Formalisme de la théorie électromagnétique baroque. Application á l'étude de l'électron étendu magnétiquement chargé

P. Paillère

Centre d'Etudes de Limeil-Valenton
94195 Villeneuve-Saint-Georges cedex

RÉSUMÉ. L'étude des équations de Maxwell "baroques" - dans lesquelles un champ électrique et un champ magnétique scalaires viennent s'ajouter au champ tensoriel habituel - a été développée dans l'hypothèse où l'existence d'un courant magnétique est prise en compte.

Une expression nouvelle du tenseur d'énergie - impulsion électromagnétique où figurent le champ électromagnétique, son adjoint et les champs scalaires a été obtenue.

Au moyen de ce tenseur il est possible d'expliciter les forces électromagnétiques, de formuler de nouvelles équations du mouvement du type B.M.T. dans le cas de l'électron étendu, et de montrer que l'énergie ne peut rester finie que dans la mesure où l'électron possède une charge magnétique non nulle.

Descripteurs proposés : électromagnétisme, vide, champ électrique scalaire, champ magnétique scalaire, charge magnétique, électron fluide étendu, énergie infinie, tenseur d'energie-impulsion, B.M.T.

ABSTRACT. The study of the "baroque" Maxwell equations in which a scalar electric field and a scalar magnetic field become attached to the usual tensor field, was elaborated based on the hypothesis that the existence of a magnetic current is taken into account.

This paper expounds a new formulation of the energy-momentum tensor using the electromagnetic field, its dual tensor and the scalar fields. With the help of this tensor it is possible to clarify the electromagnetic forces, to formulate new B.M.T. motion equations for the extended electron and to show that the energy of the electron cannot become infinite as long as the electron has a magnetic charge other than zero.

Electromagnetic theory,vacuo, electric scalar field, magnetic scalar field, magnetic charge, extended fluid electron infinite energy, energy-momentum tensor, B.M.T.

1. Introduction

Dans un article publié en 1956, Madame Takashi Ohmura avait exposé une nouvelle formulation du champ électromagnétique, basée sur l'introduction dans les équations de Maxwell d'un champ électrique scalaire, e, et d'un champ magnétique scalaire, h ([1]).

Son intention était de résoudre les difficultés liées à la charge électrique ponctuelle en électromagnétisme classique, comme par exemple la valeur infinie de l'énergie propre.

Apparemment cette nouvelle formulation de la théorie électromagnétique n'a pas eu d'impact notable dans le monde scientifique car on ne trouve pas beaucoup d'articles s'y référant dans la littérature spécialisée, sinon ceux de Moses ([2],[3]).

Il semble cependant intéressant de réexaminer les conséquences du système de ces équations de Maxwell "baroques",- par opposition à classiques-, lorsqu'elles sont appliquées à un modèle d'électron "étendu" comme par exemple celui qui est suggéré dans les références [4] et [5] relatives au "Passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargmann-Michel-Telegdi".

Cette théorie de l'élection étendue fait un usage intensif de la fonction densité ϖ définie à partir des invariants de Dirac Ω et $\widehat{\Omega}$ par l'expression :

$$\varpi = \sqrt{\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2} \qquad (1-1)$$

En particulier les densités volumiques de masse et de charge électrique ont respectivement pour expression $m_0\varpi$ et $q_e\varpi$.

Le développement de la théorie conduit à utiliser l'élément de volume dV défini par :

$$dV = d\left(\frac{1}{\varpi}\right) \qquad (1-2)$$

Cet élément de volume doit être tel que :

$$\int m_0\varpi dV = m_0 \ , \quad \int q_e\varpi dV = q_e \qquad (1-3)$$

A cet effet, il est nécessaire que ϖ soit bornée par deux valeurs limites ϖ_1 et ϖ_2 telles que :

$$\int_{\varpi=\varpi_1}^{\varpi=\varpi_2} \varpi d\left(\frac{1}{\varpi}\right) = 1$$

C'est à dire :

$$\varpi_1 = e\varpi_2 \qquad (1-4)$$

Il en résulte que le volume limité par ϖ_1 et ϖ_2 a pour expression :

$$V = \int_{\varpi=\varpi_1}^{\varpi=\varpi_2} d\left(\frac{1}{\varpi}\right) = \frac{1}{\varpi_2} - \frac{1}{\varpi_1} = V_2 - V_1 \qquad (1-5)$$

Le volume V apparaît comme la différence entre un volume extérieur $V_2 = \frac{1}{\varpi_2}$ et un volume intérieur $V_1 = \frac{1}{\varpi_1}$.

Si l'on admet l'existence d'un axe de révolution, on est amené à conclure que le volume V a la structure d'un tore ou d'une coquille. Le point remarquable qui mérite d'être souligné est constitué par l'existence d'un vide intérieur de volume non nul $\frac{1}{\varpi_1}$.

Ces considérations impliquent que la densité ϖ est constante sur chacune des surfaces englobant la "substance" de l'électron. Ce dernier apparaît comme "feuilleté" : l'intégration des densités s'effectue de feuillet en feuillet en passant de $\frac{1}{\varpi}$ à $\frac{1}{\varpi} + d\left(\frac{1}{\varpi}\right)$.

Il a été établi en page 117 de la référence [4] que les densités ϖ_1 et ϖ_2 sont telles que :

$$\varpi_1 = \varpi_0 e^{-\frac{7}{2}} \ , \quad \varpi_2 = \varpi_0 e^{-\frac{9}{2}} \qquad (1-6)$$

ϖ_0 représente une densité de référence telle que, si V_0 désigne le volume classique de l'électron défini par :

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad \text{avec} \quad r_0 = 2,8179.10^{-13} cm$$

on ait [1]

1

$$\varpi_0 = 6,07.10^{38} (cm^3)^{-1}$$
$$\varpi_1 = 18,329.10^{36} (cm^3)^{-1}$$
$$\varpi_2 = 6,743.10^{36} (cm^3)^{-1}$$

$$\varpi_0 V_0 = 2e^4 \,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (1-7)$$

Il en résulte que le volume V défini par (1-5) a pour expression :

$$V = \frac{1}{\varpi_2} - \frac{1}{\varpi_1} = \frac{2e^4 \,\mathrm{sh}(\frac{1}{2})}{\varpi_0} = V_0 \qquad (1-8)$$

Ce résultat signifie que le volume de la substance électronique est constant [2], de sorte que la densité moyenne a pour expression :

$$\frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0 \varpi_0}{2e^4 \,\mathrm{sh}(\frac{1}{2})}$$

Le volume de "l'entité électron" est différent. Le volume hors tout s'exprime par $\frac{1}{\varpi_2}$ et le volume de la cavité par $\frac{1}{\varpi_1}$.

En particulier, dans le cas d'une coquille sphérique (état de repos) :

$$\begin{aligned} &V = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) \quad \text{avec} \\ &\frac{4\pi}{3} R_2^2 = \varpi_2 \ , \ \frac{4\pi}{3} R_1^3 = \varpi_1 \ , \ \varpi_1 = e \varpi_2 \end{aligned} \qquad (1-9)$$

de sorte que

$$R_2 = e^{\frac{1}{3}} R_1 \quad (e^{\frac{1}{3}} \sim 1,395) \qquad (1-10)$$

En outre :

$$V = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \quad \text{d'où}$$

$$\left(\frac{R_1}{r_0}\right)^3 = \frac{1}{e-1} < 1 \ , \quad \left(\frac{R_2}{r_0}\right)^3 = \frac{e}{e-1} > 1 \qquad (1-11)$$

Soit $R_1 < r_0 < R_2$

[2] Il y a là un problème de point de vue relativiste

L'électron classique se situerait entre les sphères de rayon R_1 et R_2. On vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{R_1+R_2}{r_0} &= \frac{e^{\frac{1}{3}}+1}{(e-1)^{\frac{1}{3}}} = 2,00010022 \\ \frac{R_2-R_1}{r_0} &= \frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \sim 0,3 \end{aligned} \qquad (1-12)$$

Ce modèle entraîne donc que l'épaisseur de la coquille et les rayons R_1 et R_2 sont constants pour r_0 donné. Mais il faut rappeler qu'il s'agit là d'un modèle idéal d'électron sphérique au repos.

Il est évident que dans la perspective coulombienne classique ces structures doivent éclater sous l'action de forces répulsives diamétralement opposées. Mais comme ce n'est pas le cas, le problème se pose de savoir pourquoi il n'y a pas "éclatement".

L'étude suivante voudrait répondre à cette question en prenant en compte quatre éléments de base :

1) les structures géométriques qui viennent d'être évoquées;
2) le mouvement de l'électron fluide (cf. [4], [5]) sous l'action de nouvelles forces électromagnétiques tirées de :
3) la formulation des équations de Maxwell avec champs scalaires exposée en [10];
4) l'introduction d'une charge magnétique ([7], [8]).

A ce sujet rappelons la question indirecte posée par Dirac en [8] :

"The question arises as to whether an elementary particle can have both a charge and a pole. The classical equations of motion (...) can be immediately extended to this case, but the hamiltonian theory meets with some difficulties (...). It does not seem possible to answer the question reliably until a satisfactory treatement of the interaction of a particle with its own field is obtained."

Ayant donc supposé que l'électron comporte une charge magnétique en plus de sa charge pondérale et de sa charge électrique, on envisage l'hypothèse de l'électron "étendu" régi par le tenseur hydrodynamique d'énergie-impulsion développé en [4] et [5], et soumis à une force électromagnétique comprenant la force de Lorentz classique à laquelle viennent s'ajouter des termes où figurent l'adjoint du tenseur classique de champ électromagnétique couplé au spin, ainsi que des termes comportant les champs scalaires qui font l'originalité de la référence [1]. La première partie de ce travail expose la théorie de "électromagnétisme baroque", expression qui recouvre la prise en compte des champs scalaires.

La seconde partie concerne l'étude de la stabilité de l'électron selon deux critères :

1) La moyenne des accélérations relativistes est nulle sur le volume de l'électron;
2) La moyenne des dérivées totales par rapport au temps d'univers du vecteur de Pauli-Lubanski (parallèle au spin) est nulle sur le volume de l'électron.

2. L'électromagnétisme baroque (cf. [10])

Les équations de Maxwell peuvent être généralisées par l'introduction de deux champs scalaires - électrique, $\tilde{e}$, et magnétique, $\tilde{h}$ - et d'un courant magnétique. Elle s'écrivent alors [3] :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\left(F^{\lambda\mu}-g^{\lambda\mu}\tilde{e}\right)&=-\frac{4\pi}{c}j_e^\lambda\\ \nabla_\mu\left(G^{\lambda\mu}-g^{\lambda\mu}\tilde{h}\right)&=-\frac{4\pi}{c}j_m^\lambda\end{aligned}\qquad(2-1)$$

Les $g^{\lambda\mu}$ sont les composantes contravariantes du tenseur métrique (signature $+---$). j_e^λ désigne le quadrivecteur densité de courant électrique et j_m^λ le quadrivecteur densité de "courant magnétique".

Les équations (2-1) s'écrivent aussi :

$$\begin{aligned}F^{\lambda\mu};\mu&=-\frac{4\pi}{c}j_e^\lambda+\tilde{e}'^\lambda\\ G^{\lambda\mu};\mu&=-\frac{4\pi}{c}j_m^\lambda+\tilde{h}'^\lambda\end{aligned}\qquad(2-2)$$

3

$$\begin{aligned}G^{\lambda\mu}&=\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\rho}F_{\sigma\rho}/2!\sqrt{-g}\,, & F_{\sigma\rho}&=\sqrt{-g}\varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu}G^{\lambda\mu}/2!\\ G_{\lambda\mu}&=-\sqrt{-g}\varepsilon_{\lambda\mu\sigma\rho}F^{\sigma\rho}/2!\,, & F^{\sigma\rho}&=-\varepsilon^{\sigma\rho\lambda\mu}G_{\lambda\mu}/2!\sqrt{-g}\end{aligned}\qquad(cf.[6])$$

soit en posant

$$I_e^\lambda = \frac{4\pi}{c} j_e^\lambda - \tilde{e}'^\lambda \,, \quad I_m^\lambda = \frac{4\pi}{c} j_m^\lambda - \tilde{h}'^\lambda \tag{2 – 3}$$

$$F^{\lambda\mu};\mu = -I_e^\lambda \,, \quad G^{\lambda\mu};\mu = -I_m^\lambda \tag{2 – 4}$$

Les gradients des champs scalaires $\tilde{e}$ et $\tilde{h}$ figurent aux seconds membres des équations (2-2) et (2-4) en tant que termes de source, au même titre que j_e et j_m.

Compte tenu de l'antisymétrie des tenseurs F et G on a :

$$F^{\lambda\mu};\mu;\lambda = 0 \,, \quad G^{\lambda\mu};\mu;\lambda = 0$$

de sorte que

$$I_e^\lambda;\lambda = 0 \,, \quad I_m^\lambda;\lambda = 0 \tag{2 – 5}$$

et, compte tenu de (2-3), en désignant le dalembertien par $\Box$:

$$\Box\tilde{e} = \frac{4\pi}{c} j_e^\lambda;\lambda \,, \quad \Box\tilde{h} = \frac{4\pi}{c} j_m^\lambda;\lambda \tag{2 – 6}$$

Suivant T.Ohmura ([1]), on suppose que les champs F et G résultent de la superposition d'un champ n°1 correspondant aux charges électriques libres et d'un champ n°2 correspondant aux charges magnétiques libres. Cette hypothèse se traduit par :

$$\begin{aligned} &F_{(1)}^{\lambda\mu};\mu = -I_e^\lambda \;, \quad G_{(1)}^{\lambda\mu};\mu = 0 \\ &F_{(1)\alpha\beta;\gamma} + F_{(1)\beta\gamma;\alpha} + F_{(1)\gamma\alpha;\beta} = 0 \\ &G_{(1)\alpha\beta;\gamma} + G_{(1)\beta\gamma;\alpha} + G_{(1)\gamma\alpha;\beta} = -\sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} I_e^\rho \end{aligned} \tag{2 – 7}$$

et

$$\begin{aligned} &F_{(2)}^{\lambda\mu};\mu = 0 \quad , G_{(2)}^{\lambda\mu};\mu = -I_m^\lambda \\ &F_{(2)\alpha\beta;\gamma} + F_{(2)\beta\gamma;\alpha} + F_{(2)\gamma\alpha;\beta} = \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} I_m^\rho \\ &G_{(2)\alpha\beta;\gamma} + G_{(2)\beta\gamma;\alpha} + G_{(2)\gamma\alpha;\beta} = 0 \end{aligned} \tag{2 – 8}$$

Il en résulte pour le champ total

$$\begin{aligned} &F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} I_m^\rho \\ &G_{\alpha\beta;\gamma} + G_{\beta\gamma;\alpha} + G_{\gamma\alpha;\beta} = -\sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} I_e^\rho \end{aligned} \tag{2 – 9}$$

La différence de signe est dûe à la définition des adjoints.

Au champ $F_{(1)}$ correspond le quadrivecteur potentiel A^λ. Au camp $G_{(2)}$ correspond le quadrivecteur B^λ appelé pseudopotentiel (cf [7]).

On montre que (cf [10]) :

$$\begin{aligned} F^{\lambda\mu} &= \bigtriangledown^\lambda A^\mu - \bigtriangledown^\mu A^\lambda - \bigtriangledown_\rho \left(\frac{\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu}}{\sqrt{-g}} B_\nu \right) \\ G^{\lambda\mu} &= \bigtriangledown_\rho \left(\frac{\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu}}{\sqrt{-g}} A_\nu \right) + \bigtriangledown^\lambda B^\mu - \bigtriangledown^\mu B^\lambda \end{aligned} \qquad (2-10)$$

soit sous forme vectorielle, en metrique de Minkowski :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\bigtriangledown} A^\circ - \bigtriangledown_\circ \overrightarrow{A} - \left[\overrightarrow{\bigtriangledown} \wedge \overrightarrow{B} \right] \\ \overrightarrow{H} &= \left[\overrightarrow{\bigtriangledown} \wedge \overrightarrow{A} \right] - \overrightarrow{\bigtriangledown} B^\circ - \bigtriangledown_\circ \overrightarrow{B} \qquad \text{cf [7]} \end{aligned} \qquad (2-11)$$

Le tenseur d'énergie - impulsion du champ électromagnetique est obtenu à partir des relations (2-4)(cf [10]) en les contractant respectivement par $F_{\lambda\rho}$ et $G_{\lambda\rho}$, ce qui entraîne :

$$F_{\lambda\rho} F^{\lambda\mu};\mu + G_{\lambda\rho} G^{\lambda\mu};\mu = F_{\rho\lambda} I_e^\lambda + G_{\rho\lambda} I_m^\lambda \qquad (2-12)$$

A l'aide de (2-9) on montre que :

$$\begin{aligned} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\rho};\mu &= \frac{1}{4} \bigtriangledown_\rho \left(F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \right) + G_{\rho\nu} I_m^\nu \\ F_{\lambda\rho} F^{\lambda\mu};\mu &= \bigtriangledown_\mu (F_{\lambda\rho} F^{\lambda\mu}) - \frac{1}{4} \bigtriangledown_\rho \left(F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \right) - G_{\rho\nu} I_m^\nu \\ G^{\lambda\mu} G_{\lambda\rho};\mu &= \frac{1}{4} \bigtriangledown_\rho \left(G^{\lambda\mu} G_{\lambda\mu} \right) + F_{\rho\nu} I_e^\nu \\ G_{\lambda\rho} G^{\lambda\mu};\mu &= \bigtriangledown_\mu (G_{\lambda\rho} G^{\lambda\mu}) - \frac{1}{4} \bigtriangledown_\rho \left(G^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \right) - F_{\rho\nu} I_e^\nu \end{aligned} \qquad (2-13)$$

Il en résulte :

$$\bigtriangledown_\mu (F^{\rho\lambda} {F_\lambda}^\mu + G^{\rho\lambda} {G_\lambda}^\mu = 2(F^{\rho\nu} I_{e\nu} + G^{\rho\nu} I_{m\nu}) \qquad (2-14)$$

Soit en posant

$$T^{\lambda\mu} = \frac{F^{\lambda\rho}F_\rho{}^\mu + G^{\lambda\rho}G_\rho{}^\mu}{8\pi}$$

$$f^\lambda = \frac{F^{\lambda\rho}I_{e\rho} + G^{\lambda\rho}I_{m\rho}}{4\pi} \tag{2-15}$$

$$T^{\lambda\mu};\mu = -f^\lambda \tag{2-16}$$

Le tenseur $T^{\lambda\mu}$ qui est tel que $T^\lambda{}_\lambda = 0$ représente le tenseur d'energie-impulsion associé au champ (F, G) mais il ne prend pas en compte les champs scalaires $\tilde{e}, \tilde{h}$. Ceux-ci interviennent au niveau de f^λ défini en (2-15) par

$$f^\lambda = \frac{F^{\lambda\rho}I_{e\rho} + G^{\lambda\rho}I_{m\rho}}{4\pi}$$

La prise en compte des relations (2-3) permet d'écrire :

$$f^\lambda = \frac{1}{c}(F^{\lambda\rho}j_{e\rho} + G^{\lambda\rho}j_{m\rho}) - \frac{1}{4\pi}(F^{\lambda\rho}\tilde{e},\rho + G^{\lambda\rho}\tilde{h},\rho)$$

A ce niveau on fait l'hypothèse que les courants électriques et magnétique sont respectivement définis par :

$$j_{e\rho} = q_e\varpi c u_\rho \quad \text{avec} \quad u^\rho u_\rho = 1 \tag{2-17}$$

$$j_{m\rho} = q_m\varpi c w_\rho \quad \text{avec} \quad w^\rho w_\rho = -1 \tag{2-18}$$

où u^ρ désigne le quadrivecteur vitesse d'univers des électrons et w^ρ le vecteur de Pauli-Lubanski parallèle au spin.

Avec

$$\rho = q_e\varpi \ , \quad \mu = q_m\varpi \tag{2-19}$$

ρ et μ respectivement densité de charge électrique et densité de charge magnétique, f^λ s'écrit

$$f^\lambda = \rho F^{\lambda\rho}u_\rho + \mu G^{\lambda\rho}w_\rho - \frac{F^{\lambda\rho}\tilde{e},\rho + G^{\lambda\rho}\tilde{h},e}{4\pi} \tag{2-20}$$

Comme :

$$\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\sigma}\tilde{e},\sigma = \nabla_\sigma\left(\frac{\tilde{e}F^{\lambda\sigma}}{4\pi} - \frac{\tilde{e}^2 g^{\lambda\sigma}}{8\pi}\right) + \tilde{e}\rho u^\lambda$$
$$\frac{1}{4\pi}G^{\lambda\sigma}\tilde{h},\sigma = \nabla_\sigma\left(\frac{\tilde{h}G^{\lambda\sigma}}{4\pi} - \frac{\tilde{h}^2 g^{\lambda\sigma}}{8\pi}\right) + \tilde{h}\mu w^\lambda \qquad (2-21)$$

la relation (2-16) s'écrit :

$$\nabla_\sigma\left\{\frac{F^{\lambda\rho}F_\rho{}^\sigma + G^{\lambda\rho}G_\rho{}^\sigma - 2(\tilde{e}F^{\lambda\sigma} + \tilde{h}G^{\lambda\sigma}) + g^{\lambda\sigma}(\tilde{e}^2 + \tilde{h}^2)}{8\pi}\right\}$$
$$= -\left\{\rho(F^{\lambda\sigma} - \tilde{e}g^{\lambda\sigma})u_\sigma + \mu(G^{\lambda\sigma} - \tilde{h}g^{\lambda\sigma})w_\sigma\right\} \qquad (2-22)$$

Soit, avec des notations évidentes :

$$\nabla_\sigma \Theta^{\lambda\sigma} = -\varphi^\lambda \qquad (2-22)'$$

Les tenseurs du champ électromagnétique baroque $\tilde{F}^{\lambda\rho}$ et $\tilde{G}^{\lambda\rho}$ sont alors définis par :

$$\tilde{F}^{\lambda\rho} = F^{\lambda\rho} - g^{\lambda\rho}\tilde{e}$$
$$\tilde{G}^{\lambda\rho} = G^{\lambda\rho} - g^{\lambda\rho}\tilde{h} \qquad (2-23)$$

Il en résulte que :

$$\Theta^{\lambda\sigma} = \frac{\tilde{F}^{\lambda\rho}\tilde{F}_\rho{}^\sigma + \tilde{G}^{\lambda\rho}\tilde{G}_\rho{}^\sigma}{8\pi} \qquad (2-24)$$

$$\varphi^\lambda = \rho\tilde{F}^{\lambda\sigma}\mu_\sigma + \mu\tilde{G}^{\lambda\sigma}w_\sigma \qquad (2-25)$$

alors que les équations de départ (2-1) deviennent :

$$\tilde{F}^{\lambda\mu};\mu = -\frac{4\pi}{c}j_e^\lambda$$
$$\tilde{G}^{\lambda\mu};\mu = -\frac{4\pi}{c}j_m^\lambda \qquad (2-26)$$

Il y a lieu de remarquer que :

1) les tenseurs $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ du champ baroque ne sont pas antisymétriques et ne peuvent plus être considérés comme mutuellement adjoints.
2) Le tenseur d'énergie-impulsion $\Theta^{\lambda\sigma}$ n'est pas symétrique à la différence de $T^{\lambda\sigma}$. Ceci pose problème au niveau des équations d'univers d'Einstein $S^{\lambda\mu} + \chi\Theta^{\lambda\mu} = 0$ [4].
3) En métrique de Minkowski, l'énergie du champ baroque a pour expression :

$$\Theta^0{}_0 = \frac{E^2 + H^2 + \tilde{e}^2 + \tilde{h}^2}{8\pi} \qquad (2-27)$$

Si le "vecteur" de Poynting est défini par $\Theta^i{}_0$ on peut écrire, sous forme vectorielle :

$$\vec{\Theta} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{4\pi} - \frac{\tilde{e}\vec{E} + \tilde{h}\vec{H}}{4\pi} \qquad (2-28)$$

3. Stabilité de l'électron

3.1 Les équation d'évolution

Ainsi que nous l'avons déjà rappelé dans l'introduction, le modèle d'électron ponctuel fournit une énergie propre infinie. Pour remédier à cette situation, suivant [1] on introduit deux champs scalaires $\tilde{e}$ et $\tilde{h}$ dont la finalité est de constituer un "champ de cohésion" permettant à l'électron étendu - et non plus ponctuel-, de ne pas exploser sous l'action de son propre champ. La densité de force qui s'exerce en tout point d'un électron placé dans un champ global $F^{\lambda\mu}$ est donné par l'expression (2-25) dans laquelle le symbole φ^λ a été remplacé par f^λ :

$$f^\lambda = q_e\varpi F^{\lambda\sigma}u_\sigma + q_m\varpi G^{\lambda\sigma}w_\sigma - \varpi(q_e\tilde{e}u^\lambda + q_m\tilde{h}w^\lambda) \qquad (3-1)$$

avec q_m et q_e tels que, selon [8] :

[4] Cette asymétrie est en accord avec le point de vue de Monsieur O. Costa de Beauregard.

$$q_e q_m = n\frac{\hbar c}{2} \qquad n \ \text{ entier} \geq 0 \tag{3-2}$$

Il résulte de (3-2) que :

$$q_m = kq_e \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{n}{2}\frac{\hbar c}{q_e^2} \tag{3-3}$$

de sorte que, puisque $q_e\varpi = \rho$ et $q_m\varpi = \mu$:

$$f^\lambda = \rho(F^{\lambda\sigma}u_\sigma + kG^{\lambda\sigma}w_\sigma) - \rho(\tilde{e}u^\lambda + k\tilde{h}w^\lambda) \tag{3-4}$$

C'est cette force f^λ qui va être substituée à la force de Lorentz dans la théorie de l'électron fluide B.M.T. exposée en [4] et [5]. [5] L'équation du mouvement s'écrit toujours :

$$m_0c^2\varpi\cos Y\dot{u}^\alpha = f^\alpha + \Phi^\alpha \tag{3-5}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\varpi = \sqrt{\Omega^2 + \widehat{\Omega}^2} \quad (\Omega \text{ et } \widehat{\Omega} : \text{ invariants de Dirac})\\
&Y \ : \ \text{angle d'Yvon-Takabayasi, } \operatorname{tg} Y = \widehat{\Omega}/\Omega\\
&\Phi^\alpha = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\widehat{\Phi}_\beta \ , \quad \Phi^\alpha u\alpha = 0\\
&\widehat{\Phi}_\beta = \tilde{p}_{,\beta} - \dot{s}_\beta - s^\lambda_{;\lambda}u_\beta - s^\lambda\mu_{\beta;\lambda} + \frac{s_\beta\dot{\varpi}}{\varpi}\\
&s^\alpha = 2Km_0c^2\varpi u^\alpha \ , \quad s^\alpha_{;\alpha} = s_\alpha\dot{u}^\alpha\\
&\varpi\dot{\tilde{p}} = \dot{\varpi}\tilde{p} \ , \quad \tilde{p} = Km_0c^2\varpi\\
&K = \frac{g_0 - 2}{4g_0} \ = 2,90091.10^{-4}\\
&g_0 = 2\left(1 + \frac{q_e^2}{2\pi\hbar c}\right) = 2 + \frac{\alpha}{\pi}
\end{aligned} \tag{3-6}$$

On pose :

$$\cos Y = \frac{2}{\tilde{g}}, \quad |\tilde{g}| \geq 2 \tag{3-7}$$

[5] Ce modèle avait permis de retrouver la correction de masse de l'électron sans utiliser un quelconque processus de renormalisation.

A partir de l'équation du mouvement (3-5) et de la condition d'orthogonalité de la vitesse d'univers u^λ et du vecteur de Pauli-Lubanski w_λ

$$u^\lambda w_\lambda = 0\,, \tag{3-8}$$

on arrive après de laborieux calculs aux deux équations :

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \varpi \dot{u}^\alpha &= \frac{\tilde{g}}{2(1+2K\tilde{g})} q_e \varpi \left(F^{\alpha\beta} u_\beta + k G^{\alpha\beta} w_\beta\right) \\ &+ \frac{\tilde{g}}{2(1+2K\tilde{g})} K m_0 c^2 \varpi \left(\frac{\varpi'^\alpha}{\varpi} - \frac{\dot{\varpi}}{\varpi} u^\alpha\right) - \frac{\tilde{g} q_e \varpi}{2(1+2k\tilde{g})} \left(\tilde{e} u^\alpha + k\tilde{h} w^\alpha\right) \end{aligned} \tag{3-9}$$

et :

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \varpi \dot{w}^\mu &= \frac{\tilde{g}}{2} q_e \varpi F^{\mu\rho} w_\rho + \frac{\tilde{g}^2}{1+2K\tilde{g}} K q_e \varpi \left(w_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta\right) u^\mu \\ &- \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}}{(1+2K\tilde{g})} K m_0 c^2 \varpi \left(\frac{\varpi,\alpha}{\varpi} w^\alpha\right) u^\mu - \frac{\tilde{g}}{2(1+2K\tilde{g})} q_e \varpi k \tilde{h} u^\mu \end{aligned} \tag{3-10}$$

(3-9) et (3-10) constituent les nouvelles équations B.M.T. pour un électron fluide étendu. Il faut leurs adjoindre l'expression de $\tilde{g}$ obtenue en [4], [5] :

$$\tilde{g} = \frac{2}{1 + K \log \frac{\varpi}{\varpi_0}} \tag{3-11}$$

celle de ϖ_0 :

$$\varpi_0 V_0 = e^{\frac{9}{2}} - e^{\frac{7}{2}}\,, \quad V_0 = \frac{4\pi r_0^3}{3} \quad \text{(cf. (1-7))} \tag{3-12}$$

et enfin les divergences de ϖu^ρ et ϖw^ρ obtenues en [4], [5]

$$\nabla_\rho \left(\varpi u^\rho\right) = 0 \tag{3-13}$$

$$\nabla_\rho \left(\varpi w^\rho\right) = \frac{2 m_0 c}{\hbar} \varpi \sin Y \tag{3-14}$$

Remarque : La contraction de (3-9) par u_α conduit à la relation :

$$\tilde{e} = k u_\alpha G^{\alpha\beta} w_\beta \tag{3-15}$$

soit, au repos en métrique de Minkowski :

$$\tilde{e} = k(\overrightarrow{H}.\overrightarrow{\varpi}) \qquad (3-16)$$

"Le champ scalaire électrique $\tilde{e}$ est égal à k fois le produit scalaire du champ magnétique $\overrightarrow{H}$ par le vecteur $\overrightarrow{\varpi}$ vecteur de Pauli-Lubanski parallèle au spin.

3.2 L'integration des équations B.M.T. sur le volume de l'électron et les conditions d'équilibre

A partir de $dV = d\left(\frac{1}{\varpi}\right)$, on montre que entre les valeurs ϖ_1 et ϖ_2 :

$$\begin{gathered}\int \varpi dV = 1 \ , \quad \int \frac{\tilde{g}\varpi dV}{2(1+2K\tilde{g})} = 1 \ , \quad \int \frac{\tilde{g}\varpi}{2} dV = \frac{g_0}{2} \\ \int \frac{K\tilde{g}^2\varpi}{1+2K\tilde{g}} dV = \frac{g_0}{2} - 1 \ , \quad \int \frac{\tilde{g} dV}{2(1+2K\tilde{g})} = 9,374.10^{-38}\end{gathered} \qquad (3-17)$$

d'où les équations B.M.T. moyennes :

$$\begin{aligned} m_0c^2\langle\dot{u}^\alpha\rangle =& q_e\left[\langle F^{\alpha\beta}u_\beta\rangle + k\langle G^{\alpha\beta}w_\beta\rangle\right] \\ &+ Km_0c^2\langle\frac{\varpi'^{\alpha}}{\varpi} - \frac{\dot{\varpi}}{\varpi}u^\alpha\rangle - q_e\left[\langle\tilde{e}u^\alpha\rangle + k\langle\tilde{h}w^\alpha\rangle\right] \end{aligned} \qquad (3-18)$$

$$\begin{aligned} m_0c^2\langle\dot{w}^\mu\rangle =& \frac{g_0}{2}q_e\langle F^{\mu\rho}w_\rho\rangle + \left(\frac{g_0}{2} - 1\right)q_e\langle(w_\alpha F^{\alpha\beta}u_\beta)u^\mu\rangle \\ &- Km_0c^2\langle\frac{\varpi,\alpha}{\varpi}w^\alpha u^\mu\rangle - q_e k\langle\tilde{h}u^\mu\rangle \end{aligned} \qquad (3-19)$$

Si l'on impose $k = 0$, $\tilde{e} = 0$, $\tilde{h} = 0$ on retrouve les équations de l'électron fluide B.M.T. ([4],[5]). Si en outre on impose la rigidité : $\frac{\nabla^\alpha\varpi}{\varpi} = 0$, $\dot{\varpi} = 0$, on retrouve le classique électron B.M.T.

Une première condition d'équilibre consiste à écrire que l'accélération moyenne résultant de l'integration sur le volume de l'électron des accélérations de tous ses points est nulle :

$$\langle\dot{u}^\alpha\rangle = 0 \qquad (3-20)$$

Cette relation signifie que la trajectoire de l'électron est de type géodésique.

Une deuxième condition consiste à écrire que la moyenne sur le volume de l'électron de la dérivée par rapport au temps d'univers, s, du vecteur de Pauli-Lubanski -parallèle au spin est nulle :

$$\langle \dot{w}^\mu \rangle = 0 \qquad (3-21)$$

Cette relation signifie que le spin reste parellèle à une direction fixée, le long de la trajectoire. On admet aussi que la dérivée de ϖ par rapport à s est nulle le long de la trajectoire

$$\langle \dot{\varpi} \rangle = 0 \qquad (3-22)$$

Dans ces conditions, les équations "moyennes" s'écrivent en posant :

$$U_0 = \frac{m_0 c^2}{|q_e|} \qquad (3-23)$$

$$\begin{aligned} 0 =& \langle F^{\alpha\beta} u_\beta \rangle + k \langle G^{\alpha\beta} w_\beta \rangle \\ & - K U_0 \langle \frac{{\varpi'}^\alpha}{\varpi} \rangle - \langle \tilde{e} u^\alpha \rangle - k \langle \tilde{h} w^\alpha \rangle \end{aligned} \qquad (3-24)$$

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{g_0}{2} \langle F^{\mu\rho} w_\rho \rangle + \left(\frac{g_0}{2} - 1 \right) \langle w_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta u^\mu \rangle \\ & + K U_0 \langle \frac{\varpi,_\alpha}{\varpi} w^\alpha u^\mu \rangle - k \langle \tilde{h} u^\mu \rangle \end{aligned} \qquad (3-25)$$

Une simplification draconienne de ces équations consiste à écrire que l'électron est rigide, c'est-à-dire, en métrique de Minkowski :

$$u^i = 0 \ , \quad u^0 = 1 \qquad (3-26)$$

soit, puisque $w^\alpha u_\alpha = 0$,

$$w^0 = 0 \ , \quad \eta_{ij} w^i w^j = -1 \qquad (3-27)$$

c'est-à-dire

$$(\vec{w}\,\vec{w}) = 1\ ,\ |\vec{w}| = 1 \qquad (3-28)$$

Dans ces conditions, en supposant, pour être compatible avec (3-16) que

$$\langle \frac{\varpi'^{0}}{\varpi} \rangle = 0 \quad \text{(pas d'évolution dans le temps)} \qquad (3-29)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{e} \rangle = k\langle(\vec{H}.\vec{w})\rangle \\
&\langle \vec{E} \rangle + k\langle[\vec{E} \wedge \vec{w}]\langle + KU_0\langle \frac{\vec{\nabla}\varpi}{\varpi} \rangle = k\langle \tilde{h}\vec{w} \rangle \\
&\langle[\vec{H} \wedge \vec{w}]\rangle = 0 \\
&\langle(\vec{E}.\vec{w})\rangle + KU_0\langle \left(\frac{\vec{\nabla}\varpi}{\varpi}.\vec{w} \right) \rangle = k\langle \tilde{h} \rangle
\end{aligned} \qquad (3-30)$$

D'où :

$$\vec{H} \| \vec{w} \quad (\text{ou } -\vec{w}) \qquad (3-31)$$

$$\langle \tilde{e} \rangle = \pm k\langle H \rangle \qquad (3-32)$$

Dans l'hypothèse où le produit des moyennes est égal à la moyenne du produit, la quatrième équation de (3-30) se ramène à la seconde. On retiendra la quatrième :

$$k\langle \tilde{h} \rangle = \langle(\vec{E}.\vec{w})\rangle + KU_0\langle \left(\frac{\vec{\nabla}\varpi}{\varpi}.\vec{w} \right) \rangle \qquad (3-33)$$

Dans le cas de l'électron sphérique au repos autour du diamètre portant $\vec{w}$, on a :

$$\langle \left(\frac{\vec{\nabla}\varpi}{\varpi}.\vec{w} \right) \rangle = 0 \qquad (3-34)$$

De sorte que

$$\langle\tilde{h}\rangle = \frac{\langle(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{w})\rangle}{k} \qquad (3-35)$$

Il faut remarquer que, sans considérer les valeurs moyennes, mais en gardant les hypothèses de rigidité, on aurait obtenu directement :

$$\begin{aligned} &\tilde{e} = k\left(\overrightarrow{H}.\overrightarrow{w}\right) \\ &\overrightarrow{E} + k\left[\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{w}\right] + KU_0\frac{\overrightarrow{\nabla}\varpi}{\varpi} = k\tilde{h}\overrightarrow{w} \\ &\left[\overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{w}\right] = 0 \end{aligned} \qquad (3-36)$$

D'où

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{H} \parallel \pm \overrightarrow{w} \\ &\tilde{e} = k\left(\overrightarrow{H}.\overrightarrow{w}\right) \\ &k\tilde{h} = \left(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{w}\right) + KU_0\left(\frac{\overrightarrow{\nabla}\varpi}{\varpi}.\overrightarrow{w}\right) \end{aligned} \qquad (3-37)$$

Les équations (3-37) comme (3-30) expriment les relations entre les champs vectoriels ($\overrightarrow{E}\,,\overrightarrow{H}$) et les scalaires ($\tilde{e}\,,\tilde{h}$) dans le cas d'un électron sphérique "rigide" au repos.

4. Conclusion. Le problème de l'énergie

L'énergie de l'électron a été calculée en [4],[5] à partir de la théorie hydrodynamique qui fournit pour la densité d'énergie W :

$$W = m_0c^2\varpi\left[1 + 2K + K\log\left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)\right] \qquad (4-1)$$

de sorte que l'énergie totale peut être écrite :

$$W_T = \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} Wd\left(\frac{1}{\varpi}\right) = (1-2K)m_0c^2 = 8,1814.10^{-7}erg \qquad (4-2)$$

On admet que la densité W est aussi exprimée par l'expression (2-27).

$$W = \frac{E^2 + H^2 + \tilde{e}^2 + \tilde{h}^2}{8\pi} \qquad (4-3)$$

de sorte que l'on doit avoir :

$$\begin{aligned}\frac{W_T}{V_0} &= (1-2K)\frac{m_0c^2}{V_0} = \langle E^2\rangle + \langle H^2\rangle + \langle \tilde{e}^2\rangle + \langle \tilde{h}^2\rangle \\ &= \langle E^2\rangle + \langle H^2\rangle + k^2\langle(\overrightarrow{H}.\overrightarrow{w})\rangle^2 + \frac{1}{k^2}[\langle(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{w})\rangle]^2\end{aligned} \qquad (4-4)$$

A supposer que $\langle(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{w})\rangle \neq 0$, si l'on impose $k = 0$ (i.e. $q_m = 0$) dans la relation (4-4) on obtient

$$W_T \infty$$

Or $W_T = (1-2K)m_0c^2$ est une quantité finie, ce qui impose $q_m \neq 0$, c'est-à-dire d'après (3-3)

$$n > 0 \quad \text{(entier)}$$

Il en résulte que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ ne peuvent être infinis.

Par contre, si $\langle(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{w})\rangle = 0$, (en adméttant que le champ $\overrightarrow{E}$ est radial) on a avec $k \neq 0$:

$$\frac{W_T}{V_0} = (1-2K)\frac{m_0c^2}{V_0} = \langle E^2\rangle + (1+k^2)\langle H^2\rangle$$

En conclusion, on est sûr qu'en prenant $k \neq 0$, i.e. $q_m \neq 0$, ni l'énergie ni le champ ne sont infinis.

Remerciements

L'auteur tient à remercier chaleureusement la Fondation Louis de Broglie – en particulier MM. Lochak, Salmon, Fargue et Karatchentzeff – pour lui avoir permis de publier ce travail.

Il tient particulièrement à témoigner sa vive reconnaissance à Monsieur le Professeur A. Lichnérowicz qui, avec sa rigueur et sa bienveillance habituelle, n'a pas hésité à consacrer une partie de son temps à l'examen de ce manuscrit.

Références

[1] Takashi Ohmura, A new formulation on the electromagnetic field, Stability of the electron, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) 684 (1956)

[2] H.E. Moses, A spinor representation of Maxwell equations, Nuovo Cemento. Supplemento al volume VII, Serie X, 1958, 1^{e} trimestre n°1
[3] H.E.Moses, Solution of Maxwell Equations in terms of a spinor notation : the direct and inverse problem, Physical Review vol. 113, number 6, March 15, 1959
[4] Pierre Paillère, Investigations sur le champ de Dirac en géometrie de Riemann. Passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargmann-Michel-Telegdi pour un électron étendu, note CEA n° 2705 (16/11/92)
[5] Pierre Paillère, Passage de l'équation de Dirac à l'équation de Bargmann-Michel-Telegdi pour un électron étendu, Annales de la Fondation Louis de Broglie vol. 18, n°4, 1993
[6] Pierre Paillère, Formalisme tensoriel de l'electromagnétisme, Tome 1 : Le formalisme de la théorie electromagnétique classique, note CEA n° 2770.
[7] Georges Lochak, Sur un monopole de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non-linéaire qui contient les monopoles de spin 1/2, Annales de la Fondation Louis de Broglie vol. 8, n°4, 1983
[8] P.A.M. Dirac, The theory of magnetic poles, Physical review, October 1, 1948
[9] Pierre Paillère, Aperçu sur la symetrisation du tenseur canonique d'énergie-impulsion et sur la détermination du moment angulaire pour des variables de champs tensorielles, à partir du principe de moindre action en géometrie de Riemann, note CEA 2641, 12/3/1990
[10] Pierre Paillère, Formalisme tensoriel de l'électromagnétisme, Tome 2 : Le formalisme de la théorie électromagnétique baroque. Application à l'étude de l'électron étendu magnétiquement chargé, note CEA n° 2770.

(Manuscrit reçu le 29 septembre 1994)