Sur la compatibilité du principe d'équivalence avec le concept de localisation de l'énergie gravitationnelle

J. Chevalier

15, rue des Vignes, CH-2822 Courroux, Suisse

RÉSUMÉ. Le formalisme tétradique permet de récrire les équations einsteiniennes du mouvement ($D_{,\alpha}\Theta^{,\mu\alpha} = 0$, $\Theta^{,\mu\alpha} \equiv$ tenseur matériel) sous une forme qui fait apparaître un (vrai) tenseur représentant le champ de gravitation, en lieu et place des grandeurs einsteiniennes non tensorielles $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. De là découlent quelques conséquences intéressantes: 1) Dans l'espace-temps plat, les tétrades doivent être parallélisées, et par suite 2) la densité d'énergie gravitationnelle est nulle partout. Enfin, on montre que, contrairement à l'opinion dominante, le principe d'équivalence est parfaitement compatible avec le concept de localisation de l'énergie-impulsion gravitationnelle.

ABSTRACT. The tetrad formalism allows to rewrite the Einsteinian equations of motion ($D_{,\alpha}\,\Theta^{,\mu\alpha} = 0$, $\Theta^{,\mu\alpha} \equiv$ matter tensor) into a form that lets appear a (true) tensor "gravitational field" in lieu of the non tensorial Einsteinian quantities $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Therefrom some interesting consequences are deduced: 1) In the flat space-time, the tetrads have to be parallelized and therefore 2) the gravitational energy density is equal to zero everywhere . On the other hand, it is shown that, contrary to generally accepted opinions, the equivalence principle is quite consistent with the the gravitational energy localization concept.

N.D.L.R. Cet article a fait l'objet d'une controverse: accepté par certains de nos rapporteurs, refusé par d'autres, nous n'avons pu trancher entre les différents arguments, assénés avec force. Il est dans nos principes, en pareil cas, de donner l'avantage à l'auteur.

1. Introduction

Dès la publication par Einstein, en 1916, de son célèbre article sur la relativité générale [1], le problème de l'énergie gravitationnelle s'est posé avec une acuité toute particulière. Alors que la covariance des lois constitue l'une des pierres angulaires de l'édifice, il apparut bientôt qu'il est impossible de construire un complexe d'énergie-impulsion satisfaisant à ce postulat. Møller en a donné définitivement la preuve dans ses travaux des années soixante [2]. Mais cet état de fait ne dérange pas les relativistes orthodoxes, bien au contraire. Ceux-ci considèrent que le principe d'équivalence, cette autre pierre angulaire de la théorie, est incompatible avec une éventuelle covariance de l'énergie-impulsion gravitationnelle. A ce propos, écoutons par exemple Misner, Thorne et Wheeler [3]: "Toward the end, above all mathematical arguments, one came to appreciate the quiet but rock-like strength of Einstein's equivalence principle. One can always find in any given locality a frame of reference in which all local "gravitational fields" (all Christoffel symbols; all $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$) disappear. No Γ's means no "gravitational field" and no local gravitational field means no "local gravitational energy-momentum"."

Dans un article récent [4], N.Stavroulakis expose en détail les raisons qui, selon lui, limitent plus ou moins considérablement la portée du principe d'équivalence. L'auteur conclut de son analyse que "les problèmes relatifs a l'énergie gravitationnelle en général et à l'énergie des particules test en particulier sont susceptibles d'être abordés dans le cadre de la Relativité générale". Dans le présent article, sans remettre fondamentalement en cause le principe d'équivalence, je montre que, contrairement a l'opinion dominante, celui-ci est parfaitement compatible avec le concept de localisabilité de l'énergie-impulsion gravitationnelle. Comment cela est-il possible, compte tenu du bien-fondé évident de l'argument avancé par Misner, Thorne et Wheeler?

La réponse est simple: cet argument est certes pertinent dans le cadre strict du formalisme einsteinien (purement métrique) de la relativité générale. Mais, comme nous le verrons plus loin, il ne l'est pas dans le cadre d'autres formalismes, notamment les formalismes tétradiques. Disons brièvement pour l'instant que ce type de formalisme permet de réinterpréter le principe d'équivalence de manière telle que celui-ci n'est plus en contradiction avec le concept de localisabilité. D'où ma conclusion, qui rejoint par d'autres voies celle de N.Stavroulakis: les recherches sur la localisabilité de l'énergie-impulsion gravitationnelle retrouvent leur entière légitimité.

Au paragraphe 2, je rappelle les grandes lignes du formalisme tétradique de Scherrer [5-9]. En relation avec ce dernier, la forme tétradique des équations einsteiniennes du mouvement (§3) permet de définir une expression *tensorielle* du champ de gravitation. Une conséquence immédiate importante en est déduite au paragraphe 4: dans l'espace-temps plat, les tétrades doivent être parallélisées, ce qui implique une densité d'énergie gravitationnelle nulle partout. Enfin, le paragraphe 5 est entièrement consacré au problème du rapport entre le principe d'équivalence et le concept de localisabilité.

2. Formalisme tétradique

Notations. Les indices situés *à droite* des virgules sont des *indices coordonnées* et les indices situés *à gauche* sont des *indices tétradiques.* Cependant, *par convention*, quand tous les indices d'une grandeur donnée sont tétradiques, on omet les virgules, comme par exemple dans la formule (2.3) pour les ${f^\lambda}_{\mu\nu} \equiv {f^\lambda}_{\mu\nu,}{}^{,}$. De même, on omet généralement les virgules pour les grandeurs "purement einsteiniennes" (ne dépendant pas des tétrades) telles que par exemple $g_{\mu\nu}$ (métrique), $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (connexions affines), etc..

D'autre part, à quelques exceptions près, je pose: vitesse de la lumière dans le vide $\equiv c = 1$, constante newtonienne de la gravitation $\equiv G = 1$, de sorte que la constante einsteinienne $\kappa \equiv 8\pi G/c^4$ s'écrit simplement 8π.

Le formalisme tétradique de Scherrer a été développé par son auteur dans une série d'articles publiés de 1954 à 1973 [5-9]. Pour faciliter la compréhension du présent travail, il m'a paru utile d'en résumer brièvement les grandes lignes.

Les tétrades ${g^{\lambda,}}_{,\mu}(x)$ ($\lambda \equiv$ indice tétradique, $\mu \equiv$ indice coordonnées) sont liées au tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ par les relations:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} {g^{\alpha,}}_{,\mu} {g^{\beta,}}_{,\nu} \, , \tag{2.1}$$

où $\eta_{00} = +1$, $\eta_{ii} = -1$, $\eta_{\alpha\neq\beta} = 0$ (indices grecs $= 0, 1, 2, 3$; indices latins $= 1, 2, 3$). Les expressions suivantes constituent un tenseur coordonnées antisymétrique de rang 2:

$$ {f^{\lambda,}}_{,\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {g^{\lambda,}}_{,\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial {g^{\lambda,}}_{,\mu}}{\partial x^\nu} \right). \tag{2.2}$$

Donnons un exemple de la "règle de transposition" des indices:

$$f^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu,}{}^{;\alpha} g_{\nu,}{}^{;\beta} f^{\lambda,}{}_{,\alpha\beta} \ , \tag{2.3}$$

où $(g_{\lambda,}{}^{;\mu})$ est la matrice transposée de $(g^{\lambda;}{}_{,\mu})^{-1}$ (matrice *transverse* de $(g^{\lambda;}{}_{,\mu})$). Les $f^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ sont des invariants coordonnées. On démontre que la densité scalaire de courbure $\Re \equiv gR$ ($g \equiv \text{dét}(g^{\lambda;}{}_{,\mu})$) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{1}{2}\Re \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(2gf^{,\alpha}) + \frac{1}{2}\underset{1}{\mathfrak{H}} + \underset{2}{\mathfrak{H}} - 2\underset{3}{\mathfrak{H}} \ , \tag{2.4}$$

où $f^{,\alpha} \equiv f_{,}{}^{;\beta\alpha}{}_{\beta}$ et $\underset{i}{\mathfrak{H}} \equiv g\underset{i}{H}$ avec:

$$\underset{1}{H} \equiv f^{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} \ , \tag{2.5a}$$

$$\underset{2}{H} \equiv f^{\alpha\beta\gamma} f_{\gamma\beta\alpha} \ , \tag{2.5b}$$

$$\underset{3}{H} \equiv f^{\alpha} f_{\alpha} \ . \tag{2.5c}$$

Les $\underset{i}{H}$ sont invariants sous les transformations de coordonnées et les transformations de Lorentz *globales*, mais ils ne le sont pas sous les transformations de Lorentz *locales* (transformations locales des tétrades). La divergence ordinaire contenue dans $\Re$ n'intervient pas dans le principe variationnel conduisant aux équations du champ, de sorte que la densité lagrangienne du formalisme de Scherrer prend la forme:

$$\mathfrak{H} \equiv \frac{1}{2}\underset{1}{\mathfrak{H}} + \underset{2}{\mathfrak{H}} - 2\underset{3}{\mathfrak{H}}. \tag{2.6}$$

Les *équations du champ* s'écrivent:

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} - \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} = -\kappa g \Theta_{\lambda,}{}^{,\mu} \ , \tag{2.7}$$

ou plus simplement:

$$-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \ , \tag{2.8}$$

avec les abréviations ($\kappa \equiv 8\pi G/c^4$):

$$\mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial(\partial g^{\lambda;}{}_{,\mu}/\partial x^\nu)} \ , \qquad \mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g^{\lambda;}{}_{,\mu}} \ , \tag{2.9}$$

$$\mathbf{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv g\Theta_{\lambda,}{}^{,\mu} - \frac{1}{\kappa}\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}\,. \tag{2.10}$$

Les $\mathrm{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}$ constituent le *complexe d'énergie-impulsion totale* ($\Theta_{\lambda,}{}^{,\mu}$: contribution matérielle, $-1/\kappa\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}$: contribution gravitationnelle). Les $\mathfrak{t}_{\lambda,}{}^{,\mu\nu}$ sont en effet antisymétriques en μ et ν, et l'on déduit ainsi de (2.8) les *lois locales de conservation*:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0\,. \tag{2.11}$$

Ces résultats permettent d'interpréter $-\kappa^{-1}\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}$ comme le *complexe d'énergie-impulsion gravitationnelle.* Les expressions (2.12a-d) ci-après montrent que les $\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu}$ sont les composantes d'une densité vectorielle coordonnées, une caractéristique qui joue un rôle important dans la suite de ce travail.

De la définition: $\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \partial\mathfrak{H}/\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}$ nous déduisons:

$$\mathfrak{T}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \frac{1}{2}\,\underset{1}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu} + \underset{2}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu} - 2\,\underset{3}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu}\;, \tag{2.12a}$$

$$\underset{1}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv g\left[-4f_{\alpha\lambda\beta}f^{\alpha\gamma\beta}g_{\gamma,}{}^{,\mu} + g_{\lambda,}{}^{,\mu}\underset{1}{H}\right], \tag{2.12b}$$

$$\underset{2}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv g\left[2(f^{\alpha\beta\gamma} - f^{\beta\alpha\gamma})f_{\gamma\lambda\beta}g_{\alpha,}{}^{,\mu} + g_{\lambda,}{}^{,\mu}\underset{2}{H}\right], \tag{2.12c}$$

$$\underset{3}{\mathfrak{T}}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv g[2f^{\alpha}\,(f^{\beta}{}_{\lambda\alpha}g_{\beta,}{}^{,\mu} - f_{\lambda}g_{\alpha,}{}^{,\mu}) + g_{\lambda,}{}^{,\mu}\underset{3}{H}]\,. \tag{2.12d}$$

La forme détaillée des lois de conservation (2.11) s'écrit (en prévision des développements ultérieurs, je place dès maintenant l'indice λ en position supérieure):

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\mathfrak{T}^{\lambda,\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(g\Theta^{\lambda,\alpha})\,. \tag{2.13}$$

Rappelons que $g \equiv \text{dét}(g^{\lambda,}{}_{,\mu}) = \sqrt{-G}$ ($G \equiv \text{dét}(g_{\mu\nu})$), et par suite:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\mathfrak{T}^{\lambda,\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\kappa}D_{,\alpha}(\sqrt{-G}\;T^{\lambda,\alpha}) = D_{,\alpha}(\sqrt{-G}\;\Theta^{\lambda,\alpha}) \tag{2.14}$$

($D_{,\alpha} \equiv$ dérivée covariante du formalisme einsteinien), car *les $\mathfrak{T}^{\lambda,\mu}$ de Scherrer (2.12a-d) sont des densités vectorielles coordonnées.* Chacun des deux membres de (2.13) est donc une *densité scalaire coordonnées* (pour chaque valeur de λ). En multipliant finalement les relations (2.14) par $g_{\lambda,}{}^{,\mu}$, nous obtenons:

$$\frac{\sqrt{-G}}{\kappa}\, g_{\lambda,}{}^{,\mu} D_{,\alpha} T^{\lambda,\alpha} = \sqrt{-G}\, g_{\lambda,}{}^{,\mu} D_{,\alpha} \Theta^{\lambda,\alpha}\,. \tag{2.15}$$

Chaque membre de (2.15) est une *densité vectorielle coordonnées contravariante.* Conformément aux modèles fournis par la mécanique et l'électrodynamique classiques, nous pouvons interpréter le membre de gauche comme la densité de 4-force du champ gravitationnel, alors que l'interprétation du membre de droite dépend du problème étudié (ce sera par exemple la force d'Archimède à l'intérieur d'un fluide stationnaire). Il est évidemment important de souligner qu'en raison de leur caractère vectoriel, ces densités de force ont une signification intrinsèque.

Enfin, pour faciliter la comparaison avec l'équation (3.8) du paragraphe 3, mettons le membre de droite de (2.15) sous la forme:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{,\mu} \equiv g_{\lambda,}{}^{,\mu} D_{,\alpha}(\sqrt{-G}\;\Theta^{\lambda,\alpha}) \;=\; g_{\lambda,}{}^{,\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-G}\;\Theta^{\lambda,\alpha}) \;=\\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-G}\;\Theta^{,\mu\alpha}) - \sqrt{-G}\;\frac{\partial g_{\beta,}{}^{,\mu}}{\partial x^\alpha}\;\Theta^{\beta,\alpha}\,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

3. Forme tétradique des équations dynamiques d'Einstein

Considérons maintenant les équations du mouvement sous leur forme einsteinienne habituelle:

$$D_{,\alpha}\,\Theta^{,\mu\alpha} = 0 \tag{3.1}$$

Multiplions (3.1) par $\sqrt{-G}$ et mettons $\Theta^{,\mu\alpha}$ sous la forme $\Theta^{,\mu\alpha} = g_{\beta,}{}^{,\mu}\,\Theta^{\beta,\alpha}$. Il vient:

$$D_{,\alpha}(\sqrt{-G}\, g_{\beta,}{}^{,\mu}\Theta^{\beta,\alpha}) = (D_{,\alpha} g_{\beta,}{}^{,\mu})\,\sqrt{-G}\,\Theta^{\beta,\alpha} + g_{\beta,}{}^{,\mu}\, D_{,\alpha}(\sqrt{-G}\,\Theta^{\beta,\alpha})\,. \tag{3.2}$$

Il s'agit maintenant de transformer $D_{,\alpha} g_{\beta,}{}^{,\mu}$. Nous avons:

$$D_{,\alpha}\, g_{\beta,}{}^{,\mu} = \frac{\partial g_{\beta,}{}^{,\mu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\, g_{\beta,}{}^{,\gamma}\,. \tag{3.3}$$

A l'aide des formules (2.1) et des relations:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} g_{\alpha,}{}^{,\mu} g_{\beta,}{}^{,\nu} \ , \tag{3.4}$$

il est facile (mais un peu fastidieux!) d'exprimer les $\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}$ en fonction des tétrades et de leurs dérivées. On obtient:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} = \gamma^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma} - (f^{,}_{,\alpha}{}^{\mu}{}_{\gamma} + f^{,}_{,\gamma}{}^{\mu}{}_{\alpha}) \ , \tag{3.5}$$

où les $\gamma^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma}$ sont définis comme suit:

$$\gamma^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma} \equiv g_{\beta,}{}^{,\mu} \gamma^{\beta,}{}_{,\alpha\gamma} \ , \qquad \gamma^{\beta,}{}_{,\alpha\gamma} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\beta,}{}_{,\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\beta,}{}_{,\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\right) . \tag{3.6}$$

En introduisant (3.5) dans (3.3), on trouve finalement:

$$D_{,\alpha}\, g_{\beta,}{}^{,\mu} = -g_{\beta,}{}^{,\gamma}[f^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma} + f^{,}_{,\alpha}{}^{\mu}{}_{\gamma} + f^{,}_{,\gamma}{}^{\mu}{}_{\alpha}] \, . \tag{3.7}$$

D'autre part, l'expression $\sqrt{-G}\,\Theta^{\beta,\alpha}$ est une densité vectorielle contravariante. Sa divergence covariante est donc égale à sa divergence ordinaire et, tenant compte de (3.7), nous obtenons à partir de (3.2):

$$\begin{aligned}
&D_{,\alpha}\,(\sqrt{-G}\, g_{\beta,}{}^{,\mu}\Theta^{\beta,\alpha}) \\
&\quad = -\, g_{\beta,}{}^{,\gamma}\,[f^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma} + f^{,}_{,\alpha}{}^{\mu}{}_{\gamma} + f^{,}_{,\gamma}{}^{\mu}{}_{\alpha}]\,\sqrt{-G}\,\Theta^{\beta,\alpha} + g_{\beta,}{}^{,\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{-G}\,\Theta^{\beta,\alpha}) \\
&\quad = -\,\sqrt{-G}\,[f^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma} + f^{,}_{,\alpha}{}^{\mu}{}_{\gamma} + f^{,}_{,\gamma}{}^{\mu}{}_{\alpha}]\,\Theta^{,\gamma\alpha} \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,(\sqrt{-G}\,\Theta^{,\mu\alpha}) - \sqrt{-G}\,\frac{\partial g_{\beta,}{}^{,\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,g^{\beta,}{}_{,\gamma}\,\Theta^{,\gamma\alpha} \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,(\sqrt{-G}\,\Theta^{,\mu\alpha}) - \sqrt{-G}\,\left(\frac{\partial g_{\beta,}{}^{,\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,g^{\beta,}{}_{,\gamma}\right)\Theta^{,\alpha\gamma} + 2\sqrt{-G}\,f^{,}_{,\alpha\beta}{}^{\mu}\Theta^{,\alpha\beta} \ ,
\end{aligned}$$

en raison de l'antisymétrie des $f^{,\mu}_{,\ \alpha\gamma}$. Les relations:

$$\begin{aligned}
D_{,\alpha}\,(\sqrt{-G}\,\Theta^{,\mu\alpha}) = &\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,(\sqrt{-G}\,\Theta^{,\mu\alpha}) - \sqrt{-G}\,\left(\frac{\partial g_{\beta,}{}^{,\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,g^{\beta,}{}_{,\gamma}\right)\Theta^{,\alpha\gamma} \\
&+ 2\sqrt{-G}\,f^{,}_{,\alpha\beta}{}^{\mu}\Theta^{,\alpha\beta} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

constituent la forme tétradique des équations du mouvement. Tous les développements ultérieurs de cet article en découlent.

4. Le tenseur champ gravitationnel. Cas de l'espace-temps plat

En comparant les équations (2.16) et (3.8), nous sommes conduits à interpréter $-2\sqrt{-G}\, f^{\;;\;\;\mu}_{\;,\alpha\beta}\Theta^{\;,\alpha\beta}$ *comme la densité de la 4-force gravitationnelle.* Remarquons que cette force a la même forme que les forces des théories physiques fondamentales: $m\vec{g}$ (force gravitationnelle newtonienne dans un champ $\vec{g}$), $q\vec{E}$ (force électrique dans un champ $\vec{E}$), $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ (force magnétique dans un champ $\vec{B}$), soit: force = (caractéristique(s) de la particule test) x (intensité du champ). Nous voyons ainsi que, *dans tout formalisme tétradique, le champ de gravitation est convenablement exprimé par le tenseur* $-2f$*, les* $\Theta^{\;,\alpha\beta}$ *représentant les caractéristiques du corps d'épreuve.*

Comme les $f^{\;;\;\;\mu}_{\;,\alpha\beta}$ dépendent du choix des tétrades, il va de soi que cette représentation tensorielle du champ de gravitation "réel" n'a d'intérêt que si l'on dispose d'un critère (bien justifié physiquement) permettant de déterminer les "bonnes" tétrades. Dans le cas de l'espace-temps plat, je montre ci-après que ce critère existe, et qu'il conduit à des tétrades parallèles. A la fin du présent article, j'évoque brièvement le cas général, qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

Dans l'espace-temps plat, la densité de la 4-force gravitationnelle est nulle pour tout corps d'épreuve (c'est-à-dire pour tous les $\Theta^{\;,\alpha\beta}$). Cela implique que le tenseur **f** doit aussi s'annuler partout, et en particulier ses composantes[1]:

$$f^{\lambda;}_{\;,\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g^{\lambda;}_{\;,\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda;}_{\;,\mu}}{\partial x^{\nu}}\Big) = 0 \ . \tag{4.1}$$

Il suit de là que les tétrades sont parallèles, et en particulier, dans tout référentiel lorentzien donné de l'espace-temps plat, on peut toujours les écrire sous la forme (Scherrer, [7]):

$$g^{\lambda;}_{\;,\mu} = \delta^{\lambda;}_{\;,\mu} \ , \tag{4.2}$$

ce qui implique bien entendu que la densité d'énergie gravitationnelle est nulle (pour les composantes de ce tenseur, proposé par Scherrer, v. formules (2.12,a-d) ci-dessus). Ce résultat pourrait paraître banal.

[1] La démonstration de cette propriété, trop longue pour être exposée dans cet article, est en fait plus délicate qu'il n'y paraît, en raison de la symétrie des $\Theta^{\;,\mu\nu}$.

Cependant, calculée à l'aide de tétrades quelconques soumises aux seules contraintes (2.1), cette densité est différente de zéro en général [10]! De ce point de vue, on peut donc dire de l'énergie gravitationnelle de l'espace-temps plat qu'elle est bien "localisée", même si sa densité est nulle partout.

5. Le principe d'équivalence

Dans l'espace-temps plat, considérons un corps d'épreuve situé par exemple à l'origine O d'un référentiel lorentzien S. Supposons qu'un référentiel $\bar{S}$ se déplace avec une accélération constante γ par rapport à S, de manière que, pour $t = \bar{t} = 0$, O coïncide avec $\bar{O}$. Le passage de S à $\bar{S}$ peut alors s'exprimer approximativement (du point de vue de la relativité générale) comme suit:

$$t = \bar{t}\ , \qquad x = \bar{x} + \frac{\gamma \bar{t}^{\,2}}{2}\ , \qquad y = \bar{y}\ , \qquad z = \bar{z}. \tag{5.1}$$

Pour un observateur au repos dans $\bar{S}$, le corps d'épreuve situé en O se déplace avec une accélération γ dans le sens opposé. Conformément au principe d'équivalence, cet observateur attribue cette accélération à une force gravitationnelle. Comment cette force apparaît-elle dans les équations (3.8) écrites dans le système $\bar{S}$?

Dans le référentiel S, nous avons:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\ , \qquad g^{\lambda;}{}_{,\mu} = \delta^{\lambda}{}_{\mu}\ , \qquad g_{\lambda,}{}^{;\mu} = \delta_{\lambda}{}^{\mu}\ , \tag{5.2}$$

et la seule composante non nulle du tenseur $\Theta\ {}^{,\mu\nu}$ est $\Theta\ {}^{,00} = \rho\eta^{00} = \rho$ si nous admettons que le corps d'épreuve n'a pas de structure interne particulière ($\rho \equiv$ densité matérielle). Par la transformation (5.1), les $f\ {}^{;}{}_{,\alpha\beta}{}^{\mu} = 0$ ne changent pas, et nous obtenons pour le tenseur métrique et les tétrades:

$$(\bar{g}_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1-\gamma^2\bar{t}^2 & -\gamma\bar{t} & 0 & 0 \\ -\gamma\bar{t} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\ , \tag{5.3a}$$

$$(\bar{g}^{\lambda;}{}_{,\mu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\bar{t} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ , \qquad (\bar{g}_{\lambda,}{}^{;\mu}) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma\bar{t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ , \tag{5.3b}$$

$$\text{dét}\,(\bar{g}^{\lambda,}_{\;\;,\mu}) \equiv \bar{g} = \sqrt{-\bar{G}} = 1\,. \tag{5.3c}$$

D'autre part, on vérifie aisément que seules les composantes $\bar{\Theta}^{\;,00}$, $\bar{\Theta}^{\;,01}$, $\bar{\Theta}^{\;,11}$ du tenseur $\bar{\Theta}^{\;,\mu\nu}$ sont différentes de zéro:

$$\bar{\Theta}^{\;,00} = \rho\;, \qquad \bar{\Theta}^{\;,01} = -\rho\gamma\bar{t}\;, \qquad \bar{\Theta}^{\;,11} = \rho\gamma^2\bar{t}^2\,. \tag{5.4}$$

Des quatre équations (3.8), deux sont des identités ($\mu = 2, 3$). Pour $\mu = 1$, nous obtenons (afin d'éviter l'emploi des distributions, je suppose que les dimensions du corps d'épreuve sont assez grandes pour que l'on puisse considérer ρ comme indépendante de $\bar{t}$ et $\bar{x}$ pendant de brefs laps de temps):

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\alpha}\left(\sqrt{-\bar{G}}\,\bar{\Theta}^{\;,1\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\,(-\rho\gamma\bar{t})\;, \tag{5.5a}$$

$$-\sqrt{-\bar{G}}\,\frac{\partial\bar{g}_{\beta,}^{\;\;,1}}{\partial\bar{x}^\alpha}\,\bar{g}^{\beta,}_{\;\;,\gamma}\,\bar{\Theta}^{\;,\alpha\gamma} = \rho\gamma\;, \tag{5.5b}$$

$$\text{c'est-à-dire:} \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{t}}(\rho v) = -\rho\gamma\;, \tag{5.5c}$$

car $-\gamma\bar{t}$ est la vitesse du corps d'épreuve par rapport à $\bar{S}$. L'équation $\mu = 1$ est donc simplement l'équation de Newton pour le mouvement relatif du corps d'épreuve dans $\bar{S}$. $-\rho\gamma$ est en effet la *force d'inertie* (force "fictive" de Newton) agissant sur le corps d'épreuve dans $\bar{S}$. Cependant, selon le principe d'équivalence, pour un observateur au repos dans $\bar{S}$, cette force est *équivalente* à une force de gravitation qui fait tomber le corps.

D'autre part, la densité d'énergie gravitationnelle dans S est nulle partout et le mouvement uniformément accéléré du référentiel $\bar{S}$ ne crée pas d'énergie. *Donc, dans $\bar{S}$, la densité d'énergie gravitationnelle est également nulle ($\bar{f}^{\;,}_{\;,\alpha\beta}{}^{\mu} = 0$).* On voit par là que les deux énoncés suivants ne sont pas contradictoires: "la force est différente de zéro" et "la densité d'énergie gravitationnelle est nulle". La raison en est évidente: la densité d'énergie gravitationnelle nulle correspond en fait à une force fictive. Nous reviendrons plus en détail sur ce point au paragraphe 6.

Considérons maintenant un corps d'épreuve initialement au repos dans un champ de gravitation "réel", par exemple dans le champ extérieur d'une sphère homogène. Laissons ensuite ce corps tomber librement dans le champ de la sphère, et soit $\bar{S}$ un référentiel orthonormé dans lequel le corps est au repos. Pour un observateur immobile dans $\bar{S}$ (qui tombe dans le champ de la sphère exactement comme le corps d'épreuve), ce corps est en équilibre. Comment celui-ci est-il exprimé par les équations (3.8)?

Ici également, il s'agit de passer d'un référentiel à l'autre, soit du référentiel S, dans lequel la sphère est immobile, au référentiel $\bar{S}$, dans lequel le corps d'épreuve et l'observateur sont au repos. Comme dans l'exemple précédent, supposons le corps d'épreuve placé à l'origine de son système propre (ici $\bar{O}$), dont l'abscisse initiale est d dans S. Pour les besoins de la démonstration, un calcul approché est suffisant, et la transformation de coordonnées peut s'écrire:

$$t = \bar{t}\,, \qquad x = \bar{x} + \frac{\gamma \bar{t}^2}{2} + d\,, \qquad y = \bar{y}\,, \qquad z = \bar{z}\,, \tag{5.6}$$

où γ est l'accélération du corps d'épreuve et de l'observateur (γ est pratiquement constante durant de brefs laps de temps). Rappelons d'abord la forme (approchée) du tenseur métrique du champ de la sphère:

$$(g_{\mu\nu}) \cong \left[1 - \frac{2a}{r} \,\middle|\, -1 - \frac{2a}{r} \,\middle|\, -1 - \frac{2a}{r} \,\middle|\, -1 - \frac{2a}{r}\right], \tag{5.7}$$

où $a \equiv GM/c^2$. Les tétrades les plus simples satisfaisant aux relations (2.1) sont ici les tétrades diagonales:

$$(g^{\lambda,}{}_{,\mu}) \cong \left[1 - \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 + \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 + \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 + \frac{a}{r}\right], \tag{5.8a}$$

$$\left(g_{\lambda,}{}^{,\mu}\right) \cong \left[1 + \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 - \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 - \frac{a}{r} \,\middle|\, 1 - \frac{a}{r}\right]. \tag{5.8b}$$

La transformation (5.6) permet de calculer le tenseur métrique et les tétrades dans le référentiel $\bar{S}$ (les termes en a^2/r^2, $(a/r)\gamma\bar{t}$, $\gamma^2\bar{t}^2$ sont négligeables):

$$(\bar{g}_{\mu\nu}) \cong \begin{bmatrix} 1 - 2a/r & \gamma\bar{t} & 0 & 0 & & & \\ \gamma\bar{t} & -1 - 2a/r & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 - 2a/r & 0j0 & 0 & 0 & -1 - 2a/r \end{bmatrix}, \tag{5.9a}$$

$$(\bar{g}^{\lambda,}{}_{,\mu}) \cong \begin{bmatrix} 1-a/r & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\bar{t} & 1+a/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a/r \end{bmatrix},$$

$$(\bar{g}_{\lambda,}{}^{,\mu}) \cong \begin{bmatrix} 1+a/r & \gamma\bar{t} & 0 & 0 \\ 0 & 1-a/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a/r \end{bmatrix}, \tag{5.9b}$$

$$\text{dét}(\bar{g}^{\lambda,}{}_{,\mu}) \equiv \bar{g} = \sqrt{-\bar{G}} \cong 1 + \frac{2a}{r}\,. \tag{5.9c}$$

Dans le référentiel propre $\bar{S}$ du corps d'épreuve, la seule composante non nulle du tenseur matériel est $\bar{\Theta}^{\,,00} = \bar{g}^{00}\bar{\Theta}^{\,,0}_{\,,0} \cong \rho$. Calculons les trois termes de l'équation (3.8, $\mu = 1$) (le corps tombe le long de l'axe des x, soit $y = \bar{y} = 0,\ z = \bar{z} = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\left(\sqrt{-\bar{G}}\,\bar{\Theta}^{\,,1\alpha}\right) = 0\,, \tag{5.10a}$$

$$-\sqrt{-\bar{G}}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta,}{}^{,1}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\,\bar{g}^{\beta,}{}_{,\gamma}\right)\bar{\Theta}^{\,,\alpha\gamma} =$$

$$-\sqrt{-\bar{G}}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta,}{}^{,1}}{\partial \bar{t}}\,\bar{g}^{\beta,}{}_{,0}\right)\bar{\Theta}^{\,,00} \cong -\gamma\rho\,, \tag{5.10b}$$

$$2\sqrt{-\bar{G}}\,\bar{f}^{\;,}{}_{,\alpha\beta}{}^{1}\,\bar{\Theta}^{\,,\alpha\beta} = 2\sqrt{-\bar{G}}\,\bar{f}^{\;,}{}_{,00}{}^{1}\,\bar{\Theta}^{\,,00} \cong \frac{a}{r^2}\rho\,, \tag{5.10c}$$

où l'on a calculé $\bar{f}^{\;,}{}_{,00}{}^{1}$ à l'aide de (5.9, a,b). Les équations $\mu = 2, 3$ n'ont pas d'intérêt dans notre problème. Avec $G = 1$ et $c = 1$, $a = M$ et $(a/r^2) = \gamma$, on voit clairement la signification de l'équation (3.8, $\mu = 1$): dans le référentiel $\bar{S}$, la *force d'inertie (5.10, b)* agissant sur le corps d'épreuve est équilibrée par la *force gravitationnelle "réelle"* $(a/r^2)\rho = \gamma\rho$ *(5.10, c)*, ce corps étant au repos dans $\bar{S}$.

Ce résultat serait-il trivial? On ne doit pas oublier que les équations $D_{\,,\alpha}\bar{\Theta}^{\,,\mu\alpha} = 0$ sous leur forme purement einsteinienne n'ont absolument aucun intérêt dans cet exemple. En effet: pour $\mu = 1$, $(\partial/\partial\bar{x}^{\alpha})\,\bar{\Theta}^{\,,\mu\alpha} = 0$ et tous les $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont nuls en vertu du caractère inertiel du référentiel $\bar{S}$ en chute libre et du choix des coordonnées dans $\bar{S}$. Sous sa forme tétradique (3.8), la même équation montre au contraire que la force résultante nulle agissant sur le corps d'épreuve se décompose en une force gravitationnelle "réelle" et une force d'inertie "fictive".

Quel rapport avec le concept de localisabilité de l'énergie gravitationnelle? Comme dans le premier exemple traité dans ce paragraphe, nous voyons que cette énergie (forme quadratique des $f^{\lambda}{}_{;\mu\nu}$) est exclusivement liée au champ de gravitation *réel* décrit par le tenseur $-2\mathbf{f}$. A l'origine de la force d'inertie, la chute libre ne crée en effet aucune énergie. Ce point est repris et commenté en détail au paragraphe 6.

6. Commentaires et conclusion

Les développements du paragraphe 5 montrent clairement qu'on ne peut parler de densité d'énergie gravitationnelle qu'en relation avec la densité de force gravitationnelle "réelle" $-2f\,{}^{;}{}_{,\alpha\beta}{}^{\mu}\Theta\,{}^{,\alpha\beta}$. Aux forces d'inertie ("fictives" selon Newton) ne correspond aucune énergie. Cela est particulièrement évident dans le premier exemple: l'observateur en mouvement accéléré voit le corps d'épreuve "tomber" dans un espace où la densité d'énergie gravitationnelle est nulle partout. Or, selon l'interprétation orthodoxe du principe d'équivalence, les forces d'inertie sont identifiées à des forces gravitationnelles. Est-ce à dire que, conformément à l'opinion de la grande majorité des relativistes, principe d'équivalence et localisabilité de l'énergie gravitationnelle sont deux notions définitivement inconciliables?

Dans son article de 1916 [1], Einstein formule le principe d'équivalence comme suit: "Pour des domaines quadridimensionnels infiniment petits, la théorie de la relativité au sens restreint est valable si les coordonnées sont convenablement choisies." Et il ajoute aussitôt: "Dans ce cas, l'état d'accélération du système de coordonnées infiniment petit ("local") doit être choisi de telle sorte qu'il n'y ait pas de champ de gravitation; ceci est possible pour un domaine infiniment petit." Il s'agit donc d'un référentiel local en chute libre (la "boîte" d'Einstein), et le point crucial du principe est bien entendu d'affirmer que, dans ces conditions, "la théorie de la relativité au sens restreint est valable". On pourrait s'arrêter là, car le fait de préciser "de telle sorte qu'il n'y ait pas de champ de gravitation" risque fort de compliquer inutilement la compréhension du principe. Qu'on en juge.

Supposons que la "boîte" d'Einstein, en chute libre, soit occupée par un observateur connaissant parfaitement les lois de la physique (et en particulier, la loi “masse grave=masse inerte”, fondement du principe d’équivalence). Cet observateur constate que son référentiel est inertiel et déduit de là que ses $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont nuls pour des coordonnées convenablement choisies. Mais il sait aussi que, grâce au formalisme tétradique, les mêmes $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ peuvent se décomposer selon la formule (3.5):

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \gamma\,{}^{\prime\lambda}_{,\;\mu\nu} - \left(f\,{}^{\prime}_{,\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + f\,{}^{\prime}_{,\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}\right) \ . \tag{6.1}$$

En introduisant ces expressions dans les équations des géodésiques:

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\,\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \ , \tag{6.2}$$

on obtient les relations suivantes:

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{ds^2} + \gamma\,{}^{\prime\lambda}_{,\;\alpha\beta}\,\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} + 2f\,{}^{\prime}_{,\alpha\beta}{}^{\lambda}\,\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \ , \tag{6.3}$$

dans lesquelles le 4-vecteur coordonnées $-2f\,{}^{\prime}_{,\alpha\beta}{}^{\lambda}(dx^{\alpha}/ds)(dx^{\beta}/ds)$ représente l’action d’un champ gravitationnel “réel” (v. plus loin; rappelons que les géodésiques décrivent le mouvement d’un corps d’épreuve sans structure interne).

Revenons à notre physicien. Même en sachant que ses $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont nuls, enfermé dans sa “boîte” et sans contact avec l’extérieur, celui-ci ne pourra pas dire dans lequel des deux cas suivants il se trouve: 1) l’espace-temps est en réalité globalement plat, et les $\gamma\,{}^{\prime\lambda}_{,\;\mu\nu}$ et les $f\,{}^{\prime}_{,\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ sont nuls partout, ou 2) $\gamma\,{}^{\prime\lambda}_{,\;\mu\nu} = f\,{}^{\prime}_{,\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + f\,{}^{\prime}_{,\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} \neq 0$, ce qui correspond à une chute libre dans un champ gravitationnel “réel”, c’est-à-dire créé par des masses pondérables par exemple. Cependant, malgré cette incapacité, l’observateur reconnaîtra que le principe d’équivalence est valable de toute manière: puisque son référentiel propre est inertiel, les lois de la relativité restreinte y sont applicables dans chacune des éventualités ci-dessus. En revanche, s’il est évident qu’il n’y a pas de champ gravitationnel “réel” dans le premier cas, il est trompeur de l’affirmer dans le second. L’action du champ gravitationnel “réel” (décrite par les $f\,{}^{\prime}_{,\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$) dans lequel la ”boîte” tombe librement est en réalité compensée exactement par les forces d’inertie, représentées par les $\gamma\,{}^{\prime\lambda}_{,\;\mu\nu}$.

Certes, les accélérations dues aux forces gravitationnelles et celles dues aux forces d’inertie ont en commun la remarquable propriété de ne pas dépendre des masses d’épreuve, et l’identfication des unes aux autres ne suscite aucune difficulté dans le formalisme einsteinien. Il n'en demeure pas moins vrai que les causes de ces accélérations ne sont pas les mêmes (causes différentes, effets identiques!), et il se trouve que le formalisme tétradique est en mesure d'exprimer cette différence.

En résumé: dans ce problème, ne s'agit-il pas d'une certaine manière d'une question de terminologie? Dans le formalisme einsteinien, on a décidé d'appeler "champ gravitationnel" l'entité physique représentée par les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ tandis que, dans le formalisme tétradique, les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ englobent clairement deux notions différentes: le champ gravitationnel "réel" (les $f\ {}_{;\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$) et les forces d'inertie, soit les forces "fictives" de Newton (les $\gamma\ {}_{;}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$). Pour autant qu'on tienne compte de ce qui différencie ces définitions l'une de l'autre, il n'y a aucune contradiction entre ces deux formalismes et, contrairement à ce qu'on peut lire occasionnellement, le formalisme tétradique ne viole absolument pas le principe d'équivalence, mais en fournit simplement la réinterprétation que je viens de développer.

Venons-en au problème de la localisabilité de l'énergie-impulsion gravitationnelle. En formalisme einsteinien, conformément aux raisons discutées ci-dessus, il est clair que celle-ci ne peut pas être localisée, puisque les $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ s'annulent dans tout référentiel localement inertiel rapporté à des coordonnées appropriées. En formalisme tétradique en revanche, la question de la localisabilité est tout à fait pertinente. Rappelons en effet que, dans un tel référentiel, les $f\ {}_{;\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ ne sont pas nuls en général et devraient par suite nous permettre de construire un "complexe" tensoriel représentant l'énergie-impulsion gravitationnelle (v. par exemple les formules (2.12, a-d) du présent travail). Les considérations qui précèdent redonnent ainsi toute leur légitimité aux recherches dans ce domaine.

Enfin, il n'est pas sans intérêt d'observer que l'énergie gravitationnelle relativiste représente une généralisation de l'énergie potentielle classique. Or, cette dernière n'est pas autre chose que l'énergie qui a servi à constituer le champ de gravitation, soit à "mettre en place" les masses à l'origine de ce champ. Dans le cas relativiste, par analogie, il n'est donc pas étonnant que l'énergie gravitationnelle soit liée aux $f\ {}_{;\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ c'est-à-dire au champ "réel", et non aux $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, qui comportent également les forces "fictives" d'inertie. A cet égard, le premier exemple du paragraphe 4 est particulièrement significatif.

Un dernier problème reste encore ouvert: celui de la détermination des "bonnes" tétrades. Au paragraphe 4, j'ai montré que, dans l'espace-temps plat, celles-ci doivent être parallélisées. A mon avis, il y a de bonnes raisons pour que ce critère reste valable dans le cas d'un espace-temps quelconque et, dans un article datant de quelques années [10], j'ai indiqué une voie possible dans cette direction. Mais il me paraît nécessaire de soumettre cette idée à un examen plus approfondi.

Références

[1] A.Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik, vol.49, 1916, pp. 769-882.

[2] C. Møller, Further Remarks on the Localization of the Energy in the General Theory of Relativity, Annals of Physics, vol. 12, 1961, pp. 118-133.

[3] C. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973.

[4] N. Stavroulakis, Sur le principe d'équivalence et le problème de l'énergie, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 18, 1993, pp. 221-230.

[5] W. Scherrer, Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie, Zeitschrift für Physik, vol. 138, 1954, pp. 16-34.

[6] W. Scherrer, Zur linearen Feldtheorie III. (Die Gravitationsgleichungen.), Zeitschrift für Physik, vol. 141, 1955, pp. 374-385.

[7] W. Scherrer, Darstellung der Gravitationsenergie, Helvetica Physica Acta, vol. 37, 1964, pp. 317-328.

[8] W. Scherrer, Der phänomenologische Energietensor im Rahmen der linearen Feldtheorie, Helvetica Physica Acta, vol. 44, 1971, pp.530-544.

[9] W. Scherrer, Die Trägheitswelt der Linearen Feldtheorie, Helvetica Physica Acta, vol. 46, 1973, pp.235-252.

[10] J. Chevalier, Is gravitational energy-momentum really non-localizable?, Helvetica Physica Acta, vol. 62, 1989, pp. 335-338.

(Manuscrit reçu le 16 juin 1993, révisé le 15 mai 1996)