

Barrières de potentiel et hydrodynamique quantique

YVES CASIER[†], MICHEL KARATCHENTZEFF[‡]

[†] D.E.T.N., 361, avenue du Président Wilson, 93211 La Plaine Saint-Denis

[‡] Fondation Louis de Broglie, 23, quai de Conti, 75006 Paris

RÉSUMÉ. Une étude approfondie des équations de l'hydrodynamique de Madelung dans un potentiel constant (dans l'espace à trois dimensions) a été effectuée dans un précédent article où des solutions particulières sont ensuite proposées, puis discutées (*Ann. Fond. L. Broglie*, **18**, n°1, 1993, 111-130). Dans ce travail, on montre comment l'on doit modifier l'étude précédente lorsque le fluide rencontre un échelon de potentiel à symétrie sphérique; les propriétés de la solution du problème correspondant sont ensuite étudiées de manière précise.

ABSTRACT. A detailed study of Madelung's hydrodynamical equations in a constant potential (in a three dimensional space) has been given in a preceding paper where particular solutions have been set up and discussed (*Ann. Fond. L. Broglie*, **18**, n°1, 1993, 111-130). Here we show what must be modified in the preceding investigation when the fluid comes accross a sphericaly symmetrical potential step; the properties of the corresponding solution are then studied in details.

Position du problème, rappels et notations.

Les notations que nous allons utiliser sont celles d'un précédent travail [1] où nous avons proposé des solutions non stationnaires des équations de l'hydrodynamique quantique lorsqu'un fluide évolue dans un potentiel constant. Dans cette étude, nous allons partir tout d'abord de ces solutions pour illustrer les problèmes posés lors du franchissement d'un échelon de potentiel et nous montrerons qu'elles sont insuffisantes pour en décrire le franchissement. Nous construirons alors une solution de ce problème que nous analyserons en détails.

Nous supposons que dans l'espace euclidien tridimensionnel usuel un fluide se trouve concentré à l'origine à un instant initial que nous supposerons négatif pour la commodité des calculs. Le fluide évolue et atteint à l'instant $t = 0$ une barrière de potentiel à symétrie sphérique définie par

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{U}{m} & \text{si } R \leq r < R' \\ 0 & \text{si } r \geq R' \end{cases} \quad \text{avec } U = \text{Cte}$$

Nous emploierons la terminologie plus imagée suivante: un tel potentiel correspond à un « puits ». La partie intérieure ($0 < r < R$) sera appelée la « cavité », le volume satisfaisant à ($R < r < R'$), « margelle ». Lorsque la margelle a une largeur infinie ($R' = \infty$), nous dirons que nous sommes en présence d'un « échelon de potentiel » ou d'une « marche de potentiel ».

Pour tenter d'unifier les notations, chaque fois que cela paraîtra nécessaire, les quantités mathématiques associées à la margelle seront primées, celles associées à la cavité ne le seront pas.

Nous avons montré dans ([1], Eqs (7), (8), (9)), que, lors de l'évolution du fluide dans la cavité, il était possible de choisir les composantes de sa vitesse \vec{u} sous la forme:

$$u_r(r, t) = \frac{r}{t + \lambda} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad u_\varphi = \frac{n\hbar}{mr \sin \theta} \quad , \quad \sigma = n\hbar$$

(où σ est le moment cinétique) et nous avons vu que le fluide était à l'instant t contenu dans une sphère S de rayon $s = v(t + \lambda)$; il sera pratique pour notre propos de modifier légèrement les notations de notre précédent travail et de choisir l'origine des temps de façon que le fluide atteigne la margelle à l'instant $t = 0$, ce qui se traduit par:

$$s = vt + R \quad .$$

Cette formulation impose pour l'instant initial la valeur $-R/v$, les temps précédant cette valeur n'ayant aucune signification physique.

La résolution des équations du mouvement ([1], Eq (26)) nous a permis ensuite de montrer que v ne pouvait prendre que certaines valeurs, à savoir:

$$v = \sqrt{2 \frac{2k + 5}{2k + 3} \left(\frac{E}{m} - V \right)} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

soit encore, dans le cas $V = 0$

$$v = \sqrt{\frac{2k+5}{2k+3} \frac{2E}{m}} ;$$

les valeurs possibles de la densité ([1], Eqs (20), (24)) s'écrivent alors dans la cavité

$$\rho(r, \theta, \varphi, t) = \frac{m}{2\pi\mathcal{J}} (2k+3) \frac{r^{2k}}{s^{2k+3}} G^2(\theta) \quad , \quad s = vt$$

où

$$G(\theta) \equiv P_k^n(\cos\theta) = P_k^n(x) \quad \text{en posant: } x = \cos\theta$$

$$\mathcal{J}(n, k) \equiv \int_{-1}^1 [P_n^k(x)]^2 dx$$

et où les P_k^n sont les fonctions de Legendre [2].

Dans la cavité, ces solutions évolutives sont donc valables dans le domaine $-R/v \leq t \leq 0$ et $0 \leq r \leq R$. Nous les appellerons *solutions de type I*.

Incompatibilité de la coexistence de solutions de type I dans des régions déterminées par un potentiel en échelon.

Dans le cas d'un potentiel en échelon, le problème se pose de savoir si, de part et d'autre de la discontinuité, il est possible d'avoir une solution de même forme analytique que celle ci-dessus. Autrement dit, et avec nos conventions, peut-on admettre que, pour $t > 0$, on ait dans la margelle des solutions de type I de la même forme que dans la cavité ? Nous allons montrer que non par l'absurde.

Comme nous l'avons déjà dit, nous primerons les quantités associées à la margelle. Supposons donc que les formes analytiques soient les mêmes dans la cavité et dans la margelle et que le fluide ait atteint la distance s dans la margelle. Il devrait alors être composé de:

$$\rho = \frac{A}{2\pi\mathcal{J}} (2k+3) \frac{r^{2k}}{s^{2k+3}} G^2(\theta)$$

$$\rho' = \frac{A'}{2\pi\mathcal{J}} (2k+3) \frac{r^{2k}}{s^{2k+3}} G^2(\theta)$$

où A et A' sont des constantes qui doivent être déterminées par les conditions:

- conservation de la masse totale.
- conservation de l'énergie totale.

- La masse totale qui s'écrit

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr + \int_R^s \rho' 4\pi r^2 dr \\
 &= A' + (A - A') \frac{R^{2k+3}}{s^{2k+3}}
 \end{aligned}$$

doit être constante pour tout s ; ce qui entraîne $A = A' = m$.

- Par ailleurs, nous avons vu ([1], Eqs (6-a), (6-b)) que la densité d'énergie totale dans un potentiel constant U s'écrit:

$$\varepsilon = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{en. cin.} \\ \text{translat} \end{array} \right)}_{\frac{1}{2}u_r^2} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{en. cin.} \\ \text{rot.} \end{array} \right)}_{\frac{1}{2}u_\varphi^2} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{pot.} \\ \text{quant.} \end{array} \right)}_Q + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{pot.} \\ \text{ext.} \end{array} \right)}_{\frac{U}{m}}$$

et comme d'après ([1], Eq. (11))

$$\frac{1}{2}u_\varphi^2 + Q = 0$$

il reste

$$\varepsilon = \frac{1}{2}u_r^2 + 0 + \frac{U}{m} = r \frac{\dot{s}}{s} + \frac{U}{m}$$

Cette relation appliquée à l'ensemble {cavité + margelle} conduit, en tenant compte des différents potentiels, pour la densité totale d'énergie par unité de masse à l'expression:

$$\varepsilon_{tot} = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{en. cin.} \\ \text{translat} \end{array} \right) + 0}_{\varepsilon_{cav}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \text{en. cin.} \\ \text{translat} \end{array} \right) + \frac{U}{m}}_{\varepsilon'_{marg}}$$

Par intégration, il vient

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= \int_0^R \rho \varepsilon 4\pi r^2 dr + \int_R^s \rho' \varepsilon' 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \frac{2k+3}{2k+5} + U \left(1 - \frac{R^{2k+3}}{s^{2k+3}} \right)
 \end{aligned}$$

et ce résultat est absurde puisque \dot{s} est constante alors que s ne l'est pas. La forme [1] des solutions de type I n'est donc pas compatible de part et d'autre d'un saut de potentiel. Nous devons donc construire d'autres types de solution qui devront obéir à cette compatibilité.

Hypothèses utilisées et formulation correspondante des équations de l'hydrodynamique d'un fluide évoluant dans un échelon de potentiel.

Nous supposons donc

- que dans la cavité, le fluide évolue pour $-R/v \leq t \leq 0$ à partir d'une densité initialement concentrée à l'origine.
- que pour $t < 0$, les équations du mouvement sont celles décrites dans [1] et possèdent des solutions de type I.
- qu'à l'instant initial, le fluide ne tourne pas sur lui-même, ce qui impose $n = 0$ et $k = 0$.
- qu'à $t = 0$, le fluide atteint la margelle.
- et que la densité d'énergie ε est constante.

et nous allons rechercher dans le puits (cavité + margelle) pour $t > 0$ des solutions évolutives des équations de l'hydrodynamique compatibles avec les conditions aux limites que nous venons de choisir et avec les solutions de type I. Nous les appellerons *solutions de type II*.

Compte tenu des symétries et de la non-rotation, la vitesse n'aura qu'une composante radiale.

Dans la margelle, il n'y a aucun fluide pour $t < 0$; pour la même période, dans la cavité, il suffit de porter les conditions simplificatrices ci-dessus pour obtenir les solutions de type I correspondantes:

$$\begin{aligned}
 u_r \equiv u &= \frac{r}{t} = r \frac{\dot{s}}{s} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad u_\varphi = 0 \\
 s &= vt + R \quad , \quad \dot{s} = v = \sqrt{\frac{10E}{3m}} \\
 \rho &= \frac{3m}{4\pi} \frac{1}{s^3} \quad \text{si } r \leq s \quad \text{et } 0 \quad \text{si } s < r \leq R \\
 -\frac{R}{v} &\leq t \leq 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq R
 \end{aligned}$$

Dans la margelle, pour $t > 0$ et avec nos hypothèses, les équations ([1], Eqs (1-c), (2), (3), (6-b)) s'écrivent respectivement

- pour la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u) = 0$$

- pour l'écoulement irrotationnel:

$$\vec{u} = -\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \alpha$$

- pour la densité d'énergie mécanique

$$\varepsilon = \frac{1}{2} u^2 + Q + V = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Enfin, l'énergie totale du fluide étant

$$E \equiv \iiint_{\mathcal{D}} \rho \varepsilon d\tau$$

la densité d'énergie, que l'on a supposée constante, s'écrira

$$\varepsilon = \frac{1}{2} u^2 + Q + V = \frac{E}{m}$$

V étant constant, cette relation sera vérifiée si on suppose $u = \text{Cte}$ et $Q = \text{Cte}$.

Nous choisirons ensuite comme solution évolutive de l'équation aux dérivées partielles qui exprime la conservation de la masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + u \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2) = 0$$

toute expression du type:

$$\rho r^2 = F(r - ut)$$

où F est une fonction quelconque d'une variable réelle possédant de suffisantes propriétés de dérivabilité. Posant $\rho \equiv a^2$, le système à résoudre s'écrit

$$\sqrt{\rho} = a = \frac{1}{r} F(r - ut) \tag{1}$$

$$\text{avec } u = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - V - Q \right)} \tag{2}$$

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta a}{a} = \text{Cte} \tag{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} (Et - mur) \tag{4}$$

Nous devons donc reprendre le problème et rechercher des solutions des équations ci-dessus satisfaisant aux conditions aux limites (symétrie sphérique) dans un potentiel variable (même s'il ne s'agit que d'une fonction en escalier). Deux cas sont alors à envisager selon que l'énergie du fluide est supérieure ou inférieure à celle de l'énergie potentielle de l'échelon.

Cas où l'énergie du fluide est supérieure à celle de l'échelon de potentiel ($E \geq U$).

Construction des solutions:

- Pour $t < 0$, l'énergie potentielle dans la margelle est donc inférieure à l'énergie du fluide; c'est ce qu'on appelle habituellement le cas classique. Ici, comme nous l'avons supposé, le fluide ne tourne pas et, tant qu'il n'a pas atteint la margelle, nous conservons la solution de type I:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi} \frac{1}{s^3} = \frac{3m}{4\pi} \frac{1}{(vt + R)^3} \quad (5)$$

pour $r \leq s$ et vaut 0 au delà.

- Pour $t > 0$, l'équation (2) précédente donne respectivement pour la cavité et la margelle

$$u = \sqrt{\frac{2}{m}E} \quad u' = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$$

Par ailleurs, de $Q + \frac{1}{2}u_\varphi^2 = 0$ et de l'hypothèse $u_\varphi = 0$, s'ensuit $Q = 0$; ce résultat, reporté dans (3), conduit à:

$$\Delta a = 0 = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{da}{dr} \right)$$

puis, par intégration et en utilisant (1)

$$a = f(t) + \frac{g(t)}{r} \equiv \frac{1}{r} F(r - ut)$$

L'identification impose:

$$f(t) = A \quad ; \quad g(t) = A(\lambda - ut) \quad \lambda, \text{ constante à déterminer}$$

ce qui conduit à

$$F(r - ut) = A(r + \lambda - ut)$$

Les densités pour la cavité et pour la margelle s'en déduisent

$$\begin{aligned} \rho &= a^2 & \rho' &= a'^2 \\ a(r, t) &= A \left(1 + \frac{\lambda - ut}{r} \right) & a'(r, t) &= A' \left(1 + \frac{\lambda' - u't}{r} \right) \end{aligned}$$

les constantes seront calculées en utilisant la continuité de ρ à $t = 0$ avec la forme définie par (5), soit:

$$a(r, 0) = A \left(1 - \frac{\lambda}{r} \right) = \sqrt{\frac{3m}{4\pi R^3}}$$

pour tout r , ce qui impose par identification

$$\lambda = 0 \quad A = \sqrt{\frac{3m}{4\pi R^3}}$$

De son côté, la conservation de la masse entraîne l'égalité des densités de courants massiques sur la surface $r = R$ pour tout t :

$$u \rho(R, t) = u' \rho'(R, t) \quad \text{d'où} \quad A\sqrt{u} \left(1 + \frac{ut}{R} \right) = A'\sqrt{u'} \left(1 + \frac{\lambda' - u't}{R} \right)$$

ce qui donne à nouveau par identification

$$A' = A \frac{u\sqrt{u}}{u'\sqrt{u'}} \quad \lambda' = R \left(\frac{u'}{u} - 1 \right)$$

soit

$$\rho = a^2 = A^2 \left(1 - \frac{ut}{r} \right)^2$$

et donc pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} r^2 \rho &= A^2 (r - ut)^2 = \frac{3m}{4\pi R} \left(\frac{r - ut}{R} \right)^2 & 0 \leq r \leq R \\ r^2 \rho' &= \frac{3m}{4\pi R} \frac{u^3}{u'^3} \left(\frac{r - u't}{R} + \frac{u'}{u} - 1 \right)^2 & r \geq R \end{aligned}$$

Interprétation hydrodynamique des solutions:

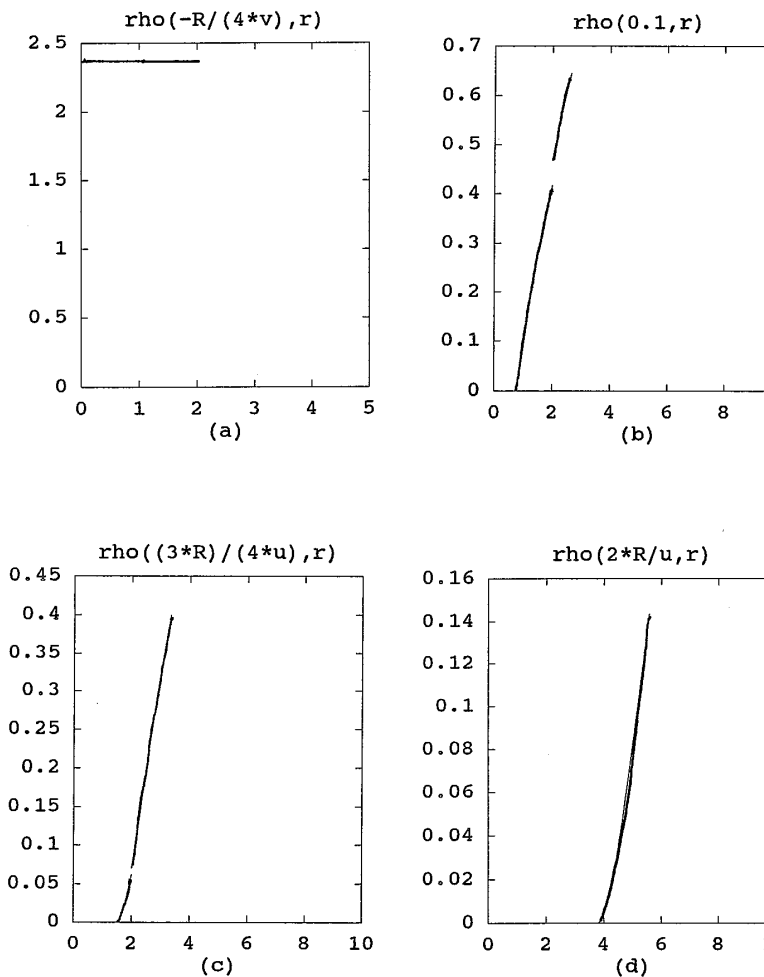


Figure 1. Traversée d'un échelon de potentiel: l'énergie du fluide est supérieure à celle de l'échelon ($E = 5U$); les unités sont arbitraires et l'échelon de potentiel est à la distance $r = 2$ de l'origine.

Les lignes qui suivent regroupent les principaux résultats que nous avons trouvés dans le cas $E \geq U$.

- Si $-R/v < t \leq 0$

$$\rho = \begin{cases} \frac{3m}{4\pi} \frac{1}{(vt + R)^3} & \text{si } 0 \leq r \leq s \\ 0 & \text{si } r > s \end{cases}$$

- Si $t > 0$

CAVITÉ	MARGELLE
$u = \sqrt{2 \frac{E}{m}}$	$u' = \sqrt{2 \frac{E - U}{m}}$
$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3} \left(\frac{r - ut}{r}\right)^2$ <p style="text-align: center;">(si $ut \leq r < R$)</p>	$\rho' = \frac{3m}{4\pi R^3} \left(\frac{u}{u'}\right)^3 \left(\frac{r - u't}{r} - \left(1 - \frac{u'}{u}\right) \frac{R}{r}\right)^2$ <p style="text-align: center;">(si $u'(t - (R/u)) + R \leq r < u't + R$)</p>
$\rho = 0$ <p style="text-align: center;">(si $0 < r \leq ut$)</p>	$\rho' = 0$ <p style="text-align: center;">(si $R < r \leq u'(t - (R/u)) + R$ et $r \geq u't + R$)</p>

et qui s'interprètent de la façon suivante:

À $t = -R/v$, le fluide est entièrement concentré à l'origine des coordonnées. Il s'étale alors à la vitesse v dans la cavité en conservant à chaque instant une densité uniforme jusqu'à ce qu'il atteigne à $t = 0$ l'échelon de potentiel (figure 1.a).

Il est alors aisé, d'après les équations ci-dessus, d'interpréter le comportement du fluide comme étant analogue à celui d'un gaz qui se détend, puisque $vt + R$ représente la distance à l'origine que le fluide a parcourue depuis l'instant initial $t = -R/v$; à l'instant t , le fluide est donc totalement inclus dans une sphère centrée à l'origine et de volume $V(t) = (4/3)\pi(vt + R)^3$; l'équation d'évolution de la densité s'écrit alors tout simplement $\rho V = Cte (= m)$.

Ce "gaz" aborde donc la discontinuité du potentiel à $t = 0$ avec une énergie supérieure à celle de cette dernière. À cet instant, son comportement se modifie: sa vitesse présente une discontinuité; elle n'est plus nulle à l'origine et prend instantanément la même valeur u partout: le fluide se détache donc globalement de l'origine tout en commençant à pénétrer dans la barrière de potentiel (margelle) avec une vitesse également constante u' (figures 1.b et 1.c).

Ce détachement, instantané et global, du fluide de l'origine est l'analogie quantique du phénomène classique de cavitation de la mécanique des fluides.

Les relations ci-dessus montrent que, puisque $u' < u$, la densité va présenter une discontinuité sur la frontière de la margelle et que sa valeur à l'intérieur de la margelle sera supérieure à celle de la cavité. Ceci s'interprète en disant que le paquet de fluide s'écrase légèrement sur lui-même lorsqu'il pénètre la barrière.

Le mouvement se poursuit jusqu'à ce que l'arrière du paquet de fluide atteigne à son tour la margelle dans laquelle la totalité du fluide continuera à évoluer, sa densité tendant vers une constante (figure 1.d).

Compte tenu de sa faible valeur, la discontinuité du passage de la barrière n'est pas très visible sur la représentation tri-dimensionnelle (figure 3.a) du phénomène; par contre cette dernière met particulièrement en valeur son caractère évolutif.

Si l'on continue à rechercher une analogie en termes de gaz, le fluide aborde la discontinuité du potentiel de la même façon que le ferait une certaine quantité de gaz uniformément poussée par un piston dans un tuyau et qui aborde un rétrécissement brutal de ce tuyau; le gaz, étant compressible, s'écrase sur lui même au voisinage du rétrécissement et sa densité augmente; tel qu'est notre modèle, lorsqu'une partie du gaz a franchi cet obstacle, elle se retrouve contrainte à pousser un autre piston, ce qui contribue à augmenter sa densité. Lorsque la totalité du gaz a franchi la barrière, elle continue à être poussée par un piston et sa compression tendra progressivement vers une valeur constante.

L'image est donc beaucoup plus compliquée que celle que donnerait un fluide incompressible; elle n'en a tout simplement aucun rapport.

Si l'épaisseur b de la margelle est infinie, le fluide est compris entre deux sphères:

- une sphère extérieure de rayon:
 $s' = u't + R$
- une sphère intérieure de rayon:

$$s = \begin{cases} ut & \text{si } t < \frac{R}{u} \\ u'(t - \frac{R}{u}) + R & \text{si } t > \frac{R}{u} \end{cases}$$

Si l'épaisseur b de la margelle est finie, le fluide atteint le bord extérieur de la margelle au temps:

$$t = \frac{b}{u'}$$

et, en employant la même méthode que précédemment, la masse volumique du fluide à l'extérieur ($r > R'$) s'écrit:

$$r^2 \rho'' = \frac{3m}{4\pi R} \left(\frac{r - ut}{R} + \left(\frac{u}{u'} - 1 \right) \frac{b}{R} \right)^2$$

La sphère intérieure atteint le bord extérieur de la margelle au temps:

$$t = \frac{R}{u} + \frac{b}{u'}$$

Le fluide est alors complètement à l'extérieur de la margelle et compris entre deux sphères distantes de R .

En conclusion, dans le cas $E \geq U$, quoiqu'il arrive, le fluide s'écoule en un temps fini; nous retrouvons le résultat classique d'une particule dont l'énergie cinétique est supérieure à celle d'une barrière de potentiel: elle passe.

Cas où l'énergie du fluide est inférieure à celle de l'échelon de potentiel ($E \leq U$).

Construction analytique des solutions:

À l'intérieur de la cavité, les conditions n'ont pas changé; nous gardons donc la même solution que dans le cas précédent ($E > U$) pour $-R/v \leq t \leq 0$ et $0 \leq r \leq R$ et il suffit de construire la solution pour $t > 0$.

Comme il n'est plus possible de faire $Q = 0$ dans (2), puisque l'argument de la racine deviendrait négatif, nous devons rechercher d'autres solutions des équations

$$\sqrt{\rho} = a = \frac{1}{r} F(r - ut) \quad (1)$$

$$\text{avec } u = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - V - Q \right)} \quad (2)$$

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta a}{a} = \text{Cte} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} (Et - mur) \quad (4)$$

Pour des raisons de symétrie dans les calculs, il est commode de supposer qu'il règne dans la cavité un potentiel K , que nous ferons tendre par la suite vers 0; U sera le potentiel régnant dans la margelle où de plus, comme nous l'avons convenu, les quantités physiques seront primées. Les équations du problème s'écrivent alors

CAVITÉ	MARGELLE
$\sqrt{\rho} = a = \frac{1}{r}F(r - ut)$	$\sqrt{\rho'} = a' = \frac{1}{r}F'(r - ut)$ (1)
$u = \sqrt{2\left(\frac{E - K}{m} - Q\right)}$	$u = \sqrt{2\left(\frac{E - U}{m} - Q'\right)}$ (2)
$Q = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta a}{a}$	$Q' = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta a'}{a'}$ (3)
$\alpha = \frac{1}{\hbar}(Et - mur)$	$\alpha' = \frac{1}{\hbar}(Et - mu'r)$ (4)

Dans la margelle, nous devons avoir ($U = mV$):

$$u' = \sqrt{2\left(\frac{E - U}{m} - Q'\right)}$$

et, pour avoir un sens, cette quantité doit satisfaire à:

$$Q' \leq \frac{E - U}{m} < 0$$

(et non $Q' = 0$ comme précédemment). Si nous posons

$$\begin{array}{ll} W = \frac{1}{2}mu^2 & W' = \frac{1}{2}mu'^2 \\ \text{(cavité)} & \text{(margelle)} \end{array}$$

La relation (2) s'écrit alors dans chaque cas:

$$Q = \frac{E - K - W}{m} \qquad Q' = \frac{E - U - W'}{m} \qquad (6)$$

Reportant Q' dans (3) et posant

$$\beta' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W' + U - E)}$$

ce qui est toujours possible puisque $U > E$, nous obtenons l'équation

$$\Delta a' - \beta'^2 a' = 0$$

qui admet comme solutions

$$a'(r, t) = \frac{1}{r} \left(f(t)e^{\beta' r} + g(t)e^{-\beta' r} \right)$$

Si nous imposons à ces solutions d'avoir la forme analytique de (1), nous sommes conduits à choisir f et g de sorte que:

$$a'(r, t) = \frac{1}{r} \left(A' e^{\beta'(r-u't)} + B' e^{-\beta'(r-u't)} \right)$$

Si enfin, nous voulons que la masse volumique décroisse dans le temps, nous obtenons $B' = 0$, comme dans le cas $U < E$, et donc

$$a'(r, t) = \frac{A'}{r} e^{\beta'(r-u't)}$$

Il ne reste plus qu'à faire la même démarche dans la cavité après avoir posé

$$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W + K - E)}$$

(ce qui sous-entend $W > E - K$) pour obtenir

$$a(r, t) = \frac{A}{r} e^{\beta(r-ut)}$$

puisque lorsque $t \rightarrow \infty$, la densité ρ doit s'annuler.

Détermination des paramètres:

À ce point, nous disposons de solutions analytiques de notre problème, mais qui dépendent de quatre paramètres u , u' , A et A' , et nous allons utiliser conditions aux limites et conditions initiales pour les déterminer.

• À $t = 0$, la totalité du fluide est encore contenue dans la cavité, ce qui permet d'écrire:

$$\int_{cav} \rho(r, 0) d\tau = m = \int_0^R \frac{A^2}{r^2} e^{2\beta r} 4\pi r^2 dr$$

dont nous déduisons:

$$A^2 = \frac{\beta m}{2\pi} \frac{1}{e^{2\beta R} - 1} \quad (7)$$

• La conservation de la densité du courant $u \rho(r, t) = u' \rho'(r, t)$ s'écrit en $r = R$ pour $t \geq 0$:

$$\sqrt{u} \frac{A}{R} e^{\beta R} e^{-\beta u t} = \sqrt{u'} \frac{A'}{R} e^{\beta' R} e^{-\beta' u' t}$$

À $t = 0$, le fluide atteint la paroi; la relation ci-dessus devient valable et entraîne:

$$A'^2 = A^2 \frac{u}{u'} e^{(\beta - \beta') R} \quad (8)$$

Si nous reportons ensuite A' dans la même équation, mais pour t quelconque, la plupart des coefficients se simplifient pour finalement donner:

$$\beta u = \beta' u' \quad (9)$$

Nous avons donc obtenu trois relations permettant de définir les quatre paramètres A , A' , u et u' en fonction de l'un d'eux.

En élevant 9 au carré, puis en explicitant les valeurs de u , β , u' , β' , puis Q et Q' , nous obtenons la relation

$$(W + K - E)W = (W' + U - E)W'$$

Nous postulons alors que l'énergie cinétique transmise W' ne dépend de l'énergie du fluide E et de la hauteur de la barrière U que par l'intermédiaire d'une fonction de $U - E$

$$W' = W \phi(U - E)$$

Ce postulat, qui peut paraître arbitraire, peut se justifier au premier ordre d'un développement de W' en fonction de W :

$$W' = a + bW + \dots$$

dont les coefficients a , b , ... dépendent évidemment de U et de E . Si le fluide est au repos initialement ($W = 0$), il le restera indéfiniment; donc, $W' = 0$, et $a = 0$.

Par ailleurs, les énergies cinétiques W et W' ne doivent pas être modifiées par un changement d'origine des énergies:

$$U \longrightarrow U + \lambda \quad ; \quad K \longrightarrow U + \lambda \quad ; \quad E \longrightarrow E + \lambda$$

ce qui sera le cas si b dépend de $U - E$; nous retrouvons ainsi la formule postulée. Si nous la reportons dans la dernière relation, nous trouvons:

$$W = \frac{(U - E)\phi(U - E) + E - K}{1 - \phi^2(U - E)}$$

Cette formule est également invariante par un changement d'origine de l'énergie; cela constaté, nous poserons désormais que $K = 0$. Par ailleurs, W devant être par essence positif, ϕ doit satisfaire à

$$\phi < 1 \quad \text{ce qui entraîne} \quad W' < W \quad \text{et donc} \quad u' < u$$

Ce résultat s'interprète physiquement en disant que, quoiqu'il arrive la particule ne peut prendre de l'énergie à la barrière.

Un rapide bilan des résultats obtenus pour $t > 0$

CAVITÉ	MARGELLE
$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - E)}$	$\beta' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W' + U - E)}$
$W = \frac{(U - E)\phi(U - E) + E}{1 - \phi^2(U - E)} = \frac{1}{2}mu^2$	$W' = W\phi(U - E) = \frac{1}{2}mu'^2$
$A^2 = \frac{\beta m}{2\pi} \frac{1}{e^{2\beta R} - 1}$	$A'^2 = A^2 \frac{e^{2(\beta - \beta')R}}{\sqrt{\phi(U - E)}}$
$\tau = \frac{1}{2\beta u}$	$= \frac{1}{2\beta' u'}$
$\rho r^2 = a^2 = A^2 e^{2\beta r} e^{-t/\tau}$	$\rho' r'^2 = a'^2 = A'^2 e^{2\beta' r'} e^{-t/\tau}$

montre qu'il ne nous reste plus qu'à déterminer ϕ .

Pour cela, nous admettrons que ϕ est une fonction analytique de son argument et nous étudierons le comportement des différentes quantités physiques lorsque le potentiel U devient très grand. Nous avons

$$\beta' \sim \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mU}$$

et comme

$$A' = Ae^{2\beta R} \frac{e^{-2\beta' R}}{\sqrt{\phi(U-E)}}$$

doit rester fini et non nul pour que le fluide puisse commencer à pénétrer dans la margelle (c'est l'analogie de l'effet de peau), cela impose que, pour U grand:

$$\phi(U) \sim \lambda e^{-4\beta' R} \sim \lambda e^{-\frac{4R}{\hbar} \sqrt{2mU}}$$

où λ est une constante à déterminer.

L'analyticité impose ensuite la même forme de solution pour tout U et donc que

$$\phi(U-E) = \lambda e^{-\frac{4R}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}}$$

λ se détermine alors aisément d'après $W' = W\phi(U-E)$: lorsque $U \rightarrow 0$ (avec $E \leq U$), l'énergie cinétique du fluide reste inchangée à la limite, lorsque la barrière de potentiel a disparu ($W' = W$); ce qui impose $\lambda = 1$. Nous pouvons donc raisonnablement postuler que

$$\phi(U-E) = e^{-\frac{4R}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}}$$

et écrire en définitive pour $t > 0$ les solutions explicites du problème:

CAVITÉ	MARGELLE
$W = \frac{(U-E)e^{-\frac{4R}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}} + E}{1 - e^{-\frac{8R}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}}$	$W' = W e^{-\frac{4R}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}$
$u = \sqrt{\frac{2}{m}W}$	$u' = \sqrt{\frac{2}{m}W'}$
$\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W-E)}$	$\beta' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W'+U-E)}$
$A^2 = \frac{\beta m}{2\pi} \frac{1}{e^{2\beta R} - 1}$	$A'^2 = A^2 e^{2(\beta-\beta')R} e^{\frac{2R}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}$
$\tau = \frac{1}{2\beta u}$	$= \frac{1}{2\beta' u'}$
$\rho r^2 = a^2 = A^2 e^{2\beta r} e^{-t/\tau}$	$\rho' r'^2 = a'^2 = A'^2 e^{2\beta' r} e^{-t/\tau}$

Interprétation hydrodynamique des résultats:

De $t = -R/v$ à $t = 0$, les équations du fluide n'ont pas été modifiées, leur interprétation est donc la même que précédemment.

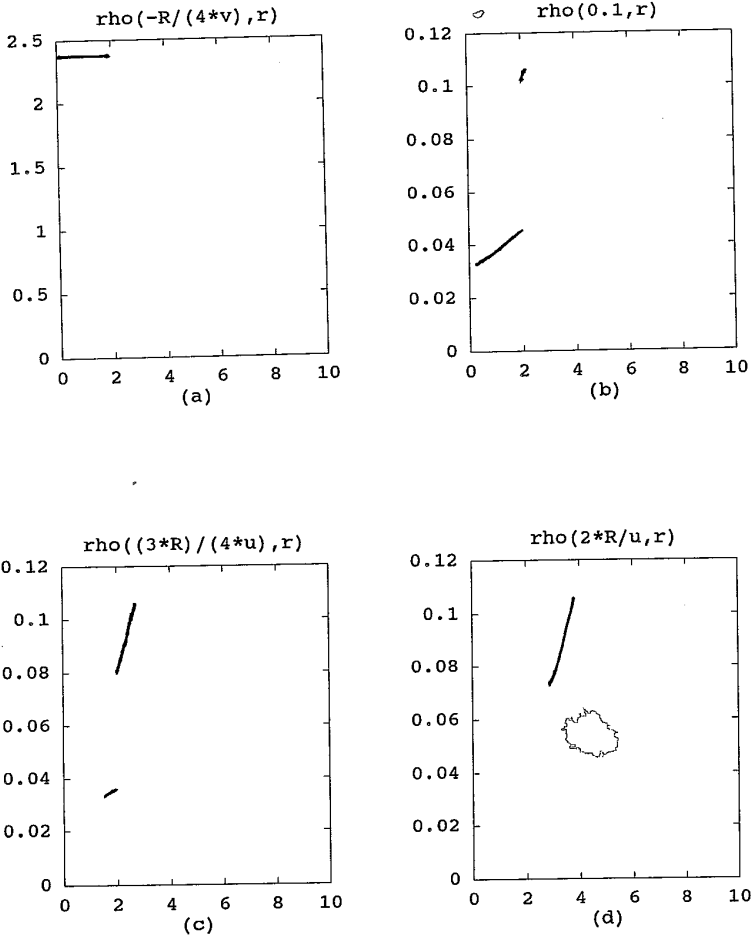


Figure 2. Traversée d'un échelon de potentiel: l'énergie du fluide est inférieure à celle de l'échelon ($E = (1/5)U$); les unités sont arbitraires mais sont les mêmes que celles de la figure 1 et l'échelon de potentiel est toujours à la distance $r = 2$ de l'origine.

À $t = 0$, la vitesse subit également une discontinuité; elle n'est plus nulle à l'origine et prend instantanément la même valeur u partout: de même que dans le cas précédent, le fluide se détache de l'origine au moment où il commence à pénétrer la margelle avec une vitesse également constante u' (figures 2.a à 2.c).

À nouveau, u' est inférieur à u . la densité va présenter dans ce cas aussi une discontinuité sur la frontière de la margelle et sa valeur à l'intérieur de la margelle sera supérieure à celle de la cavité. L'interprétation est donc la même: le paquet de fluide s'écrase légèrement sur lui-même lorsqu'il pénètre la barrière; et les équations du mouvement montrent que celui-ci se poursuit jusqu'à ce que l'arrière du paquet de fluide atteigne à son tour la margelle dans laquelle la totalité du fluide continuera à évoluer, sa densité tendant vers une constante (figure 2.d); la propagation de la discontinuité est particulièrement expressive sur la figure 3.b.

D'une manière imagée, tout se passe comme si on assimilait le fluide à un ressort. Dans un premier temps, le ressort se détend de façon uniforme jusqu'à ce qu'il touche la barrière ($t = 0$). A cet instant, il se détache de l'origine, prend globalement une vitesse de translation distincte de la vitesse d'étalement précédente, tout en pénétrant la barrière. La partie du ressort à l'intérieur de la margelle avance alors moins vite que celle qui reste encore dans la cavité et il y a compression de la partie du ressort qui se trouve dans la margelle. Lorsque le ressort a totalement pénétré la barrière, la compression tend progressivement vers une constante.

Le phénomène étudié n'est donc pas du tout du même type que dans le cas où l'énergie du fluide est supérieure à celle de la barrière – et il n'est que de regarder les équations pour s'en convaincre. À trois dimensions, le fluide correspondant possède à nouveau les caractéristiques d'un gaz plutôt que celles d'un liquide puisqu'il est compressible, et le système ressemble donc à celui d'un gaz pénétrant un milieu poreux qui lui oppose une forte résistance.

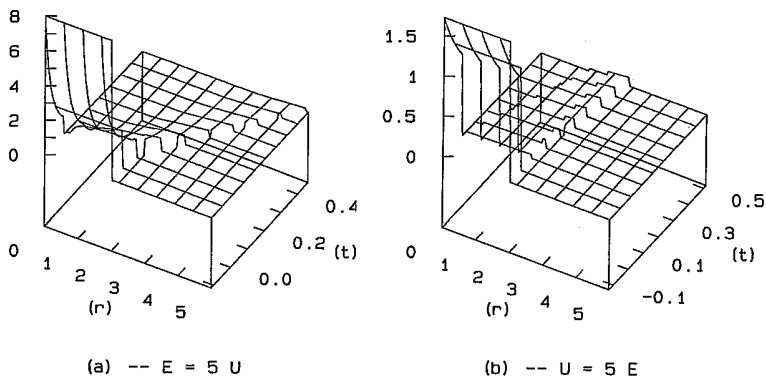


Figure 3. Traversée d'un échelon de potentiel: représentation tridimensionnelle du phénomène; (a) l'énergie du fluide est supérieure à celle de l'échelon ($E = U$); (b) l'énergie du fluide est inférieure à celle de l'échelon ($E = (1/5)U$); les unités sont les mêmes que celles des figures 1 et 2 et l'échelon de potentiel est toujours à la distance $r = 2$ de l'origine.

Conclusion.

Dans cette étude, nous avons donc montré qu'un fluide – et donc une particule si l'on s'en tient à l'interprétation probabiliste habituelle de la densité ρ , qui affronte un potentiel quelconque, le traversera toujours, et ceci quel que soit l'épaisseur de la barrière de potentiel en question.

Ce fait, bien connu depuis longtemps, est évidemment à la base de l'interprétation de l'effet tunnel; cependant la solution proposée a d'une part l'avantage de fournir, contrairement à la plupart des solutions présentées habituellement, des solutions exactes de ce phénomène dans le cadre du modèle que nous avons choisi; d'autre part, nous estimons important de faire remarquer que les calculs ont été effectués en dimension 3 (et non en dimension 1, comme ils sont présentés la plupart du temps), ce qui les rendra par la suite directement applicables aux véritables phénomènes physiques.

Nous disposons donc dorénavant des outils permettant une étude ultérieure approfondie de l'effet tunnel.

Enfin, une fois de plus, nous avons mis en évidence le fait que l'Hydrodynamique quantique, se situant hors des normes et conventions officielles de la Mécanique quantique, autorise une beaucoup plus

grande souplesse dans l'interprétation des relations trouvées et, par là-même laissant libre l'imagination, favorise la recherche de solutions d'un problème physique donné.

Remerciements.

Nous tenons pour terminer à remercier tout spécialement MM. A. Avez et J. Bass, de l'Université Pierre et Marie Curie, et MM. D. Fargue et G. Lochak, de la Fondation Louis de Broglie, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et pour les multiples conseils qu'ils nous ont donnés durant l'élaboration de ce travail.

Références

- [1] Y. Casier & M. Karatchentzeff, *Sur des solutions non stationnaires des équations de l'hydrodynamique quantique dans un potentiel constant*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **18**, n° 1, 1993, 111–130.
- [2] A. Erdélyi editor, *Higher transcendental functions*, vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New-York 1953.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1994)