De nouvelles équations d'ondes relativistes pour les fermions

C. Daviau

Fondation Louis de Broglie
23, Quai de Conti 75006 Paris

RÉSUMÉ. Une recherche systématique de toutes les équations d'ondes du premier ordre qui redonnent l'équation de Klein-Gordon au second ordre est effectuée, en se servant de l'algèbre de Clifford d'espace-temps. On utilise aussi un espace-temps de dimension 5, avec une dimension supplémentaire qui disparaît des équations d'onde. On étudie le lien entre l'une des équations obtenues et les travaux de Ziino réinterprétant la violation maximale de la parité, puis on regarde les groupes d'invariance de jauge des différentes équations.

ABSTRACT. A systematic research of the relativistic waves equations of first order giving the Klein-Gordon second order equation is made in the frame of Clifford Space-time algebra. We also use a 5-dimensional space-time, with a supplementary dimension which desappears from waves equations. The link between one of ours equations and the work of Ziino about maximal parity violation is studied, then we survey gauge invariance groups of ours equations.

En 1924, lorsque Louis de Broglie eut l'idée d'associer l'existence d'une onde au mouvement de toute particule matérielle, les seules particules élémentaires connues étaient l'électron, le proton et le photon. En quelques mois, des progrès immenses furent réalisés. E. Schrödinger réussit à trouver une équation d'évolution pour cette onde, dans le cas d'un électron ou d'un système d'électrons non relativistes. Comme L. de Broglie était parti de la relativité, il fit partie de ceux qui trouvèrent aussitôt après l'équation relativiste dite aujourd'hui équation de Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\Psi = 0; \quad \Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{1}$$

Dans le même temps, Uhlenbeck et Goudsmit émettaient l'hypothèse du spin de l'électron. En 1928 Dirac proposa pour l'électron une équation relativiste du premier ordre, de façon à pouvoir définir une densité de probabilité conservative, conformément à l'interprétation probabiliste de Born. Cette équation donna en prime le spin de l'électron et, dans le cas de l'atome d'hydrogène, elle fournit tous les nombres quantiques, les niveaux d'énergie et les règles de sélection trouvées expérimentalement par les spectroscopistes. Ces succès impressionnants incitèrent L. de Broglie à étudier de manière approfondie l'équation de Dirac [1], et à en faire la base de construction de sa théorie du photon [2]. Dans les décennies qui suivirent, de nombreux nouveaux types de fermions furent découverts, les uns attendus comme le neutron, les autres totalement imprévus comme le muon, et l'on admit que tous les fermions pouvaient être décrits par une équation de Dirac. Aussi ce fut une grande surprise lorsque Stern, en 1933, mesura le moment magnétique du proton, qui ne colle pas du tout avec la valeur prévue par la théorie de Dirac. On pense aujourd'hui que les protons et les neutrons sont des objets complexes. La théorie standard les décrit comme composés de trois quarks liés par les gluons de l'interaction forte, ce qui permet de comprendre l'ordre de grandeur des moments magnétiques du proton et du neutron. On a identifié cinq sortes de quarks et la théorie en attend un sixième. On a constaté l'existence de trois sortes de leptons chargés et on leur associe trois sortes de neutrinos. Les leptons sont totalement insensibles aux interactions fortes, responsables de la cohésion des particules composites comme les protons, les neutrons ou les mésons. Tous les fermions fondamentaux, leptons et quarks, sont sensibles aux forces faibles, les fermions chargés étant en outre sensibles aux forces électromagnétiques. Leptons et quarks semblent quasi-ponctuels, sans sous-structure dans toutes les expériences actuelles, et sont donc considérés comme les constituants de base de toutes les autres particules.

A côté de ses remarquables succès, la théorie standard comporte de sérieuses zones d'ombre : ainsi on ne comprend toujours pas ce qui différencie un muon d'un électron, d'où viennent les valeurs des différentes masses propres, pourquoi seuls les quarks sont sensibles à l'interaction forte. On doit rajouter arbitrairement dans la théorie la chiralité des interactions faibles, sans vraiment l'expliquer.

Si, pour dépasser ces difficultés, on revient aux idées de base de la mécanique ondulatoire, associant une onde au mouvement de chaque particule, on est amené à penser que les différences existant entre les types d'objets de la microphysique doivent être liées à des différences entre les ondes de ces objets. Et d'abord y a-t-il un seul type d'onde, toujours décrit par la seule équation de Dirac ? L'étude que nous avons faite précédemment [4] [5], d'une équation non linéaire susceptible de remplacer l'équation de Dirac, indique que l'horizon de la seule équation de Dirac pour tous les fermions doit pouvoir être dépassé. Nous allons donc procéder ici à une recherche aussi systématique que possible de toutes les équations relativistes pouvant conduire à (1), et commencer l'étude de leurs propriétés. Nous utiliserons d'une part le travail de Ziino [6][7] reformulant la question de la chiralité dans la théorie de Dirac, d'autre part la reformulation de la théorie de Dirac dans le langage de l'algèbre de Clifford d'espace-temps effectué par D. Hestenes [8 à 16], R. Boudet [17] [18], G. Casanova [19], H. Krüger [20], Gull, Doran et Lasenby [21 à 24] et alii. L'équation de Dirac s'écrit, dans l'algèbre de Clifford d'espace-temps $Cl_{1,3}$:

$$\begin{aligned}
&\partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi\gamma_0 + e\mathbf{A}\Psi \\
&\partial = \gamma^\mu\partial_\mu; \quad \mathbf{A} = A^\mu\gamma_\mu; e = \frac{q}{\hbar c}; \quad \gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j \\
&\gamma^0 = \gamma_0; \quad \gamma^j = -\gamma_j; \quad j = 1,2,3; \quad \gamma_0^2 = 1; \quad \gamma_j^2 = -1 \\
&\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0, \quad \mu \neq \nu
\end{aligned} \tag{2}$$

Les γ_μ sont les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace-temps, de signature $+---$. Ψ est une fonction sur l'espace-temps à valeur dans la sous-algèbre paire $Cl_{1,3}^+$ de l'algèbre d'espace-temps: tout multivecteur A de $Cl_{1,3}$ peut être écrit:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \tag{3}$$

où A_0 est un scalaire, A_1 un vecteur, A_2 un bivecteur, A_3 un trivecteur ou pseudovecteur et A_4 un 4-vecteur ou pseudoscalaire. Pour plus de détails, on pourra se référer à [5] et utiliser la représentation matricielle usuelle:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dans cette représentation matricielle, tout élément pair est de la forme:

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\bar{\Psi}_2 \\ \Psi_2 & \bar{\Psi}_1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \Psi_3 & \bar{\Psi}_4 \\ \Psi_4 & -\bar{\Psi}_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et la matrice colonne Ψ_d de l'équation de Dirac usuelle est simplement la colonne de gauche de la matrice 4×4 Ψ. Tout multivecteur A de la forme $A = A_0 + A_2 + A_4$ est dit pair, et l'ensemble des éléments pairs est une sous-algèbre notée $Cl^+_{1,3}$; en (2), Ψ est à valeur dans cette sous-algèbre. En l'absence de champ électromagnétique extérieur, (2) se réduit à :

$$\partial\Psi = m\Psi\gamma_{012}$$

et l'on obtient au second ordre :

$$\Box\Psi = \partial\partial\Psi = \partial(m\Psi\gamma_{012}) = m(\partial\Psi)\gamma_{012} = m(m\Psi\gamma_{012})\gamma_{012} = -m^2\Psi$$

ce qui donne bien (1). On peut donc considérer l'opérateur ∂ comme une sorte de racine carrée de l'opérateur d'Alembertien. Généralisons le calcul précédent en partant de:

$$\partial\Psi = m\Psi a \tag{7}$$

où m et a sont des éléments fixes de $Cl_{1,3}$ et où Ψ n'est pas nécessairement un élément pair. On a :

$$\Box\Psi = \partial\partial\Psi = \partial(m\Psi a)$$

Pour poursuivre le calcul, il faut obtenir un terme en $\partial\Psi$ au second membre. Par suite des propriétés d'anticommutation des γ_μ ceci est possible de deux façons seulement, suivant que m commute ou anticommute avec le gradient ∂. Si m commute avec ∂, c'est à dire si m est scalaire, on obtient :

$$\Box\Psi = m(\partial\Psi)a = m(m\Psi a)a = m^2\Psi a^2$$

donc on obtiendra (1) si a est de carré -1. Si m anticommute avec le gradient, m est pseudo-scalaire, c'est à dire :

$$m = m'\hat{i}; \quad \hat{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

Donc on obtiendra à nouveau (1) si a est de carré -1. Nous avons donc ici deux types d'équations du premier ordre aboutissant à l'équation de Klein-Gordon :

$$\partial\Psi = m\Psi a; \quad a^2 = -1 \tag{9}$$
$$\partial\Psi = m\hat{i}\Psi a; \quad a^2 = -1 \tag{10}$$

Et, en algèbre d'espace-temps, il existe non pas un seul objet de carré -1 comme le i indéterminé de la mécanique quantique, mais 4 types géométriques d'objets de carré -1: - des vecteurs comme γ_3 - des bivecteurs comme γ_{12} - des trivecteurs comme γ_{012} - le 4-vecteur $\hat{i}$. Car on a :

$$\gamma_3^2 = \gamma_{12}^2 = \gamma_{012}^2 = \hat{i}^2 = -1 \tag{11}$$

A partir de (7), il n'y a pas d'autre équation possible que les huit équations remarquées ici, car si, par exemple, a est un vecteur de carré -1, il existe une rotation R telle que :

$$a = R\gamma_3 R^{-1} \quad ; \quad aR = R\gamma_3 \tag{12}$$

Soit alors $\Psi = \Psi' R$. On a les équivalences:

$$\partial\Psi = m\Psi\gamma_3 \Leftrightarrow \partial\Psi' R = m\Psi' R\gamma_3 \Leftrightarrow \partial\Psi' R = m\Psi' aR \Leftrightarrow \partial\Psi' = m\Psi' a$$

donc toute équation du type (7) où a est un vecteur est équivalente à une équation du type (7) avec $a = \gamma_3$. Le même genre de calcul ramène tous les bivecteurs à γ_{12} et tous les trivecteurs à γ_{012}. Nous avons donc mis en évidence huit types d'équation possibles, 4 avec chacune des équations (9) et (10).

Calcul des variations

Il est très remarquable que toutes les équations d'onde de la physique peuvent être obtenues, par le calcul des variations, à partir de densités lagrangiennes; c'est ce qui a conduit L. de Broglie, dans sa thèse, à rapprocher le principe de moindre action de Maupertuis de celui de Fermat [3]. L'équation de Dirac en l'absence de champ extérieur se déduit d'une densité lagrangienne qui s'écrit, en algèbre d'espace-temps [23] :

$$\mathcal{L} = < \partial\Psi\gamma_{021}\tilde{\Psi} - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{13}$$

$\sim$ désigne le retourné: pour un multivecteur A tel que (3) on a:

$$\tilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4 \quad ; \quad (AB)^{\sim} = \tilde{B}\tilde{A} \quad ; \quad \tilde{A} = \gamma_0 A^{\dagger}\gamma_0 \tag{14}$$

et l'on notera:

$$< A >= A_0 \tag{15}$$

Nous utiliserons ici la dérivation par rapport à un multivecteur, présentée en [23], pour sa puissance et sa concision. L'équation de Lagrange s'écrit, avec nos notations:

$$d_{\tilde{\Psi}}\mathcal{L} = \partial(d_{(\partial\Psi)^{\sim}}\mathcal{L}) \tag{16}$$

Or on a:

$$\begin{aligned}
&d_{\tilde{\Psi}}(<\partial\Psi\gamma_{021}\tilde{\Psi}>) = \partial\Psi\gamma_{021}\\
&d_{\tilde{\Psi}}(<\Psi\tilde{\Psi}>) = 2\Psi\\
&d_{(\partial\Psi)^{\sim}}(<\partial\Psi\gamma_{021}\tilde{\Psi}>) = (\gamma_{021}\tilde{\Psi})^{\sim} = \Psi\gamma_{120} = -\Psi\gamma_{021}
\end{aligned} \tag{17}$$

et donc l'équation de Lagrange (16) donne:

$$\partial\Psi\gamma_{021} - 2m\Psi = -\partial\Psi\gamma_{021} \qquad \partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi\gamma_0 \tag{18}$$

Ici nous n'avons pas supposé que Ψ est seulement à valeur paire. Si Ψ est à valeur quelconque dans $Cl_{1,3}$ on peut écrire, de manière unique:

$$\Psi = \phi + \chi\gamma_0 \tag{19}$$

où φ et χ sont à valeur dans la sous-algèbre paire $Cl^+_{1,3}$. L'équation de Dirac (18) donne alors:

$$\begin{aligned}
\partial(\phi + \chi\gamma_0)\gamma_{21} &= m(\phi + \chi\gamma_0)\gamma_0\\
\partial\phi\gamma_{21} + \partial\chi\gamma_{021} &= m\phi\gamma_0 + m\chi
\end{aligned}$$

et en séparant, dans cette dernière équation, les parties paires et impaires, on obtient :

$$\partial\phi\gamma_{21} = m\phi\gamma_0 \qquad \partial\chi\gamma_{21} = m\chi\gamma_0$$

C'est à dire que φ et χ vérifient séparément l'équation de Dirac. C'est pour cette raison que l'on peut toujours ramener (2) à une équation où Ψ est seulement à valeur paire.

Examinons maintenant la formulation lagrangienne des 7 autres équations possibles. On peut voir que le passage de γ_{012} à γ_{12} s'effectue sans problème. On obtient la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} = <\partial\Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi} - m\Psi\tilde{\Psi}> \tag{20}$$

L'équation de Lagrange (16) donne ici:

$$\partial\Psi\gamma_{21} - 2m\Psi = -\partial\Psi\gamma_{21} \qquad \partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi \tag{21}$$

Et en séparant les parties paires et impaires on obtient, avec (19) :

$$\partial\phi\gamma_{21} = m\chi\gamma_0 \qquad \partial\chi\gamma_{21} = m\phi\gamma_0 \tag{22}$$

En ajoutant et retranchant ces équations on obtient:

$$\partial(\phi+\chi)\gamma_{21} = m(\phi+\chi)\gamma_0 \tag{23}$$
$$\partial(\phi-\chi)\gamma_{21} = -m(\phi-\chi)\gamma_0 \tag{24}$$

On obtient à nouveau deux équations de Dirac, et on pourrait donc croire qu'il n'y a ici rien de nouveau. Mais les masses, dans les équations (23) et (24), ne sont pas égales mais **opposées**. Une telle situation a été étudiée par Ziino [5] [6], et nous la retrouverons en détail par la suite.

La densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} = < \partial\Psi\gamma_3\tilde{\Psi}\hat{i} - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{25}$$

donne avec l'équation de Lagrange (16) :

$$\begin{gathered}\hat{i}\partial\Psi\gamma_3 - 2m\Psi = \partial(\gamma_3\tilde{\Psi}\hat{i})^{\sim} = -\hat{i}\partial\Psi\gamma_3 \\ \hat{i}\partial\Psi\gamma_3 = m\Psi \qquad \partial\Psi = m\hat{i}\Psi\gamma_3\end{gathered} \tag{26}$$

Séparons les parties paires et impaires:

$$\begin{gathered}\partial\phi + \partial\chi\gamma_0 = m\hat{i}\phi\gamma_3 + m\hat{i}\chi\gamma_{03} = m\phi\hat{i}\gamma_3 + m\chi\gamma_{03}\hat{i} \\ \partial\phi = -m\phi\gamma_{012} \qquad \partial\chi = m\chi\gamma_{012}\end{gathered}$$

On obtient donc ici aussi une équation de Dirac pour chacune des parties paires et impaires, mais avec des signes opposés pour les masses.

La densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} = < \partial\Psi\hat{i}\tilde{\Psi}\hat{i} - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{27}$$

donne avec (16):

$$\begin{gathered}\hat{i}\partial\Psi\hat{i} - 2m\Psi = \partial(\hat{i}\tilde{\Psi}\hat{i})^{\sim} = -\hat{i}\partial\Psi\hat{i} \\ \hat{i}\partial\Psi\hat{i} = m\Psi \qquad \partial\Psi = m\hat{i}\Psi\hat{i}\end{gathered} \tag{28}$$

Séparons les parties paires et impaires :

$$\begin{gathered}\partial\phi + \partial\chi\gamma_0 = m\hat{i}\phi\hat{i} + m\hat{i}\chi\gamma_0\hat{i} = -m\phi + m\chi\gamma_0 \\ \partial\phi = m\chi\gamma_0 \qquad \partial\chi = -m\phi\gamma_0\end{gathered} \tag{29}$$

et l'on a:

$$\partial(\phi\gamma_{12} + \chi) = m\chi\gamma_{012} - m\phi\gamma_0 = m(\phi\gamma_{12} + \chi)\gamma_{012} \tag{30}$$

$$\partial(\phi + \chi\gamma_{12}) = m\chi\gamma_0 - m\phi\gamma_{012} = -m(\phi + \chi\gamma_{12})\gamma_{012} \tag{31}$$

On obtient ici aussi deux équations de Dirac, avec des masses opposées, donc ces équations doivent être à rapprocher de (23)-(24).

Les quatre densités lagrangiennes (13), (20), (25), (27) donnent chacune une des huit équations du premier ordre compatibles avec l'équation de Klein-Gordon. On pourrait s'attendre à trouver, pour les quatre autres équations, des densités lagrangiennes analogues permettant de les retrouver à l'aide de l'équation de Lagrange. Mais il n'en est rien, et les quatre autres équations ne peuvent pas être obtenues à partir d'une densité lagrangienne. Voyons-le sur l'exemple de l'équation:

$$\partial\Psi = m\Psi\gamma_3 \tag{32}$$

pour laquelle on pourrait supposer l'existence d'une densité de la forme:

$$\mathcal{L} = < \partial\Psi\gamma_3\tilde{\Psi} - m\Psi\tilde{\Psi} >$$

Mais on obtiendrait alors:

$$\partial\Psi\gamma_3 - 2m\Psi = \partial(\gamma_3\tilde{\Psi})^{\sim} = \partial\Psi\gamma_3$$

ce qui ne donne pas du tout (32). Arrivés ici on pourrait penser que la forme cherchée pour la densité est mauvaise et essayer par exemple:

$$\mathcal{L} = < \partial\Psi\tilde{\Psi}\gamma_3 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{33}$$

qui donne :

$$\begin{aligned}&\gamma_3\partial\Psi - 2m\Psi = \partial(\tilde{\Psi}\gamma_3)^{\sim} = \partial\gamma_3\Psi \quad ; \quad (\gamma_3\partial - \partial\gamma_3)\Psi = 2m\Psi \\ &\gamma_3(\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2)\Psi = m\Psi \\ &\partial'\Psi = -m\gamma_3\Psi \quad ; \quad \partial' = \gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2\end{aligned} \tag{34}$$

Et ce n'est toujours pas (32). En fait il n'y a aucune possibilité d'obtenir cette équation par le calcul des variations à partir d'une densité lagrangienne, et cela ne tient pas au formalisme utilisé ici: on le verra aussi bien en décomposant (32) en équations numériques grâce à l'utilisation d'une base de $Cl_{1,3}$. Et il en est de même pour chacune des trois autres équations dont on n'a pas donné ici de densité lagrangienne. Il est donc très simple, en changeant fort peu de choses, de passer d'une équation avec formulation lagrangienne comme (26) à une équation sans formulation lagrangienne comme (32).

L'équation (34) mérite attention: partant d'une densité lagrangienne écrite dans l'espace-temps de dimension 4, on aboutit à une équation dans laquelle la troisième dimension d'espace a disparu de l'équation d'onde. Ceci indique une autre façon d'obtenir des équations compatibles avec l'équation de Klein-Gordon: il suffit de partir de densités lagrangiennes écrites dans un espace-temps de dimension 5 et telles que l'équation de Lagrange fasse disparaître la coordonnée supplémentaire, à la manière de (33)-(34). C'est ce que nous allons maintenant examiner.

Algèbre de 5-espace-temps de signature $+---+$.

On utilise ici un espace-temps de dimension 5, dont les quatre premières coordonnées sont celles de l'espace-temps usuel, de signature $+---$, et dont la cinquième dimension ne nécessite pas d'interprétation physique puisqu'elle disparaît des équations d'onde. L'algèbre de Clifford $Cl_{2,3}$ de cet espace est engendrée par les cinq vecteurs γ_M tels que:

$$\gamma_0^2 = \gamma_4^2 = 1\,;\; \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1\,;\; \gamma_M\gamma_N + \gamma_N\gamma_M = 0\,;\; M \neq N \quad (35)$$

On obtient une représentation matricielle de cette algèbre en complétant (4) par :

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -i\,\hat{i} \quad (36)$$

On notera $i, j, \dots$ les indices $1, 2, 3$; $\mu, \nu, \dots$ les indices $0, 1, 2, 3$ et $M, N, \dots$ les indices $0, 1, 2, 3, 4$. On utilise la notation usuelle de sommation sur les indices répétés hauts et bas. On utilise aussi:

$$\begin{gathered} \gamma^0 = \gamma_0 \quad ; \quad \gamma^j = -\gamma_j \quad ; \quad \gamma^4 = \gamma_4 \\ \partial = \gamma^\mu \partial_\mu \quad ; \quad \bar{\partial} = \gamma^M \partial_M = \partial + \gamma_4 \partial_4 \end{gathered} \quad (37)$$

Tout élément A de l'algèbre est maintenant somme d'un scalaire, d'un vecteur, ..., d'un 4-vecteur et d'un 5-vecteur:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \quad ; \quad \tilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5 \tag{38}$$

Détaillons la structure des A_r; on a:

$$\begin{aligned}
&A_1 = A^M\gamma_M = V + S'\gamma_4 \quad ; \quad V = A^\mu\gamma_\mu \quad ; \quad S' = A^4\\
&A_2 = A^{MN}\gamma_{MN} = B + V'\gamma_4 \quad ; \quad B = A^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} \quad ; \quad V' = A^{\mu 4}\gamma_\mu\\
&A_3 = A^{MNP}\gamma_{MNP} = T + B'\gamma_4 \quad ; \quad T = A^{\mu\nu\rho}\gamma_{\mu\nu\rho} \quad ; \quad B' = A^{\mu\nu 4}\gamma_{\mu\nu}\\
&A_4 = A^{MNPQ}\gamma_{MNPQ} = P\hat{i} + T'\gamma_4 \,;\, P = A^{0123}\gamma_{0123} \,;\, T' = A^{\mu\nu\rho 4}\gamma_{\mu\nu\rho}\\
&A_5 = A^{01234}\gamma_{01234} = P'i \quad ; \quad P' = A^{01234} \quad ; \quad i = \gamma_{01234} = \hat{i}\gamma_4
\end{aligned} \tag{39}$$

Et l'on a donc:

$$A = S + V + B + T + P\hat{i} + (S' + V' + B' + T' + P'\hat{i})\gamma_4 \tag{40}$$

où S et S' sont des scalaires, V et V' des vecteurs d'espace-temps, B et B' des bivecteurs, T et T' des trivecteurs $P\hat{i}$ et $P'\hat{i}$ des pseudoscalaires d'espace-temps. On retrouve ici le fait bien connu qu'en augmentant d'une unité la dimension de l'espace, on double la dimension de l'algèbre de Clifford. La sous-algèbre paire $Cl^+_{2,3}$ formé des éléments de la forme:

$$A = A_0 + A_2 + A_4 = S + B + P\hat{i} + (V' + T')\gamma_4$$

a même dimension que l'algèbre d'espace-temps, 16.

Considérons la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} = < \bar{\partial}\Psi\tilde{\Psi}\gamma_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{41}$$

L'équation de Lagrange (16) devient ici:

$$d_{\tilde{\Psi}}\mathcal{L} = \bar{\partial}(d_{(\bar{\partial}\Psi)^\sim}\mathcal{L}) \tag{42}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_4\bar{\partial}\Psi - 2m\Psi = \bar{\partial}(\tilde{\Psi}\gamma_4)^\sim = \bar{\partial}\gamma_4\Psi \qquad (\gamma_4\bar{\partial} - \bar{\partial}\gamma_4)\Psi = 2m\Psi\\
\gamma_4\partial\Psi = m\Psi \qquad \partial\Psi = m\gamma_4\Psi
\end{gathered} \tag{43}$$

Cette équation donne au second ordre:

$$\Box\Psi = \partial\partial\Psi = \partial(m\gamma_4\Psi) = -m\gamma_4\partial\Psi = -m\gamma_4(m\gamma_4\Psi) = -m^2\Psi \tag{44}$$

et l'on obtient donc bien (1). Si l'on cherche à généraliser (41) en partant de:

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}\Psi N\tilde{\Psi}\gamma_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{45}$$

On obtient:

$$\gamma_4\bar{\partial}\Psi N - 2m\Psi = \bar{\partial}(N\tilde{\Psi}\gamma_4)^{\sim} = \bar{\partial}\gamma_4\Psi\tilde{N}$$

On obtient donc comme précédemment l'élimination de la coordonnée supplémentaire si $N = \tilde{N}$, et dans ce cas on obtient:

$$(\gamma_4\bar{\partial} - \bar{\partial}\gamma_4)\Psi N = 2m\Psi \quad , \quad \gamma_4\partial\Psi N = m\Psi \quad , \quad \partial\Psi = m\gamma_4\Psi N^{-1} \tag{46}$$

Au second ordre, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\Box\Psi = \partial\partial\Psi = \partial(m\gamma_4\Psi N^{-1}) &= -m\gamma_4\partial\Psi N^{-1} \\ &= -m\gamma_4(m\gamma_4\Psi N^{-1})N^{-1} = -m^2\Psi N^{-2}\end{aligned}$$

donc on obtiendra l'équation de Klein-Gordon si $N^2 = 1$, ce qui donne comme possibilités: $N = 1$ qui nous redonne (41), $N = \gamma_0$ ou $N = \gamma_4$ ou $N = i\gamma_3$. On aura donc trois densités lagrangiennes supplémentaires à étudier:

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}\Psi\gamma_0\tilde{\Psi}\gamma_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{47}$$

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}\Psi\gamma_4\tilde{\Psi}\gamma_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{48}$$

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}\Psi i\gamma_3\tilde{\Psi}\gamma_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{49}$$

Algèbre de 5-espace-temps de signature $+ - - - -$.

Supposons maintenant que la dimension supplémentaire soit du genre espace. L'algèbre de Clifford $Cl_{1,4}$ de ce 5-espace-temps est engendré par les 5 vecteurs γ'_M tels que

$$\gamma_0'^2 = 1 \quad ; \quad \gamma_j'^2 = \gamma_4'^2 = -1 \quad ; \quad \gamma'_M\gamma'_N + \gamma'_N\gamma'_M = 0 \quad , \quad M \neq N \tag{50}$$

On obtient une représentation matricielle de cette algèbre en posant:

$$\gamma'_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & -\gamma_\mu \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

On utilisera ici :

$$\begin{aligned}\gamma'^0 = \gamma'_0 \quad ; \quad \gamma'^j = -\gamma'_j \quad ; \quad \gamma'^4 = -\gamma'_4 \\ \partial' = \gamma'^\mu\partial_\mu \quad ; \quad \bar{\partial}' = \gamma'^M\partial_M = \partial' + \gamma'^4\partial_4\end{aligned} \tag{52}$$

On aura comme précédemment (38), (39) et (40): il suffit d'y remplacer les γ par les γ'.

Considérons la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}'\Psi N\tilde{\Psi}\gamma'_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{53}$$

L'équation de Lagrange donne:

$$\begin{gathered} d_{\tilde{\Psi}}\mathcal{L} = \bar{\partial}'(d_{(\bar{\partial}'\Psi)^\sim}\mathcal{L}) \\ \gamma'_4\bar{\partial}'\Psi N - 2m\Psi = \bar{\partial}'(N\tilde{\Psi}\gamma'_4)^\sim = \bar{\partial}'\gamma'_4\Psi\tilde{N} \end{gathered} \tag{54}$$

On doit donc prendre ici aussi $\tilde{N} = N$ et l'on obtient:

$$\begin{aligned} &(\gamma'_4\bar{\partial}' - \bar{\partial}'\gamma'_4)\Psi N = 2m\Psi \\ &\gamma'_4\partial'\Psi N = m\Psi \qquad \partial'\Psi = -m\gamma'_4\Psi N^{-1} \end{aligned} \tag{55}$$

Ceci donne au second ordre:

$$\begin{aligned} \Box\Psi = \partial'\partial'\Psi = \partial'(-m\gamma'_4\Psi N^{-1}) = m\gamma'_4\partial'\Psi N^{-1} \\ = m\gamma'_4(-m\gamma'_4\Psi N^{-1})N^{-1} = m^2\Psi N^{-2} \end{aligned}$$

donc on obtiendra l'équation de Klein-Gordon si $N^2 = -1$. On aura ici aussi 4 types d'équation possibles suivant que N vaut $\gamma'_3, \gamma'_4, \gamma'_{0124}, \gamma'_{0123}$. Donc on aura à étudier les densités lagrangiennes:

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}'\Psi\gamma'_3\tilde{\Psi}\gamma'_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{56}$$

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}'\Psi\gamma'_4\tilde{\Psi}\gamma'_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{57}$$

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}'\Psi\gamma'_{0124}\tilde{\Psi}\gamma'_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{58}$$

$$\mathcal{L} =< \bar{\partial}'\Psi\gamma'_{0123}\tilde{\Psi}\gamma'_4 - m\Psi\tilde{\Psi} > \tag{59}$$

Invariances de jauge

Les invariances de jauge sont d'autant plus importantes en physique que l'on pense aujourd'hui pouvoir décrire toutes les forces connues avec ce type de théorie. L'invariance de jauge électrique de la théorie de Dirac est l'invariance sous les transformations:

$$\Psi_d \to \Psi'_d = e^{ia}\Psi_d \tag{60}$$

Comme la multiplication de la matrice colonne Ψ_d par i correspond à la multiplication de la matrice 4×4 Ψ par γ_{21} à droite, l'invariance de jauge électrique prend en algèbre d'espace-temps la forme:

$$\Psi \to \Psi' = \Psi e^{a\gamma_{21}} \tag{61}$$

L'invariance de jauge peut être rendue locale si l'on complète l'équation d'onde et le lagrangien par un terme de potentiel électromagnétique. Ainsi l'équation de Dirac (2) découle de la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} =< \partial\Psi\gamma_{021}\tilde{\Psi} - m\Psi\tilde{\Psi} - e\mathbf{A}\Psi\gamma_0\tilde{\Psi} > \tag{62}$$

La transformation de jauge (61) est un cas particulier des transformations de la forme:

$$\Psi \to \Psi' = \Psi e^{aN} \tag{63}$$

où N est un multivecteur fixe et a un nombre réel. Regardons à quelles conditions la densité (20) est invariante sous les transformations de jauge (63). On a:

$$\Psi'\tilde{\Psi}' = \Psi e^{aN} e^{a\tilde{N}}\tilde{\Psi}$$

donc on obtiendra l'invariance de ce terme si $\tilde{N} = -N$, c'est à dire si N est un bi ou un trivecteur. Dans ce cas, et si en outre a est fixe, on a:

$$\partial\Psi'\gamma_{21}\tilde{\Psi}' = \partial\Psi e^{aN}\gamma_{21}e^{-aN}\tilde{\Psi}$$

donc on l'aura l'invariance si N commute avec γ_{21}. L'espace vectoriel des bi et trivecteurs commutant avec γ_{21} est engendré par $\gamma_{21}, \gamma_{021}, \gamma_{30}, \gamma_{123}$.

Lorsque a est variable et non pas fixe, on a:

$$\begin{aligned}\partial\Psi'\gamma_{21}\tilde{\Psi}' &= \partial\Psi e^{aN}\gamma_{21}e^{-aN}\tilde{\Psi} + \partial a\Psi e^{aN}N\gamma_{21}e^{-aN}\tilde{\Psi}\\ &= \partial\Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi} + \partial a\Psi N\gamma_{21}\tilde{\Psi}\end{aligned}$$

donc le lagrangien doit contenir un terme en $N\gamma_{21}$. Par exemple, pour l'invariance de jauge locale électrique, où $N = \gamma_{21}$, nous devons remplacer (20) par la densité lagrangienne:

$$\mathcal{L} =< \partial\Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi} - m\Psi\tilde{\Psi} - e\mathbf{A}\Psi\tilde{\Psi} > \tag{64}$$

L'intérêt de l'utilisation de l'espace-temps de dimension 5 est qu'il étend le domaine des invariances de jauge du type (63), puisque l'espace des bi et trivecteurs est de dimension deux fois plus grande. On peut donc espérer y trouver les invariances de jauge qui nous manquent.

Lien avec la théorie de Ziino.

Décomposons Ψ, dans (64), en:

$$\begin{aligned}&\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad ; \quad \Psi_1 = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi\gamma_{30}) \quad ; \quad \Psi_2 = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi\gamma_{30})\\ &\Psi_1\gamma_{30} = \Psi_1 \quad ; \quad \Psi_2\gamma_{30} = -\Psi_2\end{aligned} \tag{65}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\Psi\tilde{\Psi} &= (\Psi_1 + \Psi_2)(\tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2) = \Psi_1\tilde{\Psi}_1 + \Psi_1\tilde{\Psi}_2 + \Psi_2\tilde{\Psi}_1 + \Psi_2\tilde{\Psi}_2\\ \Psi_1\tilde{\Psi}_1 &= \Psi_1\gamma_{30}(\Psi_1\gamma_{30})^{\sim} = \Psi_1\gamma_{30}\gamma_{03}\tilde{\Psi}_1 = -\Psi_1\tilde{\Psi}_1 : \quad \Psi_1\tilde{\Psi}_1 = 0\\ \Psi_2\tilde{\Psi}_2 &= \Psi_2\gamma_{03}(\Psi_2\gamma_{03})^{\sim} = \Psi_2\gamma_{03}\gamma_{30}\tilde{\Psi}_2 = -\Psi_2\tilde{\Psi}_2 : \quad \Psi_2\tilde{\Psi}_2 = 0\\ \Psi\tilde{\Psi} &= \Psi_1\tilde{\Psi}_2 + \Psi_2\tilde{\Psi}_1\end{aligned} \tag{66}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\partial\Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi} &= \partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1 + \partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2 + \partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1 + \partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2\\ \partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1 &= \partial\Psi_1\gamma_{30}\gamma_{21}\gamma_{03}\tilde{\Psi}_1 = -\partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1\\ \partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2 &= \partial\Psi_2\gamma_{03}\gamma_{21}\gamma_{30}\tilde{\Psi}_2 = -\partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2\\ \partial\Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi} &= \partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2 + \partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1\\ \mathcal{L} &= < \partial\Psi_1\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2 + \partial\Psi_2\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1 - 2m(\Psi_1\tilde{\Psi}_2 + \Psi_2\tilde{\Psi}_1)\\ &\qquad - 2e\mathbf{A}(\Psi_1\tilde{\Psi}_2 + \Psi_2\tilde{\Psi}_1) >\end{aligned} \tag{67}$$

Nous avons donc deux équations de Lagrange à utiliser:

$$\begin{aligned}&d_{\tilde{\Psi}_2}\mathcal{L} = \partial(d_{(\partial\Psi_2)^{\sim}}\mathcal{L})\\ &\partial\Psi_1\gamma_{21} - 2m\Psi_1 - 2e\mathbf{A}\Psi_1 = \partial(\gamma_{21}\tilde{\Psi}_1)^{\sim} = -\partial\Psi_1\gamma_{21}\\ &\partial\Psi_1\gamma_{21} = m\Psi_1 + e\mathbf{A}\Psi_1\end{aligned} \tag{68}$$

et de même :

$$\begin{aligned}&d_{\tilde{\Psi}_1}\mathcal{L} = \partial(d_{(\partial\Psi_1)^{\sim}}\mathcal{L})\\ &\partial\Psi_2\gamma_{21} - 2m\Psi_2 - 2e\mathbf{A}\Psi_2 = \partial(\gamma_{21}\tilde{\Psi}_2)^{\sim} = -\partial\Psi_2\gamma_{21}\\ &\partial\Psi_2\gamma_{21} = m\Psi_2 + e\mathbf{A}\Psi_2\end{aligned} \tag{69}$$

Donc Ψ_1 et Ψ_2 vérifient séparément l'équation qui se déduit de (64). Séparons maintenant Ψ_1 et Ψ_2 en leurs parties paires et impaires:

$$\Psi_1 = \phi_1 + \chi_1\gamma_0 \quad ; \quad \Psi_2 = \phi_2 + \chi_2\gamma_0 \tag{70}$$
$$\phi_1\gamma_{30} = \phi_1 \quad ; \quad \chi_1\gamma_{30} = -\chi_1 \tag{71}$$
$$\phi_2\gamma_{30} = -\phi_2 \quad ; \quad \chi_2\gamma_{30} = \chi_2 \tag{72}$$

(68) nous donne:

$$\begin{aligned} \partial\phi_1\gamma_{21} + \partial\chi_1\gamma_{021} &= m\phi_1 + m\chi_1\gamma_0 + e\mathbf{A}\phi_1 + e\mathbf{A}\chi_1\gamma_0 \\ \partial\phi_1\gamma_{21} &= m\chi_1\gamma_0 + e\mathbf{A}\phi_1 \\ \partial\chi_1\gamma_{21} &= m\phi_1\gamma_0 + e\mathbf{A}\chi_1 \end{aligned} \tag{73}$$

En ajoutant et en retranchant ces deux équations, on obtient:

$$\partial\phi_1'\gamma_{21} = m\phi_1'\gamma_0 + e\mathbf{A}\phi_1' \quad ; \quad \phi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \chi_1) \tag{74}$$
$$\partial\chi_1'\gamma_{21} = -m\chi_1'\gamma_0 + e\mathbf{A}\chi_1' \quad ; \quad \chi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \chi_1) \tag{75}$$

La première de ces deux équations est une équation de Dirac (2). La seconde aussi, mais avec un changement de signe de la masse. Comme ϕ_1 et χ_1 sont pairs et vérifient (71), on a nécessairement, avec (4) et (5):

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} U & U\sigma_3 \\ U\sigma_3 & U \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} V & -V\sigma_3 \\ -V\sigma_3 & V \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\phi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U+V & (U-V)\sigma_3 \\ (U-V)\sigma_3 & U+V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y\sigma_3 \\ Y\sigma_3 & X \end{pmatrix} \tag{77}$$

$$\chi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} U-V & (U+V)\sigma_3 \\ (U+V)\sigma_3 & U-V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & X\sigma_3 \\ X\sigma_3 & Y \end{pmatrix} \tag{78}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(U+V) \quad ; \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(U-V) \tag{79}$$

et X et Y sont de la forme:

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} a_3 & -\bar{a}_4 \\ a_4 & \bar{a}_3 \end{pmatrix} \tag{80}$$

Donc les colonnes de gauche de ϕ_1' et χ_1' sont respectivement:

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Psi_{\bar{f}} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Psi_f = \gamma^5 \Psi_f \tag{81}$$

On a utilisé ici les notations classiques, qui sont aussi celles de Ziino pour la matrice γ^5, même si cette matrice a été précédemment notée γ_4. On peut voir en détaillant les calculs matriciels que les équations (74) et (75) sont exactement équivalentes à:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) + im]\Psi_f = 0 \tag{82}$$

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - im]\Psi_{\bar{f}} = 0 \tag{83}$$

L'interprétation de Ziino, suivant O. Costa de Beauregard, est que la seconde équation est la conjuguée de charge de la première, ce qui revient à dire, en algèbre d'espace-temps, que χ_1' est le conjugué de ϕ_1'. Cette conjugaison de charge est à prendre au sens global: le conjugué de charge de l'électron de charge e, de masse m dans le potentiel électromagnétique extérieur $\mathbf{A}$ est le positron de charge $-e$, de masse $-m$ dans le potentiel extérieur $-\mathbf{A}$. Ziino définit les deux champs chiraux massifs :

$$\begin{aligned} \Psi_f^{ch} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\gamma^5)\Psi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_f - \Psi_{\bar{f}}) \\ \Psi_{\bar{f}}^{ch} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma^5)\Psi_{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_f + \Psi_{\bar{f}}) \end{aligned} \tag{84}$$

Ce sont respectivement les colonnes de gauche de χ_1 et ϕ_1, qui sont donc, en algèbre d'espace-temps, les champs chiraux massifs de Ziino. Ceci permet de rendre compte de la “violation maximale de parité” dans les interactions faibles, sans avoir besoin de la prescription ad hoc de courant “$V-A$”. En effet on a:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_f^{(a)}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\Psi_f^{(b)} &= \bar{\Psi}_f^{ch(a)}\gamma^\mu\Psi_f^{ch(b)} \\ \bar{\Psi}_{\bar{f}}^{(a)}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\Psi_{\bar{f}}^{(b)} &= \bar{\Psi}_{\bar{f}}^{ch(a)}\gamma^\mu\Psi_{\bar{f}}^{ch(b)} \end{aligned} \tag{85}$$

de sorte que les courants “fermionique $V-A$” et “antifermionique $V+A$” deviennent ici des courants “chiraux V”, et il ne peut pas y avoir de courant "fermionique $V+A$" et "antifermionique $V-A$", car une seule paire de courants est possible, par suite des égalités:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_f^{(a)}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\Psi_f^{(b)} &= \bar{\Psi}_{\bar{f}}^{(a)}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\Psi_{\bar{f}}^{(b)}\\ \bar{\Psi}_{\bar{f}}^{(a)}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\Psi_{\bar{f}}^{(b)} &= \bar{\Psi}_f^{(a)}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\Psi_f^{(b)}\end{aligned} \tag{86}$$

Les conséquences et les conclusions de Ziino [5] [6] peuvent donc être reprises entièrement ici. Notons que les équations (82)-(83) ne découlent pas de la densité lagrangienne usuelle (62) de la théorie de Dirac, mais de la densité (64). C'est donc (64) et non (62) qui doit être prise en considération pour rendre compte de la violation maximale de parité des interactions faibles. Notons aussi que les équations de Ziino s'obtiennent, à partir de (64), en ne prenant que la partie en Ψ_1. Il est donc nécessaire de s'intéresser aussi à la partie en Ψ_2. D'après (70) et (72), (69) donne :

$$\begin{aligned}\partial\phi_2\gamma_{21}+\partial\chi_2\gamma_{021} &= m\phi_2+m\chi_2\gamma_0+e\mathbf{A}\phi_2+e\mathbf{A}\chi_2\gamma_0\\ \partial\phi_2\gamma_{21} &= m\chi_2\gamma_0+e\mathbf{A}\phi_2\\ \partial\chi_2\gamma_{21} &= m\phi_2\gamma_0+e\mathbf{A}\chi_2\end{aligned} \tag{87}$$

En ajoutant et en retranchant ces deux équations, on obtient:

$$\partial\phi_2'\gamma_{21}=m\phi_2'\gamma_0+e\mathbf{A}\phi_2' \quad ; \quad \phi_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2+\chi_2) \tag{88}$$

$$\partial\chi_2'\gamma_{21}=-m\chi_2'\gamma_0+e\mathbf{A}\chi_2' \quad ; \quad \chi_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2-\chi_2) \tag{89}$$

La première de ces deux équations est une équation de Dirac (2). La seconde aussi, mais avec un changement de signe de la masse. Comme ϕ_2 et χ_2 sont pairs et vérifient (72), on a nécessairement, avec (4) et (5):

$$\phi_2=\begin{pmatrix}U & -U\sigma_3\\ -U\sigma_3 & U\end{pmatrix} \quad ; \quad \chi_2=\begin{pmatrix}V & V\sigma_3\\ V\sigma_3 & V\end{pmatrix} \tag{90}$$

$$\phi_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}U+V & -(U-V)\sigma_3\\ -(U-V)\sigma_3 & U+V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & -Y\sigma_3\\ -Y\sigma_3 & X\end{pmatrix} \tag{91}$$

$$\chi_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}U-V & -(U+V)\sigma_3\\ -(U+V)\sigma_3 & U-V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y & -X\sigma_3\\ -X\sigma_3 & Y\end{pmatrix} \tag{92}$$

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(U+V)\quad ;\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(U-V) \tag{93}$$

où X et Y sont toujours de la forme (80). Donc les colonnes de gauche de ϕ'_2 et χ'_2 sont respectivement:

$$\Psi_f=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\-a_3\\-a_4\end{pmatrix}\quad ;\quad \Psi_{\bar f}=\begin{pmatrix}a_3\\a_4\\-a_1\\-a_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}\Psi_f=-\gamma^5\Psi_f \tag{94}$$

Posons maintenant:

$$\begin{aligned}\Psi_f^{ch}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\gamma^5)\Psi_f=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_f+\Psi_{\bar f})\\ \Psi_{\bar f}^{ch}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma^5)\Psi_{\bar f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\Psi_f+\Psi_{\bar f})\end{aligned} \tag{95}$$

Ce sont maintenant les colonnes de gauche respectivement de ϕ_2 et $-\chi_2$. Comme précédemment, on obtient les égalités (85) et (86), donc le champ Ψ_2 se comporte en tous points comme le champ Ψ_1, sauf pour la conjugaison de charge où apparaît une différence de signe. Nous obtenons donc une paire électron-1 électron-2 alors que la physique actuelle utilise une paire électron-neutrino de l'électron. On peut envisager une solution à cette divergence: supposons que l'onde Ψ_2 d'un "électron-2" soit écrite $\Psi_2=\Psi_1\chi$, où Ψ_1 est l'onde d'un "électron-1" vérifiant (68). On a:

$$\begin{aligned}\partial(\Psi_1\chi)&=m\Psi_1\chi+e\mathbf{A}\Psi_1\chi\\ \partial\Psi_1\chi+\gamma^\mu\Psi_1\partial_\mu\chi&=m\Psi_1\chi+e\mathbf{A}\Psi_1\chi\\ \gamma^\mu\Psi_1\partial_\mu\chi&=0\end{aligned} \tag{96}$$

le champ χ est donc vu comme un champ sans masse ni charge, analogue à celui du neutrino.

Parmi les autres équations précédemment rencontrées, certaines permettent la séparation de Ψ_1 et Ψ_2, d'autres ne le permettent pas: (13) et (25) ne permettent pas de séparer Ψ_1 et Ψ_2, (20) et (27) le permettent. Dans $Cl_{2,3}$, la séparation est possible avec (41) et (48) mais pas avec (47) ou (49). Dans $Cl_{1,4}$, la séparation est possible pour (57) et (59), et impossible pour (56) et (58). Par exemple pour (27) on a:

$$\mathcal{L}=<\partial\Psi\hat{\imath}\tilde{\Psi}\hat{\imath}-m\Psi\tilde{\Psi}>=<\partial\Psi_1\hat{\imath}\tilde{\Psi}_2\hat{\imath}-m\Psi_1\tilde{\Psi}_2+\partial\Psi_2\hat{\imath}\tilde{\Psi}_1\hat{\imath}-m\Psi_2\tilde{\Psi}_1> \tag{97}$$

Comme tous les fermions fondamentaux sont soumis à l'interaction faible, et comme la violation maximale de parité dans ces interactions est, si l'on suit le raisonnement de Ziino, lié à cette décomposition en Ψ_1 et Ψ_2, on peut penser que les densités lagrangiennes intéressantes à étudier sont (20), (27), (41), (48), (57) et (59).

Groupes d'invariance de jauge.

On a vu précédemment que les transformations de jauge (63) laissent la densité (20) invariante si $\tilde{N} = -N$ et si $N\gamma_{21} = \gamma_{21}N$, donc si N appartient à l'algèbre de Lie engendrée par $[\gamma_{21}, \gamma_{021}, \gamma_{03}, \gamma_{123}]$. Les transformations de jauge (63) forment un groupe G qui est le produit direct du groupe $U(1)$ engendré par γ_{21} et du groupe G' engendré par $\gamma_{021}, \gamma_{03}, \gamma_{123} : G = U(1) \times G'$. G est un groupe à 4 paramètres, produit direct d'un groupe à 1 et à 3 paramètres, ce qui est aussi le cas du groupe $U(1) \times SU(2)$ de la théorie électro-faible. Mais G' n'est pas $SU(2)$, car les générateurs de G' sont, l'un de carré -1, les deux autres de carré 1. Toute théorie de jauge construite à partir de (20) sera donc assez différente du modèle standard.

Pour la densité lagrangienne (27), on a comme conditions $\tilde{N} = -N$ et $N\hat{i} = \hat{i}N$, donc le groupe de jauge est le groupe de Lorentz orthochrone, engendré par: $[\gamma_{21}, \gamma_{32}, \gamma_{13}, \gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}]$. Pour la densité lagrangienne (41), on n'a qu'une seule condition sur N : $\tilde{N} = -N$, donc le groupe de jauge est le groupe engendré par les bi et trivecteurs, et comme nous sommes en dimension 5, ce groupe est un groupe très vaste à 20 paramètres, donc cette densité devrait être particulièrement intéressante à étudier.

Les groupes de jauge des densités (48), (57) et (59) sont tous trois des groupes à 12 paramètres, car pour (48) on a comme conditions $\tilde{N} = -N$ et $N\gamma_4 = \gamma_4 N$, donc le groupe de jauge est engendré par les $\gamma_{j0}, \hat{i}\gamma_{j0}, \gamma_{j04}, \hat{i}\gamma_{j04}, j = 1, 2, 3$. Il en est de même pour les densités (57) et (59), à la seule condition de remplacer les γ par les γ'. Le groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ agissant sur les quarks du modèle standard est aussi un groupe à 12 paramètres. Il pourrait être intéressant de comparer le modèle standard et ses 3 paires de quarks aux densités (48), (57) et (59) qui nous fournissent chacune une paire $\Psi_1\Psi_2$, soit en tout 6 paires particule - antiparticule.

L'étude précédente suggère qu'une classification complète et définitive des fermions fondamentaux ne pourra pas être effectuée sans une étude détaillée des équations d'onde relativistes. Cette classification permettrait de comprendre les différences existant entre les leptons et les quarks. Elle amènerait sans doute aussi de sérieuses modifications par rapport au modèle standard actuel.

Références

[1] L. de Broglie: *L'électron magnétique*, (Herman, Paris 1934)
[2] L. de Broglie: *Théorie générale des particules à spin* (Gauthier-Villars, Paris 1954)
[3] L. de Broglie: *Recherches sur la théorie des quantas* (thèse) réimprimée dans: Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol 17 n°1
[4] C. Daviau & G. Lochak: *Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire.* (Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol.16 n°1, 1991)
[5] C. Daviau: Equation de Dirac non linéaire (thèse), Université de Nantes, 5-3-1993.
[6] G. Ziino: *Massive chiral fermions: a natural account of chiral phenomenology in the framework of Dirac's fermion Theory.* Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol.14 n°4, 1989.
[7] G. Ziino: *On the true meaning of "maximal parity violations": ordinary mirror symmetry regained from "CP symmetry".* Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol.16, n°3, 1991.
[8] D. Hestenes: *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach, New York 1966)
[9] D. Hestenes: *Real Spinor Fields.* (Jour. of Math. Physics, Vol. 8 n°4 1967)
[10] D. Hestenes: *Local observables in the Dirac theory.* (Journal of Mathematical Physics, Vol.14 n°7 1973)
[11] D. Hestenes: *Proper particle mechanics.* (Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10 1974)
[12] D. Hestenes: *Proper dynamics of a rigid point particle.* (Journal of Mathematical Physics, Vol. 15 n°10 1974)
[13] D. Hestenes: *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* (Journal of Mathematical Physics, Vol. 16 n°3 1975)
[14] D. Gurtler & D. Hestenes: *Consistency in the formulation of the Dirac, Pauli and Schrödinger theories*, J. Math. Phys. Vol.16 n°3, 1975.
[15] D. Hestenes: *Space-time Structure of Weak and Electromagnetic Interactions*, Found. of Physics, Vol.12 n°2, 1982
[16] D. Hestenes: *The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics*, Found. of Physics, Vol.20 n°10, 1990.
[17] R. Boudet: *La géométrie des particules du groupe $SU(2)$ et l'algèbre réelle d'espace-temps.* (Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 13 n°1, 1988)
[18] R. Boudet: *Conservation laws in the Dirac theory*, J. Math. phys. Vol.26 n°4, 1985
[19] G. Casanova: *L'Algèbre vectorielle*, PUF, Paris 1976.
[20] H. Krüger: *Classical Limit of Real Dirac Theory: Quantization of Relativistic Central Field Orbits.* Found. of Physics (novembre 1993)

[21] S. Gull, A. Lasenby & C. Doran: *Imaginary Numbers are not Real. the Geometric Algebra of Spacetime*. Found. of Physics (novembre 1993)
[22] C. Doran, A. Lasenby & S. Gull: *States and Operators in the Spacetime Algebra*. Fond. of physics (novembre 1993)
[23] A. Lasenby, C. Doran & S. Gulle: *A Multivector Derivative Approach to Lagrangian Field Theory*. Found. of physics (novembre 1993)
[24] S. Gull, A. Lasenby & C. Doran: *Electron Paths, Tunnelling and Diffraction in the Spacetime Algebra*. Found. of Physics (novembre 1993)

(Manuscrit reçu le 28 juillet 1993)