Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 21, n° 2, 1996

Cinématique et mesure en Relativité restreinte

Michel Karatchentzeff

Fondation Louis de Broglie, 23, quai de Conti, 75006 Paris*

RÉSUMÉ. Dans cet article, on donne un rapide rappel des principaux axiomes de la Relativité restreinte et de leurs conséquences.

ABSTRACT. In this paper, a brief survey of main axioms of the special theory of Relativity and of their consequences is given.

Concepts et terminologie.

C'est en observant les phénomènes de la nature que le physicien cherche leur interdépendance. À partir de quelques uns d'entre eux, il construit alors ce qu'il appelle une *théorie* qu'il tentera par la suite d'élargir à la totalité des phénomènes.

Il aboutit ainsi à la notion d'*observateur* qui correspond à une description par un physicien idéalisé et ponctuel des événements se déroulant dans son voisinage, et l'une des plus magistrales applications de cette manière de procéder est due à A. Einstein [1] lorsqu'il introduisit la Relativité restreinte. Le but de cet article est d'une part de récapituler les principaux axiomes nécessaires pour présenter de façon synthétique cette théorie et d'autre part d'en exposer quelques conséquences cinématiques.

À un observateur seront donc associés:

– trois axes orientés définis par trois vecteurs indépendants $\mathbf{e}_\mu$ (μ prenant les valeurs 1, 2 et 3) issus du point où se trouve cet observateur.

* Adresse électronique (*e-mail*): `mk@ccr.jussieu.fr`

– une échelle de temps d'origine arbitraire.
– un ensemble d'appareils de mesure permettant d'associer à tout événement quatre nombres (x^a) dont le premier x^0 définit sa position sur l'échelle des temps; les trois derniers (les x^μ) repèrent cet événement par rapport aux $\mathbf{e}_\mu$ et constituent sa représentation spatiale.

Lorsque l'ensemble des conditions ci-dessus est réalisé, on dit que l'on a défini un *système de référence* S dans lequel l'observateur se trouve à l'origine. Ce dernier est alors à même d'établir par la simple donnée des x^α une représentation des événements ayant lieu autour de lui; une telle représentation s'appelle *carte*. Si cet observateur ne peut repérer des événements que dans son voisinage immédiat, on parle de *système de référence local*; sans restriction, le système sera dit *global*.

L'ensemble des x^0 reporté sur l'échelle des temps constitue le temps t de S et l'ensemble des événements repérés à $x^0 = \text{Cte}$ définit l'espace Σ_{x^0} de S à l'instant x^0. Si cet espace est indépendant de x^0, on dit alors qu'il s'agit de l'espace Σ associé au système de référence S; le couple (Σ, t) s'appelle *espace-temps* de S.

S'il n'y a pas de direction privilégiée dans l'espace Σ (isotropie de Σ), ni de point privilégié (homogénéité de Σ), on peut alors montrer [2] qu'il ne doit y avoir ni courbure (un système d'axes défini sur une courbe fermée se retrouve identique après avoir décrit parallèlement à lui-même toute la courbe), ni torsion (une courbe fermée sur la variété se développera suivant une courbe fermée dans l'espace tangent) et que l'espace ainsi défini est euclidien.

Sans entrer dans les détails, il est alors possible de définir des systèmes de référence au repos (notion indispensable pour pouvoir parler de la mise à l'heure d'horloges synchronisées[1]) puis en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres, et enfin, à partir de cette notion, celle de *système d'inertie*, système de référence dans lequel un point matériel libre décrit un mouvement rectiligne et uniforme (c'est-à-dire satisfait au principe de Galilée), structure dans laquelle nous nous placerons désormais.

[1] Deux horloges sont dites synchronisées lorsqu'elles battent la même seconde; l'existence ou la possibilité de construire des horloges synchronisées est un des postulats de la théorie.

Lien entre deux systèmes d'inertie en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

La Relativité restreinte, comme la Mécanique newtonienne, se décrit dans le cadre des systèmes d'inertie, les physiciens postulant que le principe de Galilée doit être valable dans le système de référence où ils effectuent leurs mesures.

Ils utilisent donc, en résumé, des appareils dits *standards*, c'est-à-dire dont les mesures coïncident lorsqu'ils sont au repos les uns par rapport aux autres; ces appareils leur permettent de mesurer dans l'espace euclidien qui les entoure des longueurs séparant deux événements ponctuels, ainsi que l'intervalle de temps correspondant [3]; la mesure de ce dernier intervalle est rendue concevable grâce à l'hypothèse de l'isotropie de la valeur de la vitesse de la lumière qui rend possible la synchronisation des horloges.

Dans ces conditions, il est logique qu'un physicien se demande ce que doit trouver un autre physicien placé dans un système d'inertie différent du sien s'il effectue le même type de mesures sur les mêmes événements. On ne considérera donc que des systèmes d'inertie en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

À chaque système sont alors associés:

- un espace euclidien à trois dimensions , isotrope, homogène, sans courbure ni torsion.
- un temps unique.
- chaque système obéissant au principe d'inertie pour tout point matériel libre.

Nous conviendrons que tous les indices associés au repère (S') seront primés, que les indices grecs prendront leurs valeurs de 1 à 3, les latins de 0 à 3, et nous adopterons évidemment la convention de sommation d'Einstein sur les indices muets. Nous considérerons ensuite deux observateurs situés dans deux systèmes d'inertie distincts S et S' qui observent tous deux un point matériel libre M se déplaçant d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à chacun des systèmes.

Un point M est alors parfaitement défini dans le repère S par une relation de la forme:

$$x^\mu = x_0^\mu + w^\mu(t - t_0)$$

et on aura de même dans S' pour le même point M

$$x^{\mu'} = x_0^{\mu'} + w^{\mu'}(t' - t'_0)$$

Comme c'est dans le cadre d'un formalisme quadri-dimensionnel que nous allons travailler par la suite, il est plus pratique de poser:

REPÈRE S	REPÈRE S'
$x^0 \equiv ct$	$x^{0'} \equiv ct'$
$u^0 s \equiv c(t - t_0)$	$u^{0'} s' \equiv c(t' - t'_0)$
$\dfrac{u^\mu}{u^0} \equiv \dfrac{w^\mu}{c}$	$\dfrac{u^{\mu'}}{u^{0'}} \equiv \dfrac{w^{\mu'}}{c}$

où c est, pour l'instant, une constante arbitraire.

Enfin en posant $x^0_0 = ct_0$ et en remarquant que $x^0 = x^0_0 + u^0 s$, il est possible de regrouper toutes ces relations sous la forme:

$$x^a = x^a_0 + u^a s \qquad x^{a'} = x^{a'}_0 + u^{a'} s \tag{1}$$

Pour trouver la relation entre les x^a et les $x^{a'}$, on utilise le fait que S' est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à S, ce qui revient à dire qu'un point fixe de S' défini par $dx^{\mu'} = 0$ et $dx^{0'}$quelconque, se déplacera dans S de dx^μ pendant $dx^0 = c\,dt^0$; sa vitesse sera donc par rapport à S de $v^\mu = dx^\mu/dt^0$, soit encore en introduisant la *vitesse réduite*:

$$\beta^\mu = \frac{v^\mu}{c} \qquad \beta^\mu = \frac{dx^\mu}{dx^0} \tag{2}$$

On suppose de plus que les $x^{a'}$ dépendent régulièrement des x^b et de l'orientation des axes; donc que:

$$x^{a'} = x^{a'}(x^b, \beta^i) \qquad \det\left(\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b}\right) \neq 0$$

On pose pour simplifier l'écriture:

$$a^{a'}_b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \tag{3}$$

La relation entre $x^{a'}$ et x^b s'obtient en écrivant que la vitesse de M par rapport à S' est constante ce qui fournit [4] le système d'équations aux dérivées partielles caractérisant les systèmes d'inertie:

$$\partial_p a^{a'}_q = a^{a'}_p \varphi_q + a^{a'}_q \varphi_p \tag{4}$$

La transformation de Lorentz.

Disposer des relations différentielles entre les systèmes d'inertie n'est donc pas suffisant pour caractériser le passage d'un système à un autre. Cette remarque n'est pas étonnante puisque les systèmes lorentziens, comme les systèmes galiléens, obéissent au principe d'inertie. Ce qui caractérisera les premiers sera une hypothèse faite sur la nature de la lumière alors que les seconds sont déduits des hypothèses de l'uniformité du temps et de la conservation de la longueur [3].

Si donc on considère un parcours lumineux élémentaire, il sera défini par:

REPÈRE S	REPÈRE S'
$(x^\mu \longrightarrow x^\mu + dx^\mu; dt)$	$(x^{\mu'} \longrightarrow x^{\mu'} + dx^{\mu'}; dt')$

et si l'on fait l'hypothèse que la valeur de la vitesse de la lumière est constante, isotrope et représentée par la constante c précédente, ces événements seront reliés par les relations:

REPÈRE S	REPÈRE S'
$c^2\, dt^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu\, dx^\nu$	$c^2\, dt'^2 = \delta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'}\, dx^{\nu'}$

De façon plus pratique, si l'on définit

$$\eta = \begin{cases} \eta_{00} = 1 \\ \eta_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} \\ \eta_{0\mu} = \eta_{\mu 0} = 0 \end{cases}$$

les relations ci-dessus introduisent naturellement la forme quadratique associée à deux événements

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a\, dx^b \;\; ; \;\; dx^0 = c\, dt$$

où les indices grecs et latins suivent les conventions que nous avons définies plus haut.

L'intervalle entre deux événements sera dit *du genre temps* si la forme quadratique ds^2 qui lui est associée est positive; il sera *du genre espace* si elle est négative, et *isotrope* si elle est nulle.

Ces définitions permettent de préciser les hypothèses: dans un changement de système d'inertie, on suppose qu'un intervalle conserve sa nature. La constance et l'isotropie de la vitesse de la lumière entraîne alors que les intervalles ds'^2 et ds^2 correspondant à un même parcours lumineux doivent être proportionnels:

$$ds'^2 = \Lambda(x^a, \beta^\mu)\, ds^2$$

ce qui entraîne par dérivation

$$\eta_{r's'}\Big(\partial_l a_a^{r'} a_b^{s'} + a_a^{r'} \partial_l a_b^{s'}\Big) = \eta_{ab}\partial_l\Big(\log \Lambda^2\Big)$$

Reportant ces résultats dans les relations (4), on montre [5] que:

$$\partial_a\Big(\log \Lambda^2\Big) = 0$$

ce qui conduit à deux propriétés:

– Λ est indépendant des coordonnées:

$$\Lambda^2(x^a, \beta^\mu) = \Lambda^2(\beta^\mu)$$

– $\phi_a = 0$, autrement dit les relations de passage de S à S' sont linéaires par rapport aux x^m:

$$x^{a'} = a_q^{a'} x^q + b^{a'}$$

où $a_q^{a'}$ et $b^{a'}$ sont des constantes par rapport aux x^q.

Les hypothèses faites ci-dessus sont alors suffisantes pour montrer [5] que Λ est invariant dans une rotation des axes du système S, autrement dit que

$$\Lambda^2(\beta^\mu) = \Lambda^2(\beta^2) \quad \text{avec} \quad \beta^2 = \delta_{\mu\nu}\beta^\mu\beta^\nu$$

De ce résultat, quand on considère le cycle $S \to S' \to S$, et de $\Lambda(\beta'^2)\Lambda(\beta^2) = 1$, on déduit que:

$$\beta'^2 = \beta^2 \quad \text{et donc} \quad \Lambda(\beta'^2) = \Lambda(\beta^2) = 1$$

Il y a donc égalité des formes quadratiques associées:

$$ds^2 = ds'^2$$

Il en résulte qu'à une rotation des axes près, si dans le repère (S) l'observateur voit le repère (S') se déplacer à la vitesse β, un observateur lié au repère S' verra se déplacer le repère S avec la vitesse $-\beta$; et le passage des x^a aux $x^{s'}$ peut s'interpréter comme une transformation de coordonnées dans l'espace-temps muni de la métrique

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$$

Il est alors bien connu [4] que les coefficients $a_\sigma^{\mu'}$ de la transformation générale de Lorentz $x^{m'} = a_s^{m'} x^s$ résultent de tout cela:

$$\begin{aligned}
a_0^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
a_0^{\mu'} &= \frac{\beta^{\mu'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\alpha_\lambda^{\mu'} \beta^\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
a_\mu^{0'} &= \frac{\beta_\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\alpha_\mu^{\lambda'} \beta_{\lambda'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
a_\nu^{\mu'} &= \alpha_\nu^{\mu'} + \frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big)\beta^{\mu'}\beta_\nu \\
&= \alpha_l^{\mu'}\left(\delta_\nu^l - \frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big)\beta^l \beta_\nu\right) \\
\beta^{\mu'} &= -\alpha_{\mu'}^{\lambda} \beta_\lambda
\end{aligned}$$

où les $\alpha_\lambda^{\mu'}$ sont les coefficients de la matrice de rotation des axes dans l'espace à trois dimensions lorsque β tend vers 0. De la transformation de Lorentz découlent les notions de contraction des longueurs et de dilatation des durées.

Dans le cas où à l'instant $t = 0$ les deux repères coïncident et où la vitesse est choisie le long de Ox ($\alpha_\lambda^{\mu'} = \delta_\lambda^{\mu'}$ et $\beta^\mu = \beta\delta_1^\mu$), la transformation se réduit à la *transformation spéciale de Lorentz*:

$$\begin{aligned}
x^{1'} &= \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
x^{2'} &= x^2 \\
x^{3'} &= x^3 \\
x^{0'} &= \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Si enfin on suppose $\beta^2 \ll 1$, on trouve au premier ordre en β

$$x^{\mu'} = \alpha_\lambda^{\mu'}(\delta_\nu^\lambda x^\nu - \beta x^0)$$
$$x^{0'} = x^0 + \beta_\mu x^\mu$$

Ce ne sera la transformation de Galilée que si $\beta_\mu x^\mu \ll x^0$, auquel cas $x^{0'} = x^0$. Le passage de la transformation de Lorentz à la transformation de Galilée n'a donc de sens aux petites vitesses que dans une petite région de l'espace.

Les notions d'impulsion et d'énergie en Relativité restreinte.

L'interprétation des formules de passage d'un système d'inertie à un autre sous la forme d'une transformation linéaire dans un espace quadridimensionnel permet d'interpréter directement les composantes x^a de la position d'un mobile M comme les composantes d'un vecteur de cet espace.

Par contre sa vitesse dx^μ/dt ne peut bénéficier de la même interprétation puisque dt n'est pas invariant sous une transformation de Lorentz.

Si le mobile M se déplace avec une vitesse uniforme $v^\mu = \beta^\mu c$ par rapport au système de référence, on peut cependant lui associer un système d'inertie et imposer qu'il se trouve placé à l'origine de ce système. La transformation de Lorentz ci-dessus permet alors de connaître le temps τ $(= t')$ de ce système. Ce temps est dit "temps propre" associé à la particule M et sa différentielle est reliée au temps de l'observateur par

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2} \ ; \ dx^{\mu'} = 0$$

et l'on a:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = \frac{1}{c^2}ds^2$$

$d\tau$ est donc un invariant et l'on peut s'en servir pour définir un quadrivecteur de l'espace-temps associé à la vitesse de la particule par:

$$u^m = \frac{dx^m}{cd\tau} = \frac{dx^m}{ds} \ ; \ u^\rho = \frac{v^\rho}{c\sqrt{1-\beta^2}} \ ; \ u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ ; \ u^m u_m = 1$$

Par construction, u^m est donc un quadri-vecteur sans dimension qui, si l'on veut généraliser la notion d'impulsion conduit à définir une quantité du type:

$$P^a = m_0 c u^a$$

c est la vitesse de la lumière et m_0 a évidemment les dimensions d'une masse. Si l'on admet qu'aux faibles vitesses P^μ/v^μ doit tendre vers la masse de la particule, m_0 s'interprète comme la masse de la particule dans le système où elle est au repos; m_0 doit alors être un scalaire.

Il est alors logique de généraliser la loi fondamentale de la dynamique newtonienne

$$\frac{dP^\mu}{dt} = f^\mu \quad \text{ou} \quad \frac{dcP^\mu}{cdt} = f^\mu$$

en définissant le quadrivecteur force de l'espace-temps par

$$\frac{dcP^a}{ds} = \Phi^a \quad \text{ou} \quad m_0 c^2 \frac{du^a}{ds} = \Phi^a$$

quadrivecteur qui, compte tenu de la relation $u^a u_a = 1$, devra vérifier:

$$\Phi^a u_a = 0$$

En utilisant les définitions, les équations ci-dessus peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v^\mu\Big) = \Phi^\mu \sqrt{1-\beta^2}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big) = \Phi^0 \sqrt{1-\beta^2}$$

Le passage à la limite $\beta^2 \ll 1$ dans la première relation fait apparaître la quantité $d(m_0 v^\mu)/dt$: pour retrouver aux faibles vitesses la loi fondamentale de la dynamique, on est amené à poser

$$\Phi^\mu = \frac{f^\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

et comme $\Phi^a u_a = 0$ il s'ensuit que

$$\Phi^0 = -\frac{f_\rho v^\rho}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\vec{f}\vec{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

et les équations de la dynamique relativiste s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v^\mu\Big) = f^\mu$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big) = -f_\rho v^\rho$$

C'est la définition même de u^a qui impose que la quatrième composante du vecteur force soit reliée au travail développé par la force. La forme même de ces équations invite à étendre les concepts de massse et d'énergie d'une particule en posant:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad E = mc^2$$

La conservation de la norme du quadrivecteur impulsion impose alors la relation:

$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m_0 c^2$$

La notion d'objet tri-dimensionnel en Relativité restreinte.

Dans ce paragraphe, on appellera *photon* toute particule ponctuelle se déplaçant à la vitesse (c) de la lumière.

L'œil qui regarde un objet est uniquement sensible aux photons arrivant sur sa rétine à un instant donné. Si l'on néglige tout effet de rémanence, cela signifie que les photons reçus ne peuvent avoir été émis simultanément par des points de l'objet qui se trouvent à des distances différentes de l'observateur puisque la vitesse de la lumière est constante. *A fortiori* des points plus éloignés que d'autres doivent avoir émis leurs photons plus tôt pour être vus au même instant que des points plus proches. On est donc conduit à préciser la notion d'image.

L'image d'un objet suffisamment éloigné sera définie par un ensemble de photons émis par différents points de l'objet se déplaçant dans une direction parallèle et se trouvant à un instant donné dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation[2].

[2] La définition donnée ci-dessus est celle de J.L. Terrell [6]; Mary L. Boas [8] a proposé de définir une image par l'intersection d'une sphère centrée sur l'œil O de l'observateur avec le cône engendré par les rayons lumineux issus de l'objet et arrivant simultanément en O. Les deux définitions n'étant pas équivalentes, leurs conséquences sont différentes; la critique en a été faite par S. Kichenassamy [9].

Cette définition admet deux conséquences immédiates:

– En physique newtonienne un ensemble de photons définissant une image quand l'observateur est au repos par rapport à l'objet observé ne définit plus une image dès lors que l'observateur ou l'objet sont en mouvement l'un par rapport à l'autre: le plan des photons initiaux n'est alors plus perpendiculaire à la direction de propagation; il y a alors distorsion par rapport à la situation au repos et l'œil doit percevoir une image déformée.
– Par contre, dans le monde relativiste, l'image d'un objet reste invariante pour tout système de référence. Plus précisément, le plan formé par les photons concernés reste perpendiculaire à leur direction de propagation et la distance entre deux photons de ce plan reste invariante quelque soit le système de référence; l'effet dû à la Relativité restreinte est de produire une rotation de l'objet sans jamais le déformer.

La preuve de cette dernière affirmation a été présentée très élégamment par Weisskopf [7] qui considère l'ensemble des photons arrivant simultanément sur l'œil de l'observateur comme les points de même phase d'une onde électromagnétique plane. Cette onde est transverse, c'est-à-dire que la direction de propagation reste perpendiculaire au front d'onde, ce qui justifie la première partie de l'assertion.

Pour montrer l'invariance de la distance entre deux photons, on appelle x la direction de propagation de l'onde (dans le plan de la feuille, par exemple) et z la direction de l'intersection du front d'onde avec ce plan. (Le problème étant à symétrie cylindrique, on peut éliminer la composante y). Pour deux photons quelconques, la quantité

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

est évidemment un invariant de Lorentz. Or la distance entre deux photons du plan de propagation est définie par

$$z_1 - z_2 \quad \text{lorsque} \quad x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad t_1 = t_2$$

Elle est donc invariante.

Il y a cependant une quantité qui n'est pas invariante dans un changement de repère, c'est la direction tridimensionnelle de propagation de la lumière. Si ϑ est l'angle lorsque l'objet est au repos par rapport à l'observateur, ϑ' l'angle lorsque l'objet est en mouvement, ϑ et ϑ' sont liés par la formule relativiste des aberrations:

$$\sin\vartheta' = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}\sin\vartheta}{1+\beta\cos\vartheta}$$

Un objet mobile qui est effectivement vu sous un angle ϑ donne la même image que l'objet fixe vu au même point de l'espace, mais sous un angle ϑ'. En d'autres termes ce mobile apparaît comme s'il était fixe, mais tourné d'un angle $\vartheta' - \vartheta$.

En particulier, une sphère qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'observateur est donc vue comme une sphère et non comme un ellipsoïde: la contraction de Lorentz "efface" la distorsion newtonienne de l'objet et la remplace par une rotation apparente.

Pour ne pas conclure.

Pas à pas, laborieusement, les physiciens avaient, au cours des siècles, élaboré les notions d'espace et de temps. Ils les pensaient acquises. En quelques pages [1], sans se soucier de redéfinir unités de longueur ou de temps, A. Einstein a "relativisé" toutes ces notions avec des raisonnements très élémentaires et depuis longtemps accessibles. Quatre vingt-dix ans après, sommes-nous certains d'avoir compris tout ce que la Relativité voulait dire ?

Références

[1] A. Einstein, Annalen der Physik, **17**, 1905, p.891–921; traduction anglaise dans : A. Einstein, *The principle of relativity*, Dover 1952, p.37–65.
[2] E. Cartan, Ann. Éc. Norm., 3^e série, **40**, 1923, p.325–412; **41**, 1924, p.1–25; **42**, 1925, p.17–88.
[3] S. Kichenassamy, Ann. Fond. L. de Broglie, **5**, n°3, 1980, p.191–202.
[4] V. Fock, *The theory of space time and gravitation*, Pregamon, 1959.
[5] S. Kichenassamy, C.R. Acad. Sc. Paris, **259**, 1964, p. 4521.
[6] J.L. Terrell, Phys. Rev., **116**, 1959, p. 1041.
[7] V.F. Weisskopf, *Lectures on theoretical physics*, **III**, Boulder, 1960.
[8] M.L. Boas, Amer. J. Phys., **29**, 1961, p. 253.
[9] S. Kichenassamy, C.R. Acad. Sc. Paris, **260**, 1965, p. 1581.