_0 : fonction de ω_0 avec $A(\omega) = \overline{A}(\omega_0)$. Ce serait une représentation de la v.a. $\overline{A}$ dite à la remarque 2.1, sous son 1er aspect, la mesure "potentielle" de A. Alors égaler $|\varphi|^2 dv$ et l'image de $P(d\omega)$ paraît s'imposer, en particulier nous aurions $\mathbf{E}\, A = \mathbf{E}\, \overline{A}$.

Lemme. Supposer $\mathbf{E}\, A = \mathbf{E}\, \overline{A}$ pour une grandeur A et ses puissances A^n (posant $\overline{A}^n = \overline{A^n}$), implique

$$A \overset{\text{loi}}{=} \overline{A};$$

la loi de A est identique à celle de $\overline{A}$.

Preuve. On a alors

$$\mathbf{E}\, e^{itA} = \mathbf{E}\, e^{it\overline{A}},$$

pour la grandeur $\sum_0^\infty (itA)^n/n!$. On sait que t réel variant, cela équivaut à $A \overset{\text{loi}}{=} \overline{A}$.

Supposons maintenant que $\mathbf{E}\, A = \mathbf{E}\, \overline{A}$ (donc $A \overset{\text{loi}}{=} \overline{A}$) vaille pour toute A_i d'un ensemble $\{A_i\}$ de grandeurs commutant entre elles (: $\tilde{A}_i \tilde{A}_j = \tilde{A}_j \tilde{A}_i$). Suivant la propriété $\tilde{A}_i = f_i(\tilde{R})$ rappelée ci-dessus, pour un opérateur $\tilde{R}$ que nous incluons dans le groupe, on a, vu le lemme,

$$A_i \overset{\text{loi}}{=} f_i(\overline{R}) \overset{\text{loi}}{=} f_i(R).$$

Il est naturel de supposer que $A_i = f_i(R)$ prolonge l'égalité $\overline{A}_i = f_i(\overline{R})$ (comme pour $f(R) = R^n$), car une mesure remplaçant l'état φ par une fonction propre ψ de valeur propre r pour $\tilde{R}$, et commune à tous les $\tilde{A}_i$, donne des valeurs certaines $f_i(r)$ à toutes les $\overline{A}_i$. C'est dire que P, en ce qui concerne les seules v.a. A_i, égale la loi conjointe des $\overline{A}_i$, et qui en particulier, on a alors, comme hypothèse

$$\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A} \Rightarrow (A, B) \stackrel{\text{loi}}{=} (\overline{A}, \overline{B})$$

et

$$\mathbf{E}\, AB = \mathbf{E}\, \overline{A}\, \overline{B} \tag{6}$$

C'est cette hypothèse (minimale) (6) que nous devrons ajouter à l'hypothèse du "modèle caché", pour un type de confrontation à l'expérience, celui qui teste les inégalités (4) et (5) de Bell (transcrites en 2.3 et 2.4 ci-après), avec un résultat négatif. Notons que nous avons implicitement supposé que les valeurs possibles de A et $\overline{A}$ sont (globalement) les mêmes (:± 1 dans ce qui suit), mais pas nécessairement les lois.

2.3. La 1ère inégalité de Bell ([1], 1964)

Pour l'aspect général et historique d'un problème qui remonte à Einstein (1935), cf.[14] p.63-65. Pour une analyse critique, cf. entre autres G. Lochak dans [9],[11],[12],[13].

Einstein a imaginé une situation qu'on a su réaliser depuis : une fonction d'onde unique régit un couple de deux particules identiques qui ont interagi antérieurement, et s'éloignent l'une de l'autre dans des directions opposées. Le ω supposé est destiné à expliquer que le spin total puisse rester nul, par exemple $\overline{A}_1 + \overline{B}_2 \stackrel{\text{loi}}{=} 0$ pour $a = b$ et la covariance $-\cos\theta$ ci-après. En 2.5 nous évoquerons timidement les interprétations, peu claires ou trop difficiles pour nous, attachées à ces expériences.

L'appareil de mesure ne donne que le signe des composantes de spin, que Bell note $\sigma_1 \cdot a$ et $\sigma_2 \cdot b$, d'où les v.a. égales à ± 1. L'inégalité est la transcription de (4) sous la forme

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c). \tag{4}$$

Elle concerne (cf.II de [1]) un couple de fermions de spin 1/2, tels les protons, cas pour lequel le calcul quantique ($\overline{A} = sign\sigma_1 \cdot a$, v.a. relative à la particule qui passe dans le 1er appareil, réglé sur a, $\overline{B}_2$ relatif à la 2ème) donne

$$P(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\, \overline{A}_1\overline{B}_2 = -\cos\theta \quad , \quad \theta = (\widehat{a,b}).$$

Alors $P(a,c) = \mathbf{E}\, \overline{A}_1\overline{C}_2$ et $P(b,c)$ doivent être entendus comme relatifs à des couples indépendants entre eux et du premier.

D'emblée, dans sa 1ère preuve (formules (2) et (14) de [1]), Bell écrit (nous transcrivons avec nos notations qui attachent B à b et non à la 2ème particule)

$$P(a,b) \stackrel{(*)}{=} \int A_1(\omega)B_2(\omega)dP \stackrel{(**)}{=} -\int A_1(\omega)B_1(\omega)dP.$$

C'est cette relation $(**)$ qui ramène $P(a,b)$ à deux fonctions de la seule 1ère particule, les v.a. $X = A_1$, $Y = B_1$, d'où la preuve donnée au lemme 1.1., qui est parfaitement claire. On pourrait aussi bien prendre $X = A_1$, $Y = B_1$, $Z = C_2$. Alors on n'utiliserait $(**)$ que pour le couple (a,b) au lieu des trois, mais Ω concernerait les deux particules d'un couple. Bell justifie $\overline{B}_1 + \overline{B}_2 = 0$ (p.s., sans $^-$ pour lui) par $\theta = 0 \Rightarrow \mathbf{E}\, \overline{B}_1\overline{B}_2 = -1$ donc $\overline{B}_1\overline{B}_2 = -1$ p.s.

Page 175 de [11], comme page 17 de [9], l'auteur a beau jeu de dénoncer (*), car à gauche figure la covariance quantique[3], relative à la loi du couple $(\overline{A}_1, \overline{B}_2)$, et à droite celle relative au modèle caché. Il est donc clair que (4) repose sur deux hypothèses minimales (suffisantes) : ce modèle caché, et l'égalité (6). (6) assure $(*)$ et aussi $(**)$, car implique $\mathbf{E}\, B_1B_2 = -1$ également. Faute de distinguer les $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$, des $A, B, \ldots$, l'écriture $\int A_1B_2dP$ entendue comme $\mathbf{E}\, \overline{A}_1\overline{B}_2$ s'expose au reproche d'utiliser la "loi statistique cachée", et la relation $(**)$ à celui que $\overline{A}_1, \overline{B}_1$ ont une loi simultanée, niant les inégalités de Heisenberg. Trois autres auteurs (cf.[9]), Fine, Accardi et Suppes, indépendamment, sont arrivés à la même conclusion ; comme conséquence de (4). Nous ne pensons pas, ainsi, *si l'on veut bien corriger* la confusion commune, à notre connaissance, à tous les auteurs, des A et $\overline{A}$.

Les expériences ont infirmé (4). Elles ont un aspect statistique, de "mesure approchée" des $P(a,b), P(b,c), P(a,c)$, par trois séries d'épreuves indépendantes (réalisées avec les couples $(a,b), (b,c), (a,c)$).

---

[3] Au sens strict $COV(A,B)$ désigne la moyenne du produit $(A - \mathbf{E}\, A)(B - \mathbf{E}\, B)$ des v.a. centrées. Dans la suite (sauf en 4.1 et 4.2) on aura toujours $\mathbf{E}\, A = \mathbf{E}\, B = 0$, donc $COV(A,B) = \mathbf{E}\, AB$.

Mais les trois covariances *doivent* être celles d'une même épreuve, ce qui n'a de sens que *par le modèle caché*, pour éviter de supposer une loi commune au triplet $(\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{C}_2)$ attaché à un seul couple.

Ces expériences ne sont pas simples, car il faut éliminer les éléments parasites que sont des coïncidences de valeurs mesurées par les deux appareils et qui ne sont pas celles d'un même couple (ici de protons). Pour des photons, cf. par exemple la référence 9. de [11].

2.4. La deuxième "inégalité de Bell" ([8], 1969, [14]).

Elle présente pour nous l'intérêt d'éviter la relation $(**)$ ci-dessus.

Considérons en effet l'espace Ω des couples $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, avec les grandeurs A et $A'(\omega_1)$, B et $B'(\omega_2)$, et ω_1, ω_2 équiprobables. Puisque (5) et (5') du lemme 1.2 ne contiennent pas les produits XX', YY' interdits, pour représenter $\mathbf{E}\,\overline{AA}'$, $\mathbf{E}\,\overline{BB}'$, (6) donne

$$|P(a,b) - P(a,b') + P(a',b) - P(a',b')| \leq 2, \tag{5}$$

conséquence de

$$|P(a,b) - P(a,b')| + |P(a',b') - P(a',b)| \leq 2, \tag{5'}$$

Ces inégalités ont été infirmées avec des couples de photons (alors $\mathbf{E}\,\overline{A}_1\overline{B}_2 = \cos 2\theta$, $\theta = (\widehat{a,b})$), cf. [0],[14]p. 65). Nous n'expliciterons pas la signification de "spin total nul", dans ce cas, où $\theta = 0$ implique $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$ p.s. Concluons :

Théorème. Il n'existe pas de modèle à paramètres cachés qui respecte les covariances de la M.Q., i.e. respecte (6), pour un système S comportant des couples de particules de spin total nul, du type testé par les expériences qui ont infirmé (4) ou (5).

2.5. La séparabilité

Cette notion concerne les couples susdits et signifie que "the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past" (cf. introduction of [1]). Mais Bell appelle cette notion telle que transcrite ici "locality" et paraît identifier les deux vocables dans "such a separability or locality requirement" deux lignes plus loin.

Dans [12], la localité (du modèle de Bell), définie par “measurement performed on one not affect a measurement performed on the other” dans [11] et par “sans action a distance” dans [12] (p.87), paraît distinguée de la séparabilité ainsi précisée dans [12] (p.88) “L'expérience voit sur ces couples de photons des phénomènes séparés, le fait de la corrélation remarquable entre les propriétés des deux faisceaux ne permet aucunement d'enregistrer une influence sur l'un des faisceaux exercée par les mesures effectuées sur l'autre”. Dans [10], p.45, la séparabilité est assimilée à l'absence d'action à distance entre deux parties d'un système, qui, après interaction, sont suffisamment éloignées.

L'existence de ω, nous l'avons dit en 2.3, pour Einstein, expliquerait le lien absolu de $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$ lorsque $\overline{B}_1 + \overline{B}_2 = 0$ p.s., si grande soit la distance qui sépare les deux particules (ω variant avec la valeur mesurée $\overline{B}_1$). Il nous semble paradoxal de donner une réalité physique à ω (qui va réunir au moins A_1, B_1, A_2, B_2), tout en l'associant à des mesures quantiques, aléatoires par essence, *mais sans* espace global à Ω. D'où notre séparation des A et $\overline{A}$.

Même si un modèle caché concret existe dans certains cas (cf.[3],[9] p. 19-23), il paraît admis qu'il donnera vie à une loi cachée pour le couple (A, B), que celle-ci vérifie (6) ou non. Ainsi, comme en mécanique classique pour une indétermination sur l'état initial, ou on considère seulement l'espace global (Ω, P) –ou la loi partielle $(\overline{A}_1, \overline{B}_2)$, et doit raisonner en termes de lois et covariances, adopter un point de vue purement probabiliste, ou on considère les divers états ω, avec l'apparence de séparabilité : les grandeurs $A_1(\omega), B_2(\omega)$ sont liées par ω lui-même, mais, étant certaines il n'y a pas à parler d'influence de l'une sur l'autre (elles sont indépendantes pour la loi $\delta(\omega)$). ω explique un éventuel $\mathbf{E}\ AB \neq 0$, selon le vœu d'Einstein.

De même pour Bell, ω établit la localité, l'indépendance de A_1 et B_2, dans la mesure où on individualise et fixe ω. Au contraire le point de vue probabiliste s'exprime ainsi :

Lemme. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ayant une loi simultanée, si une mesure de $\overline{A}$ donne la valeur propre a_i, transformant alors l'état φ en une fonction propre φ_i commune à $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, on sait que $\overline{B}$ a la loi conditionnelle de $(\overline{B}|\overline{A} = a_i)$. Nous identifions la séparabilité à l'indépendance de cette loi p.r. à a_i : la loi de $(\overline{A}, \overline{B})$ est alors le produit des lois (dites marginales) de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. En particulier $\mathbf{E}\ \overline{AB} = \mathbf{E}\ \overline{A}\mathbf{E}\ \overline{B}$ est une condition nécessaire de cette séparabilité.

N'est-ce pas le problème des "mesures possibles" qui est en jeu ? Tant que celles-ci sont aléatoires, comme les $\overline{A}$, ou les A considérées *seulement* comme v.a., il y a un mystère fondamental de non séparabilité, qui s'ajoute à celui du caractère aléatoire des $\overline{A}$. Cependant pour A et B vraies v.a., ω existant dissipe le mystère.

Sans doute faut-il aller bien au dela, suivant les p. 49-51 de [10], ce que nous ne saurions faire. Bernard d'Espagnat dit "la mystérieuse 'indivisibilité' d'un tout (Rosenfeld, Bohr) ne peut être qu'une notion très voisine de la non séparabilité, sinon même être identique à elle". Puis "c'est bien là une indivisibilité fondamentale, elle ne s'identifie pas totalement à la non séparabilité ci-dessus définie ...".

Ainsi, en ce qui concerne les $\overline{A}$, nous adoptons le point de vue de "l'école de Copenhague". Il faut être physicien pour poursuivre plus loin l'analyse de ce mystère, par exemple soit en termes concrets de modèles cachés (cf.[3],[9]) susdits), soit en termes philosophiques, l'objet de [10]. Dans [3], le non respect de (6) trouve des justifications.

Remarque. Précisons encore le mystère des covariances $\neq 0$. Il n'est pas lié aux inégalités de Heisenberg. Pour $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ commutant, le couple de valeurs (a, b) simultanées existe, tenant lieu de ω. Mais alors que pour le probabiliste, une épreuve, réalisée, donne par hypothèse ω (il y a bien, comme en M.Q., passage d'un état potentiel, analogue à φ, à l'"état élémentaire" ω réalisé), en M.Q. la mesure de $(\overline{A}, \overline{B})$ quasi simultanée pour nos couples de particules, se fait par deux appareils distincts, aussi éloignés que voulu. Peut-être a-t-on tort de diviser par la pensée cette double opération en ses éléments séparés, alors que, nous l'avons dit, on doit autant que faire se peut, dans l'expérience d'Aspect, éliminer les impacts non simultanés, et que φ n'est pas "séparable". Et l'on s'ingénie à imaginer que la mesure de $\overline{A}$, donnant a ait lieu *avant* celle de $\overline{B}$, et que, alors, la loi de $(\overline{B}|a)$ va dépendre de a. Il est vrai que dans le cas de 2.3 où $\mathbf{E}\, \overline{AB} = -1$, on a $\overline{B} = -\overline{A}$. Mais est-il légitime de rompre la simultanéité? La mesure globale fournissant une valeur de $\overline{R}$ (analogue de ω), donc à la fois celles de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. Nous posons la question, ne sachant pas aborder son étude.

3. L'impossibilité des paramètres cachés suivant Von Neumann

3.1. Nous avons déjà, au paragraphe 2, utilisé le traité [15] pour tout l'aspect mathématique (: opérateurs hilbertiens) de la M.Q. C'est un livre de parfaite rigueur, sauf aux pages 204-224 (paragraphes 1 et 2 du chapitre IV), qui sont seules en cause dans ce paragraphe 3.

Le problème des paramètres cachés est posé, très clairement, comme tentative d'explication, comme en mécanique classique, du caractère aléatoire d'une mesure, par l'insuffisance de nos connaissances. Alors le ω de notre paragraphe 2 est bien conçu comme complétant l'état quantique φ dans la description d'un système S, *et aussi* comme rétablissant un principe de causalité (pp. 145, 215, 222, 224), principe abandonné par l'interprétation "statistique" due à Born, de la M.Q. (p. 145).

Une notion bizarre encombre ce texte. Von Neumann croit prouver qu'"il n'existe pas d'ensembles statistiques (collectifs) dépourvus de dispersion" (p. 220 l. 1 et 2). C'est une trivialité, sinon toutes les $\overline{A}$ seraient certaines, φ serait un ω. Page 27 de [4], Louis de Broglie dit sur ce point "la démonstration belle, mais un peu lourde, de M. Von Neumann ne nous apprend rien de bien nouveau ..., vu $\sigma(x)\sigma(p_x) \geq h/4\pi$". Mais cette démonstration veut passer pas un collectif $\mathcal{E} = (S_1, \cdots S_N)$ (et c'est l'erreur de toutes ces pages, la matière de notre analyse en 3.4), et s'appuie sur un opérateur $U_{\mathcal{E}}$, noté seulement U, *qui n'existe pas.*

Cette bizarrerie a un sens. Von Neumann veut prouver qu'un état φ *(de $\mathcal{H}$)*, ne peut être un mélange d'états cachés qui seraient eux aussi des états quantiques : les ω seraient des φ et ne pourraient donc être ces "états élémentaires véritables" (l. -5 p. 221) ou "individuels certains" (G. Lochak).

Comme un mélange ne fait qu'augmenter les dispersions, on pourrait s'arrêter là en ce qui concerne la recherche d'états cachés *dans $\mathcal{H}$.*

Mais Von Neumann parait poser aussi (p. 204) le problème plus général "S peut-il être un mélange $\phi = \sum w_n \varphi_n$ (nous écrirons $\sum p_n \varphi_n$)" ?, et veut y répondre par l'analyse d'un collectif (le "collectif quelconque" du bas de la page 210 relève clairement, *vu la suite*, d'un tel mélange). Mélange signifie que les S_n de $\mathcal{E}$ sont un échantillon des états possibles φ_n, avec les probabilités p_n, ϕ représente alors un "mélange d'états purs" qui n'a pas à être supposé dans $\mathcal{H}$ (mais ne pourra évidemment pas plus être un ω que s'il était dans $\mathcal{H}$). En termes de paramètres cachés, Ω serait une somme de Ω_n, de poids relatifs p_n et de probabilités $P_{\varphi_n} = P(.|\omega \in \Omega_n)$.

3.2. Il est temps de rappeler l'égalité fondamentale

$$\mathbf{E}\,\overline{A} = (\tilde{A}\varphi, \varphi) \tag{7}$$

pour S dans l'état $\varphi \in \mathcal{H}$, $(.,.)$ étant le produit scalaire dans $\mathcal{H}$. Il saute aux yeux que (7), étant non linéaire en φ, doit être incompatible avec

$$\phi = \sum p_n \varphi_n \in \mathcal{H}, \tag{8}$$

relation probabiliste, linéaire.

Bien prendre garde que $\sum p_n \varphi_n$ ne désigne pas une addition dans $\mathcal{H}$, mais est à entendre au sens additif de l'"espérance" d'une v.a. composée (suivant $\Omega = \sum p_n \Omega_n$). Ce point, l'incompatibilité susdite, paraît peu noté à cause sans doute du fait remarquable suivant (qui est presque l'unique matière de ce 3.2 et de 3.3).

$$\mathbf{E}\,\overline{A} = T_r(U\tilde{A}) \quad , \quad U = U_\varphi \quad , \tag{9}$$

en fait $U = P_\varphi$ projecteur $U_\varphi \psi = (\psi, \varphi)\varphi$ dans $\mathcal{H}$. (9) demeure donc par mélanges, définissant

$$U_\phi = \sum p_n U_{\varphi_n}$$

Tous ces opérateurs U sont définis positifs ($(Uf, f) \geq 0$) et de trace 1. Il est alors, (9) étant admis, plus clair encore qu'aucun mélange de projecteurs ("de dimension 1") fini ou infini, U_φ, ne peut être un tel projecteur. Cependant cette preuve utilise l'unicité de U (cf. 3.3.b) ci-après). Mais on évite aisément cet argument (cf. c) et d) de 3.3). Les dispersions de $\overline{A}$, exprimées par leurs variances, s'écrivent

$$\mathbf{E}\,\overline{A}^2 - (\mathbf{E}\,\overline{A})^2 = T_r U \tilde{A}^2 - (T_r U \tilde{A})^2. \tag{10}$$

Page 219 il est prouvé

(i) U sans dispersion (en ce sens que toutes les valeurs de (10), A variant, sont nulles) n'existe pas.

Mais cela ne peut s'appliquer à $U_\mathcal{E}$ défini par un mélange supposé, ϕ, et un $\mathcal{E}$ (: "U défini uniquement par l'ensemble statistique considéré", p.218), ce $U_\mathcal{E}$ n'existant pas.

Page 220 est ensuite prouvé

ii) Les seuls opérateurs hermitiques définis positifs, de trace 1, indécomposables en $U = pU' + \overline{p}U''$ (U', U'' du même type), sont les projecteurs de dimension 1, les P_φ.

Nous l'avons dit, Von Neumann forme l'ambitieux projet de tester par (toutes) les mesures sur un collectif $\mathcal{E}$, l'hypothèse de décomposabilité $\phi = p\phi' + \overline{p}\phi"$, en ne supposant pas a priori que $\phi \in \mathcal{H}$. Son énoncé (bas de la p.210) ne peut être que vague : "Est-il possible de représenter un collectif quelconque $(S_1, \cdots S_N)$ comportant des grandeurs à dispersion $\neq 0$, par un mélange de *deux* autres, distincts l'un de l'autre et du collectif initial". Et il transcrit cet énoncé en termes d'une décomposition de $U_{\mathcal{E}}$ "construit" au paragraphe 2.

La conclusion est tirée de ii) (p.220-221), en semblant croire que $U_{\mathcal{E}}$ (qui n'existe pas) égale P_φ dans le cas de l'état pur φ : Seuls les collectifs purs sont indécomposables, mais n'étant pas dépourvus de dispersion, "le conflit de la causalité est tranché, et tranché au détriment de cette dernière" (p.221). Nous reprendrons cette question de la décomposition en 3.4. et 3.5. Ainsi Von Neumann, par ii) (propriété d'opérateurs dans $\mathcal{H}$) fournit évidemment la preuve de

iii) Un état φ de $\mathcal{H}$ ne peut correspondre à un mélange $\phi = p\varphi' + \overline{p}\varphi"$ de deux états de $\mathcal{H}$, tout en passant par un détour qui est un non sens, sauf à croire que (p.213), "N étant suffisamment grand", on peut passer à la limite, que $U_{\mathcal{E}} = P_\varphi$. En 3.3 nous dirons rapidement comment Louis de Broglie expose le problème de l'impossibilité de (8). Tout en se référant à "la théorie de la mesure suivant Von Neumann" (titre du chapitre II de [4]), il reste dans $\mathcal{H}$, évite le piège du collectif $\mathcal{E}$. Ce sont deux présentations de la preuve dite ci-dessus, qui évitent l'argument de l'unicité de U.

A la fin du chapitre I, p.13, Louis de Broglie écrit "le célèbre théorème de Von Neumann n'est au fond qu'un truisme", en visant la preuve de l'impossibilité des paramètres cachés. Ce truisme concerne, nous semble-t-il, i), car nous avons vu, en 3.1., que i) suffit pour cette preuve (au sens de Von Neumann).

Terminons ce 3.2. par une preuve très élémentaire de iii) qui a l'avantage de n'utiliser *que* (7), et pour seulement cinq projecteurs. Nous ne savons pas l'étendre à la négation générale de (8), qui paraît nécessiter un appareil plus complexe de la théorie hilbertienne, comme vu ci-dessus.

Lemme. Il est impossible que, φ' et $\varphi"$ étant deux états de $\mathcal{H}$, il en existe un autre φ, dit mélange de φ' et $\varphi"$ parce qu'il vérifierait $\mathbf{E}\,\overline{A} = p\mathbf{E}\,(\overline{A}|\varphi') + q\mathbf{E}\,(\overline{A}|\varphi")$, soit

$$(\tilde{A}\varphi, \varphi) = p(\tilde{A}\varphi', \varphi') + q(\tilde{A}\varphi", \varphi") \tag{11}$$

pour les trois opérateurs projecteurs $P_{\varphi'}, P_{\varphi"}$ et $P_{\mathbf{E}^{\perp}}$ et $\tilde{A}$ permutant φ' et $\varphi"$, $\tilde{A}'$ permutant φ' et $i\varphi"$, avec $\mathbf{E}^{\perp}$ espace complémentaire orthogonal de celui engendré par φ' et $\varphi"$.

Preuve.

a) Posant d'abord $\varphi = c\psi + c'\psi'$, décomposition suivant E et $E^{\perp}$, et prenant $\tilde{A} = P_{E^{\perp}}$, on a $(\tilde{A}\varphi, \varphi) = |c'|^2$ alors que (11) donne $0 : c' = 0$.

b) Soit donc, dans E, $\varphi = a\varphi' + b\varphi"$ et $u = (\varphi', \varphi")$. (11) implique, pour $P_{\varphi'}$ et $P_{\varphi"}$,

$$|(\varphi, \varphi')|^2 = p + q|u|^2 \quad , \quad |(\varphi, \varphi")|^2 = q + p|u|^2.$$

En ajoutant ces deux égalités, on en déduit

$$1 + |u|^2 = |a + b\overline{u}|^2 + |b + a\overline{u}|^2 = (|a|^2 + |b|^2)(1 + |u|^2) + 4\Re a\bar{b}u.$$

Mais $||\varphi|| = 1$ donne $1 = |a|^2 + |b|^2 + 2\Re a\bar{b}u$, soit

$$|u|^2(1 - |a|^2 - |b|^2) = 2\Re a\bar{b}u = |u|^2 2\Re a\bar{b}u.$$

Si $\Re a\bar{b}u$ est $\neq 0$, c'est $u = e^{i\theta}$, d'où $||\varphi' - e^{i\theta}\varphi"|| = 0$. φ' et $\varphi"$ seraient équivalents. Si $\Re a\bar{b}u = 0$, on a $p + q|u|^2 = |a|^2 + |b|^2|u|^2$ et $q + p|u|^2 = |a|^2|u|^2 + |b|^2$, donc $p = |a|^2$, $q = |b|^2$. $\tilde{A}$ susdit donne dans (11) $\Re a\bar{b} = 0$, donc $\Im a\bar{b} \neq 0$ est u réel. $\tilde{A}'$ donne $2ia\bar{b} + i(p - q)u = i(p - q)u$, donc $a\bar{b} = 0$, impossible ■

3.3.

a) Un cas particulier de (8) fait l'objet du paragraphe 3 du chapitre II de [3]. C'est celui où les états du mélange sont ceux d'une base $\{\varphi_i\}$, orthonormée, celle des fonctions propres d'un $\tilde{A}$, et où ϕ correspondrait à $\varphi = \sum c_i\varphi_i$. Alors on aurait $p_i = |c_i|^2$. Mais ce mélange devrait varier avec la base définie par B ne commutant pas avec $\tilde{A}$ (p.16).

b) Un opérateur $\tilde{A}$ est défini par la matrice de Von Neumann $A = \{a_{ij}\}$, avec

$$a_{ij} = (\tilde{A}\varphi_j, \varphi_i),$$

A relative à une base φ_i orthonormée. P_ψ a donc la matrice

$$(P_\psi\varphi_j, \varphi_i) = (\varphi_j, \psi)(\psi, \varphi_i) = c_i c_j^* \quad \text{si} \quad \psi = \sum c_i\varphi_i.$$

Sa trace est $\sum |c_i|^2 = 1$ et

$$\mathbf{E}\,\overline{A} = (\tilde{A}\psi, \psi) = \sum c_i c_j^* a_{ji} = T_r(P_\psi A),$$

c'est (9) écrite avec les matrices P_ψ et A. P_{φ_i} a donc une matrice diagonale réduite au terme 1 en $i \times i$.

Montrons que U de (9) est unique. $T_r UA = \sum u_{ji} a_{ij}$ donne en effet, pour $A_i = P_{\varphi_i}$, u_{ii} et pour $A = A_{ij}$ réduite aux valeurs 1 en $i \times j$ et $j \times i$, $T_r UA_{ij} = u_{ji} + u_{ij} = 2\Re u_{ij}$; pour $A = A'_{ij}$ réduite aux valeurs i en $i \times j$ et $-i$ en $j \times i$, $T_r UA'_{ij} = i(u_{ji} - u_{ij}) = 2\Im u_{ij}$.

c) au paragraphe 3 de II, Louis de Broglie diagonalise la matrice $U = U_\varphi$, ce qui est une façon de concrétiser la dimension de $U\mathcal{H}$: suivant une base φ'_i convenable, U se réduit aux p'_i sur la diagonale. Si l'état ϕ n'est pas pur, on n'a pas $U^2 = U$: $U - U^2$ est diagonale avec les éléments $p'_i - {p'}_i^2$ (cf.(27) p.23). Notons qu'un projecteur $P = P^2$ quelconque est une somme $\sum P_{\varphi'_i}$, somme prise sur une base $\{\varphi'_i\}$ de $P\mathcal{H}$, et sa trace égale la dimension de $P\mathcal{H}$. Au contraire U_φ de (8) égale $\sum p_n P_{\varphi_n}$.

d) Le paragraphe 4 explicite encore cette preuve de l'irréductibilité des cas purs (non affirmée lors de (27)). Cela en exprimant $U - U^2$ pour $U = \sum p_n P_{\varphi_n}$ (rappelons que les φ_n ne sont pas nécessairement $\perp$) : on trouve que

$$U - U^2 = \sum_{m<n} p_m p_n (P_{\varphi_m} - P_{\varphi_n})^2.$$

3.4. On désire étudier l'hypothèse

$$\phi = p\varphi' + q\varphi" \tag{12}$$

à l'aide du collectif $\mathcal{E} = (S_N, \cdots, S_N)$. $\mathcal{E}$ est un ensemble *de mesures* des diverses grandeurs : pour chaque S_n dans l'état qui lui a été attribué par le mélange, si ϕ n'est pas un état pur. ϕ' et ϕ" peuvent être eux-mêmes des mélanges (dans le degré de généralité où Von Neumann paraît poser le problème). Pour simplifier nous nous bornerons plus loin à prendre $\phi' = \varphi'$, $\phi" = \varphi"$, états d'une éventuelle décomposition, dans $\mathcal{H}$.

On construit U et prouve la formule générale (9) sans passer par les P_{φ_n} comme en b) de 3.3. ($\varphi_n = \varphi'$ ou φ" par exemple), et pour les moyennes *sur* $\mathcal{E}$, notées (avec notre notation habituelle pour la mesure)

$\mathrm{Esp}\,\overline{A} = \mathrm{Esp}_{\mathcal{E}}\,\overline{A}$ (c'est nous qui précisons pour marquer son caractère aléatoire, la dépendance vis à vis de $\mathcal{E}$) :

$$\mathrm{Esp}\,\overline{A} = T_r U \tilde{A} \quad , \quad U = U_{\mathcal{E}} \tag{9'}$$

Pour cela il suffit de constater que la matrice exprimant $\tilde{A}$, pour la base $\{\varphi_n\}$ est la combinaison, avec les coefficients a_{ii}, $\Re a_{ij}$, $\Im a_{ij} (i < j)$, des matrices élémentaires (base de l'ensemble des opérateurs dans $\mathcal{H}$) A_{ii} (représentant P_{φ_i}), A_{ij}, A'_{ij} introduites en 3.3.b).

Alors $\mathrm{Esp}\,\overline{A}$ est la moyenne sur $\mathcal{E}$ des valeurs prises par $\overline{A}$ pour chaque S_n (avec un double aléa, celui du choix de l'état ϕ_n, et celui de $\overline{A}$ pour cet état). Elle égale la combinaison susdite des Esp. relatives aux grandeurs élémentaires U_{ii}, V_{ij}, W_{ij}, correspondant aux A_{ii}, A_{ij}, A'_{ij}.

Posant

$$u_{ii} = \mathrm{Esp}\,\overline{U}_{ii} \quad , \quad u_{ij} = \frac{1}{2}(\mathrm{Esp}\,\overline{V}_{ij} + i\,\mathrm{Esp}\,\overline{W}_{ij}),\ i < j \text{ avec } u_{ji} = \overline{u}_{ij}, \tag{13}$$

c'est

$$\begin{aligned} \sum a_{ii}\,\mathrm{Esp}\,\overline{U}_{ii} + \sum_{i<j} (\Re a_{ij}\,\mathrm{Esp}\,\overline{V}_{ij} + \Im a_{ij}\,\mathrm{Esp}\,\overline{W}_{ij}) \\ = \mathrm{Esp}\,\overline{A} = \sum u_{ji} a_{ij}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi l'opérateur hermitique $U_{\mathcal{E}}$ est défini par la matrice $\{u_{ij}\}$ mesurée sur $\mathcal{E}$ par les Esp. figurant dans (13). On note (p.211) qu'on a remplacé les valeurs de $\overline{A}$ dans $\mathcal{E}$ (leur répartition) par les diverses $\mathrm{Esp}\,\overline{A}$ (la loi de $\overline{A}_{\mathcal{E}}$ est bien définie par les $\mathrm{Esp}\,f(\overline{A})$ relative aux fonctions indicatrices d'intervalles $]-\infty, a]$).

Ainsi pour *tout* partage $E' + E$" de $E = \{1, 2, \cdots N\}$ (ce partage n'étant pas lié a priori à l'hypothèse (12)), on a un partage $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}$" tel que

$$\mathrm{Esp}\,\overline{A} = \alpha\,\mathrm{Esp}'\,\overline{A} + \beta\,\mathrm{Esp}"\overline{A} \quad , \qquad \text{tout} \quad \overline{A}, \tag{15}$$

$$U_{\mathcal{E}} = \alpha U_{\mathcal{E}'} + \beta U_{\mathcal{E}"}, \tag{15'}$$

avec $\alpha = N'/N$, $\beta = N"/N$, N' et N" tailles de E', E" ou $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$".

Von Neumann croît alors pouvoir distinguer l'existence de (12) par le fait que les $U_{\mathcal{E}}$, $U_{\mathcal{E}"}$, associés à un $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}$" convenable, ne sont pas *identiques* (ce qui équivaudrait à l'égalité de toutes les $\mathrm{Esp}'\,\overline{A}$ et $\mathrm{Esp}"\overline{A}$).

Précisons à nouveau (bas de la p.212) que les $\mathrm{Esp}\,\overline{A}$ sont *définies* comme "moyennes arithmétiques des résultats de mesures effectuées sur un ensemble statistique suffisamment grand". L'ennui est (si cela avait un sens) que les Esp., Esp.', Esp.", ont *toujours* (dans leur ensemble, c.a.d. au sens de la négation de 3.2.i) ci-dessus) des dispersions, et ne seraient *jamais identiques* (comme fonctions des $\overline{A}$). Que peut-on dire de façon approchée, qualitative ?

Si le partage $E = E' + E"$ a été fait a priori, c.a.d. avant l'expérience, $U_{\mathcal{E}'}$ et $U_{\mathcal{E}"}$, *comme* $U_{\mathcal{E}}$ sont "voisins" de U_ϕ, *que* ϕ *soit pur ou* $= p\varphi' + q\varphi"$, seul cas de mélange (12) auquel nous nous limitons maintenant.

C'est seulement si le partage $E' + E"$ est le partage effectif de $\mathcal{E}$ entre φ' et $\varphi"$ (ou en est voisin) que $(\mathcal{E}|E')$ peut être identifié à un $\mathcal{E}'$ relatif à l'état φ' (ou en être peu différent) : $U_{\mathcal{E}}$ est alors voisin de $P_{\varphi'}$. Mais il faut le reconnaître sans critère précis et en "allant à la pêche" parmi *tous* les partages possibles.

Passer à la limite $N \to \infty$, c'est revenir aux numéros 3.2 et 3.3, en abandonnant toute référence à la statistique, c.a.d. à des échantillons ou collectifs.

Les pages 206-211 donnent à la fois la croyance de Von Neumann à ce que (p. 207) "l'introduction des collectifs élimine ces difficultés" (celle des mesures simultanées impossibles), la "tentation de ne pas abandonner la fiction d'un collectif décomposable" (p.210, la fiction concernant la possibilité de la décomposition de $\mathcal{E}$, mettant en évidence les paramètres cachés –les états élémentaires sans dispersion), et l'analyse qui précédait, p.209-210, en concluant "il n'existe aucune méthode pour décomposer un collectif ..., sans en altérer les éléments". Ceci explique (?) la construction de $U_{\mathcal{E}}$ au paragraphe 2. Mais, nous l'avons dit en 3.2., $U_{\mathcal{E}}$ n'existe pas puisqu'il est défini par l'ensemble des mesures simultanées des grandeurs U, V, W qui ne peuvent "commuter" toutes. Bien que la base $\{\varphi_n\}$ soit orthogonale, on vérifie, par exemple, que $V_{ij}V_{ik}\varphi = (\varphi, \varphi_k)\varphi_j$ non symétrique en k et j. Il est précisé p. 217 (ce qu'on prouve aisément) que

$$V_{ij} = P_{(\varphi_i+\varphi_j)/\sqrt{2}} - P_{(\varphi_i-\varphi_j)\sqrt{2}}.$$

Ainsi tout cela nous semble irréel, tout en séduisant le lecteur.

3.5. Essayons de préciser pourquoi l'approche statistique nous semble inappropriée, quasi impossible, et à comparer avec les résultats simples et clairs de 3.2. et 3.3. qui traitent le problème (12) en termes non aléatoires : les diverses lois de la théorie quantique et l'opérateur "espérance".

Se limiter à des $\tilde{A}$ commutant tous (deux à deux) revient à n'en considérer qu'un seul, (le $\tilde{R}$ dit en 2.2.). Ce que nous écrirons pour $\overline{A}$ vaut alors pour *tous*, mais *sans moyen* de les traiter globalement. La statistique cherche des critères concrets (de jugement sur un échantillon $\mathcal{E}$ résultat d'une série de mesures, aléatoires par essence) pour ne pas rejeter un modèle, ou le faire, si possible au profit d'un autre. C'est une démarche pragmatique qui ne prouvera pas un théorème (domaine de la théorie des Probabilités), mais fournira des présomptions, plus ou moins assurées, en fonction des seuils α de probabilité choisis (on rejette par exemple une hypothèse qui donne (avant l'épreuve) une probabilité $< \alpha$ à un évènement qui s'est réalisé, en faveur d'une autre qui la donnerait plus grande).

Sous l'hypothèse

$$\phi = p\varphi' + q\varphi" \tag{16}$$

on a

$$\mathrm{Var}\,\overline{A} = p\,\mathrm{Var}\,\overline{A}' + q\,\mathrm{Var}\,\overline{A}" + \mathrm{Var}(\text{loi } p \text{ sur } \overline{EA'},\ q \text{ sur } \overline{EA"}), \tag{17}$$

A' et $A"$ étant relatives aux états φ' et $\varphi"$.

De même, *si on connaît* le partage $E' + E"$ réalisé par l'expérience, définissant $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}"$, on a

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{E}}\,\overline{A} = \alpha\,\mathrm{Var}_{\mathcal{E}'}\,\overline{A}' + \beta\,\mathrm{Var}_{\mathcal{E}"}\,\overline{A}" + \mathrm{Var}(\text{loi } \alpha \text{ sur } \mathrm{Esp}'\,\overline{A},\ \beta \text{ sur } \mathrm{Esp}"\overline{A}) \tag{17'}$$

avec $\mathrm{Esp}'\,\overline{A} = \mathrm{Esp}_{\mathcal{E}'}\,\overline{A}', \ldots$ Pour les grandes valeurs de $N = |\mathcal{E}|$, les v.a. $\mathrm{Esp}\,\overline{A}$, $\mathrm{Esp}'\,\overline{A}$, $\mathrm{Esp}"\overline{A}$ sont pratiquement gaussiennes, de moyennes ($\mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}"$ variant) les $E\overline{A}$, $E\overline{A}'$, $E\overline{A}"$ de (17), et de variances $var\overline{A}/N$, ...

Un test de (16) au moyen des écarts $\Delta'\overline{A} = \mathrm{Esp}'\,\overline{A} - E\overline{A}'$ et $\Delta"\overline{A}$ est possible, si φ', $\varphi"$, E' donc $E"$ sont connus, car (17) doit réduire les variances partielles. De même on peut tester (17'). Mais cette hypothèse de connaissance de E', $E"$ est absurde, c'est supposer le problème résolu. Il faudrait donc (comme nous l'avons dit pour $U_{\mathcal{E}}$ supposé exister), chercher parmi *tous les partages possibles* (φ' et $\varphi"$ étant ou non fixés), pour rejeter (17) ou non.

Si on se borne à ne pas rejeter l'hypothèse "ϕ est pur", on devra chercher un état φ tel que les $\Delta\overline{A}$ puissent relever de lois quasi-normales de variances $(var\overline{A})/N$. Mais nous ne savons pas prouver que cela interdit (16). Cela serait seulement une présomption, d'autant plus forte que les probabilités d'écarts "normaux" $\geq |\Delta\overline{A}|$ seraient "non petites".

- Notons (comme Von Neumann à la recherche des états cachés, p.210), qu'on peut *toujours* décomposer un échantillon $\mathcal{E}$ suivant les valeurs de $\overline{A}$, par exemple celles $< a$ et les autres. Cette décomposition peut être représentative du même découpage de la loi de $\overline{A}$, d'un partage qui représente cette loi comme un mélange. Rien ne permet de *distinguer la loi initiale de la loi issue de l'épreuve composée* définie par le mélange. Il faut ajouter des hypothèses précises, tels φ', φ" de (16) pour discriminer (de même (Ω, P) admet bien des partages). Ici les P_φ sont des références précises, mais on ne peut raisonner globalement en termes de $U_{\mathcal{E}} \approx P_\varphi$, seulement des diverses $\{\mathrm{Esp}_{\mathcal{E}}\,\overline{A} - E\overline{A}\}$, prises séparément.

4. La preuve de la non séparabilité suivant B. d'Espagnat

Cette question est traitée au chapitre 4 de [10]. [10] est un livre de philosophie, de pensée mesurée et approfondie. Cependant l'auteur veut baser cette longue étude sur la "non séparabilité", équivalente pour lui à la non vérification expérimentale de (4'), pensant que l'inégalité de Bell, sous la forme (4'), résulte *de l'hypothèse de séparabilité*, et d'elle seule. Nous avons vu, croyons nous, qu'il n'en est rien[4], mais voulons ici étudier la voie différente, toute de vulgarisation, qu'emprunte l'auteur.

4.1. Première illustration de (2) sous la forme (4')

On définit sur une population $\mathcal{P} = \Omega$, les v.a. X ($X = 1$ si ω est une femme, -1 sinon), $Y = 1$ si l'âge de ω est $< 40ans$ et $Z = 1$ si ω est un fumeur.

P est une distribution uniforme : $P\,(\text{chaque}\,\omega) = 1/N$ avec $|\Omega| = N$. Une preuve directe de (4') par inclusion des parties de Ω correspondant aux deux membres de (18) ci-après, est évidente. Elle est différente de celle que nous avons donnée, car rien n'impose la symétrie des couples de v.a., et on ne peut compléter les données, pour les autres valeurs des couples, de cette façon symétrique (suivant iii) du lemme 1.1) que

[4] si nous lions la séparabilité aux mesures possibles (cf les citations de 2.5. La lier à l'existence de ω, comme Bell, introduit la confusion "modèle caché (= localité)" = "(apparence de) séparabilité". Il y a en fait rupture du mystère d'action à distance.

si p, q, r, vérifient trois autres conditions (au total (2) et (3)), pour se ramener à la preuve de Bell.

Un énoncé concret, relatif à un échantillon de taille N (cf. p.28 et note 1) sous la forme

$$h \leq f + g \tag{18}$$

avec une probabilité qui approche l'unité, est déjà plus délicate.

Dans (18), f, g, h désignent les fréquences, dans l'échantillon des trois évènements de (4'). On suppose qu'on a choisi "au hasard" trois échantillons A, B, C, de même taille n, dans les parties de Ω réalisant chacun des trois évènements concernés, pour que (18) subsiste lorsqu'on la multiplie par n pour obtenir les "fréquences absolues". Si Ω était infini, on pourrait dire que les $|f - p|$, $|g - q|$, $|h - r|$ étant $\leq \eta/3$ sauf dans des cas de probabilité $\leq \epsilon(\eta, n)$, on a

$$h \leq f + g + \eta \tag{19}$$

sauf une probabilité qui $\to 0$ lorsque η étant fixé, $n \uparrow \infty$. En fait $|\Omega| = N$ est fini, et on sait seulement que, *n étant fixé*, $\epsilon(\eta, n)$ est voisin de la probabilité calculée (sur les lois de Bernoulli symbolisées par $(p + \overline{p})^n, \ldots$) lorsque $N \uparrow \infty$, ce qu'on ne peut faire. (19) ne peut être traduite exactement dans ce cas N fini. On ne peut pas dire "dès que n est assez grand", car ce n'est sûrement pas vrai lorsque $n \uparrow inf(N_1, N_2, N_3)$ des tailles des parties Ω_i de Ω concernées : n doit rester petit p.r. à N, sans qu'on puisse parler avec rigueur de ce "petit". C'est parce que A, B, C ne sont pas de "vrais échantillons". Chaque choix d'un ω dans une Ω_i modifie Ω_i (en enlevant cet élèment), et il est quasi impossible d'évaluer (ou de majorer) les probabilités des $|f - p| > \eta/3, \ldots$. Il est sûr qu'en majorant $\epsilon(\eta, n, N)$ qui soit petit ($\leq \epsilon_0$ donné) dépend de façon complexe de n et N. En tout cas ce ϵ concerne $h \leq f + g + \eta$ (en fréquences relatives) et non $h \leq f + g$, mais il n'est pas question d'introduire ces nuances dans le cadre de [10].

4.2. Deuxième modèle

Il diffère du précédent. On veut présenter la difficulté que représente le passage à des mesures (quantiques). Reprenons les notations du paragraphe 2, gardant toutefois X, Y, Z, et notant $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ leurs mesures. Une très longue démarche est entreprise (pp.29 à 40) pour "montrer", "démontrer" (p.36) qu'une expérience statistique antérieure assure $X = \overline{X}$, $Y = \overline{Y}$, $Z = \overline{Z}$: les résultats des examens ($\overline{X} = -1$

signifiant l'échec en une 1ère matière) "reflètent" (égalent) les aptitudes (à la veille de l'examen), réduites elles aussi à deux valeurs ± 1. Dans ce modèle nous ne parlerons plus que de X, Y, Z, *puisqu'on postule*, en fait, que rien ne distingue $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, de X, Y, Z (valeurs 1 pour la réussite).

- Revenons cependant sur ce point. Page 30 il est envisagé pour le 1er modèle, que (4') vaille toujours, "même si la mesure de $\overline{Y}$ est influencée par le fait d'avoir auparavant mesuré $\overline{X}$ (on suppose p.29, les mesures faites dans l'ordre X, Y, Z). Ceci ne nous est pas clair. La répartition de $\overline{Y}$ *peut* être conditionnée (au sens probabiliste) par le *résultat* de la mesure de $\overline{X}$ (mais non "modifiée"), ce qui signifie (cf. lemme 2.5) que $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ne sont pas indépendantes, et l'ordre dit revient seulement à distinguer les lois de $(Y|X)$ et $(X|Y)$. Mais s'il y a vraiment modification de la loi de $(\overline{X}, \overline{Y})$ par le fait de mesurer ces valeurs, plus rien n'est défini (cf. la suite de la p.30), toute précision nous semble hors d'atteinte. Dans [12] sont discutées, pour le 2ème modèle, les questions que posent les mesures modifiant les grandeurs.

- Les ω sont maintenant des couples $(\omega', \omega")$ d'étudiants jumeaux vrais –dans chaque couple. Les aptitudes (X en latin, Y en grec, Z en chinois) ne dépendent que de ω, étant postulées identiques pour deux jumeaux, mais on va mesurer ces aptitudes en "tirant au hasard" pour chaque étudiant l'unique matière sur laquelle il sera interrogé (et $\overline{X} = X$, ...). On ne va garder de Ω que Ω' composé de $\Omega_{YZ} = \Omega_1$, $\Omega_{ZX} = \Omega_2$, $\Omega_{XY} = \Omega_3$, ensemble des ω pour lesquels les deux étudiants ont reçu ("par le sort") des matières distinctes.

Ainsi on ne choisit plus des échantillons "assez grands mais petits p.r. à N", on partage Ω par ces $2N$ "choix au hasard". Les tailles N_i des Ω_i sont peu différentes en valeurs relatives : les $|N_i/N - 2/9|$ sont $\leq \eta$, sauf une probabilité $\leq \epsilon(\eta, N)$, qu'on sait évaluer car il s'agit ici d'une véritable épreuve répétée, symbolisée par $(1/3+1/3+1/3)^{2N}$, qui fournit $N = N_1 + N_2 + N_3 +$ le nombre des ω à matières non distinctes. Alors les fréquences f, g, h, dans $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ des couples $(Y = 1, Z = -1), (X = Z = 1), (X = Y = 1)$ sont proches en probabilité (: non pas "avec une probabilité voisine de 1", mais "les différences sont des v.a. petites en probabilité, c.a.d. au sens des couples $(\eta, \epsilon(\eta) = P(|.| > \eta)$ de celles de ces évènements dans Ω. Mais parce qu'il s'agit de grandes parties de Ω de taille fixée, l'évaluation de ces différences est quasi-impossible. L'affirmation p.36 du "théorème fondamental" (sous la forme de (4') approchée) est incontestable (la critique de [12] nous paraissant concerner les approches du postulat $X = \overline{X}, \ldots$).

4.3. Le 3ème modèle est, in fine, celui des véritables expériences de vérification dites en 2.3., 2.4., et *n'a pas* de rapport direct avec les 5.1. et 5.2. précédents

Le choix au hasard des matières, dans le 2ème modèle, visait à interdire (les choix étant faits juste avant les examens) des influences d'un examen passé par un des éléments de ω sur celui subi par le 2ème. Ce faisant on exprimait bien la séparabilité au sens de la non influence d'une mesure sur l'autre, justifiant $X = \overline{X}, \ldots$.

Le fait que (4') soit vraie dans ce 2ème modèle, ne permet aucune interprétation de ce qu'elle ne soit plus vérifiée expérimentalement dans le 3ème modèle. Ce dernier correspond aux paragraphes 2.3. et 2.4., les couples de particules correspondant aux couples de jumeaux du 2ème modèle. Une différence importante est l'indépendance des expériences mesurant les trois termes de l'inégalité à vérifier (en 4.2., les Ω_i résultent d'épreuves sur un même Ω). Mais l'hypothèse des paramètres cachés, jointe à (6) (et à la symétrie de couples) permet de remplacer

$$\overline{p}/2 = P(Y = 1, Z = -1) \quad \text{par} \quad P(\overline{B"_1} = \overline{C"_2} = 1),$$

$$q/2 \quad \text{par} \quad \frac{1}{2} - P(\overline{A}'_1 = C'_2 = 1) \quad , \quad \frac{r}{2} \quad \text{par} \quad \frac{1}{2} - P(\overline{A}_1 = \overline{B}_2 = 1),$$

d'où (cf. p.44)

$$P(\overline{B"_2} = \overline{C"_2} = 1) + P(\overline{A}'_1 \pm \overline{B}_2 = 1) \geq P(\overline{A}'_1 = \overline{C}'_2 = 1). \qquad (20)$$

Le rattachement à un même Ω n'est pas le même qu'en 4.2., mais la traduction de (4') conserve la même forme. Répétons le. L'essentiel est de se ramener à un même Ω concernant la 1ère particule, ou le couple entier (cf. 2.3), puis de relier les covariances qui aux lemmes 1.1., 1.2., concernent P, aux covariances quantiques mesurées, par l'hypothèse (6). Ainsi, en 4.3, la preuve de (20) n'est pas donnée, ni semble-t-il perçue sa vraie justification.

P.S. Nous remercions vivement M. G. Lochak pour tous les documents qu'il nous a fournis comme pour l'accueil qu'il fait à ce texte.

Références

[0] J. Freedman and J.F. Clauser, *Experimental Test of Local Hidden-Variables Theories*, Physical Review Letters **38** n° 4, 938-941 (1972).

[1] J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, originally published in Physics, **1**, 195-200 (1964).
[2] J.S. Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics* Review of Modern Physics **38** n° 3, 447-452 (1966).
[3] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in terms of "Hidden" variables*, I and II, Physical Review **85** n° 2, 166-193 (1952).
[4] Louis de Broglie, *La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire* (interprétation usuelle et interprétation causale) Gauthier Villars Paris (1957).
[5] Louis de Broglie, *Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire* Gauthier-Villars Paris (1963) (English Transl. Elsevier Amsterdam).
[6] Louis de Broglie, *Les incertitudes de Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique*, Gauthier Villars Bordas Paris (1982).
[7] Louis de Broglie, G. Lochak, A. Beswick, J. Vassalo-Pereira, *Localisation, probabilités et incertitudes en mécanique ondulatoire*, Fund. Scientiae **55**, 1-24 (1976).
[8] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and B.A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
[9] Edited by S. Diner, D. Fargue, G. Lochak, F. Selleri (Paris 1984) *The Wave-Particule Dualism.*
[10] B. d'Espagnat, *A la recherche du réel*, Gauthier Villars-Bordas 2ème éd. Paris (1981).
[11] G. Lochak, *Has Bell's Inequality a General Meaning for Hidden-Variable Theories ?* Foundations of Physics **6**, n° 2, 173-184 (1976).
[12] G. Lochak, *Physique et métaphysique chez B. d'Espagnat et en mécanique quantique*, Revue de métaphysique et morale **85** n° 1 (1983).
[13] G. Lochak, *Point d'orgue sur une controverse avec B. d'Espagnat*, Revue de métaphysique et morale.
[14] J.P. Mathieu, *Histoire de la Physique*, 2. Lavoisier-Tec & Doc. Paris (1991).
[15] J. Von Neumann, *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique* Alcan-P.U.F. Paris (1947) (Springer, Berlin 1932).

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1994)